Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Деревенский, Интегрируемые системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений общего порядка, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 1, 52–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm86>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:51:50

УДК 517.9

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ПОРЯДКА

В. П. Деревенский

В работе определяются достаточные условия разрешимости в квадратурах систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков с переменными коэффициентами. Обобщаются на случай таких систем методы вариации постоянных уравнений высших порядков и систем уравнений первого порядка. Результаты получены путем сведения рассматриваемых систем к матричным уравнениям высших порядков, исследуемых методами теории алгебр Ли.

Библиография: 8 названий.

В работе определяются достаточные условия разрешимости в квадратурах систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (СЛОДУ) высших порядков с переменными коэффициентами.

1. Постановка задачи. Пусть M_n – множество $(n \times n)$ -матриц над действительным полем R , $M_n^k(t)$ – совокупность элементов M_n , компоненты которых являются функциями t класса $C^k(t)$, E – единица M_n , L_N – представление в M_n N -мерной алгебры Ли с базисом (E_α) и структурными константами $C_{\alpha\beta}^\gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, N \leq n^2 < \infty$). Предположим, что R_K – радикал L_N ($K \leq N$), т.е. наибольшая разрешимая подалгебра ее, обладающая (по определению) свойствами:

- 1) $[R_K L_N] \subset R_K$,
- 2) $\exists M < \infty: R_K^{(M)} = 0, R_K^{(m)} \equiv [R_K^{(m-1)} R_K^{(m-1)}]$,

где $[AB]$ – коммутант множеств A и B . Договоримся нумеровать базисные матрицы L_N так, чтобы $E_\alpha \in R_K$ при $\alpha = 1, \dots, K$, $E_\alpha \in U_{N-K} \equiv L_N \setminus R_K$ при $\alpha = K+1, \dots, N$.

Рассмотрим нормальную систему ЛОДУ K -го порядка (СЛОДУ.К)

$$\sum_{s=K}^0 A_{is}^j x_j^{(s)} = f_i, \quad A_{iK}^j = \delta_i^j, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где матрицы $A_s \equiv (A_{is}^j) \in M_n^0(t)$, $(\delta_i^j) = E$; по повторяющимся верхним и нижним индексам производится суммирование, $t \in T$, а T – область существования A_{is}^j . Метод сведения скалярных ЛОДУ.К к линейной системе первого порядка [1, с. 139] позволяет сформулировать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Система (1) эквивалентна системе Kn ЛОДУ.1

$$\dot{y}_p = B_p^q y_q + C_p, \quad p, q = 1, \dots, Kn, \quad (2)$$

с матричным коэффициентом $\mathcal{B} \equiv (B_p^q) \in M_{Kn}^0(t)$, состоящим из n^2 $(K \times K)$ -мерных блоков $\mathcal{B}_i^j$ вида

$$\mathcal{B}_i^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -A_{i0}^i & -A_{i1}^i & -A_{i2}^i & \dots & -A_{iK-1}^i \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathcal{B}_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -A_{i0}^j & -A_{i1}^j & \dots & -A_{iK-1}^j \end{pmatrix},$$

а $C_p = 0$, $p \neq Ki$, $C_{Ki} = f_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем новые неизвестные

$$y_p \equiv y_{K(i-1)+k} \equiv x_i^{(k-i)}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (4)$$

Тогда для $k \neq K$ $y_p = \dot{y}_{p-1}$, а для $k = K$, т.е. $p = Ki$, система (1) позволяет определить $\dot{y}_p$ в виде

$$\dot{y}_p = f_p - \sum_{s=0}^{K-1} (A_{ps}^1 y_s + A_{ps}^2 y_{K+s} + \dots + A_{ps}^n y_{(n-1)K-s}).$$

Совокупность этих систем и определяет в M_{Kn}^0 СЛОДУ.1 (2).

Из предложения 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. В области T существует решение системы (1), которое при задании начальных условий является единственным.

Действительно, так как система (1) эквивалентна системе (2), для которой в T всегда существует единственное решение [1, с. 22], оно является решением и системы (1).

В определении системы (1) существенно условие $\mathbf{A}_K = \mathbf{E}$. Оно не только нормализует каждое из уравнений СЛОДУ.К, но и обеспечивает одновременную разрешимость их относительно производных высших порядков искомых функций. Это предполагает рассмотрение нормальных систем общего порядка. В противном случае вопросы существования и единственности решений системы (1) остаются открытыми.

При положительном ответе на эти вопросы возникает главная проблема теории дифференциальных уравнений: проблема интегрирования СЛОДУ.К в квадратурах. При этом известно, что даже отдельные ЛОДУ.2 не интегрируются в них в общем случае. Для них даются лишь достаточные условия разрешимости и соответствующие им методы интегрирования. Естественно, и для СЛОДУ.К возникает проблема определения условий и методов разрешимости их. Так что в настоящей работе ставится задача об определении достаточных условий интегрируемости в квадратурах нормальных СЛОДУ.К и соответствующих методов нахождения их решений.

2. Сведение решения неоднородных систем к решению однородных в случае систем (1) является, очевидно, задачей № 1. Ее решение должно обобщить классические “методы вариации постоянных” (МВП) неоднородных СЛОДУ.1 и уравнений высших порядков [1, с. 135, 143] на случай СЛОДУ.К.

Простейший вариант такого обобщения, очевидно, следует из предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\mathbf{Y} \equiv (Y_p^q)$ – фундаментальная система решений однородной системы (2),

$$\dot{Y}_p^q = B_p^r Y_r^q, \quad p, q, r = 1, \dots, Kn, \quad (5)$$

то общим решением системы (1) является

$$x_i = Y_{K(i-1)+1}^q \int (\mathbf{Y}^{-1})_q^{Kj} f_j dt, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4) следует, что при $k = 1$ $x_i = y_{K(i-1)+1}$. Следовательно, общее решение системы (2) определяется в виде

$$y_p = Y_p^q \int (\mathbf{Y}^{-1})_q^r C_r dt. \quad (7)$$

Таким образом, $x_i = y_{K(i-1)+1} = Y_{K(i-1)+1}^q \int (\mathbf{Y}^{-1})_q^r C_r dt$. Однако, ненулевыми компонентами Kn -мерного вектора (C_r) являются $C_{Ki} = f_i$, что и позволяет из последнего равенства получить (6). Неопределенный интеграл правой части этой формулы задается с точностью до постоянного Kn -мерного вектора. Так что эквивалентность систем (1) и (2) и общность решения (7) второй из них обеспечивает общность решения (6) СЛОДУ.К.

Приведенное утверждение имеет несколько недостатков, важнейшими из которых являются резко возрастающая трудоемкость работы в M_{Kn} сравнительно с M_n и потеря наглядной зависимости решения системы (1) от ее матричных параметров. Поэтому целесообразно дать для нее аналоги известных МВП. Так обобщение использованного выше метода для систем ЛОДУ.1 дает

ТЕОРЕМА 1. Общим решением системы (1) является

$$x_i = x_{Ki}^j \int x_{K-1j}^l \int x_{K-rl}^m \cdots \int x_{1m}^p \int \left(\prod_{k=K}^1 \mathbf{X}_k^{-1} \right)_p^q f_q dt \cdots dt, \quad (8)$$

где $i, j, l, m, p, q = 1, \dots, n$, $\mathbf{X}_k \equiv (x_{ki}^j) \in M_n^k(t)$ – невырожденные решения матричных левосторонних уравнений

$$\sum_{s=K-q}^0 \mathbf{A}_{q,s} \mathbf{X}_{K-q}^{(s)} = 0, \quad q = 0, \dots, K-1, \quad |\mathbf{X}_k| \neq 0, \quad (9)$$

параметры которых определяются рекуррентными соотношениями

$$\mathbf{A}_{q,s} = \sum_{i=0}^{K-q-s} C_{K-q-i+1}^{s+1} \mathbf{A}_{q-1, K-q-i+1} \mathbf{X}_{K-q+1}^{(K-q-s-i)}, \quad C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем матричное левостороннее ЛОДУ.К (МЛЛОДУ.К), которому удовлетворяют любые n решений системы (1), перенумерованные верхним индексом j , $\mathbf{X} \equiv (x_i^j)$:

$$\sum_{s=K}^0 \mathbf{A}_s \mathbf{X}^{(s)} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{A}_K = \mathbf{E}, \quad (11)$$

где матрица $\mathbf{F} \equiv (f_i^j)$ имеет одинаковые элементы строк, $f_i^j = f_i$. Пусть

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_K \int \mathbf{Y}_1 dt, \quad \mathbf{X}_K \in M_n^K(t), \quad \mathbf{Y}_1 \in M_n^{K-1}(t), \quad (12)$$

где $\mathbf{X}_K$ – невырожденное решение однородного уравнения (11),

$$\sum_{s=K}^0 \mathbf{A}_s \mathbf{X}_K^{(s)} = 0, \quad |\mathbf{X}_K| \neq 0. \quad (13)$$

Найдем ограничение, накладываемое на $\mathbf{Y}_1$ этим предположением. Для этого методом индукции убедимся в справедливости формулы Лейбница кратного дифференцирования матричного произведения.

Очевидно, для $k = 1, 2$

$$(\mathbf{X}\mathbf{Y})^{(k)} = \sum_{s=0}^k C_k^s \mathbf{X}^{(s)} \mathbf{Y}^{(k-s)}.$$

Допустим, что это соотношение справедливо и для $k > 2$. Тогда

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}\mathbf{Y})^{(k+1)} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{X}\mathbf{Y})^{(k)} = \sum_{s=0}^k C_k^s (\mathbf{X}^{(s+1)} \mathbf{Y}^{(k-s)} + \mathbf{X}^{(s)} \mathbf{Y}^{(k-s+1)}) \\ &= \mathbf{X}^{(k+1)} \mathbf{Y} + \sum_{s=0}^k (C_k^s + C_k^{s+1}) \mathbf{X}^{(s+1)} \mathbf{Y}^{(k-s)} + \mathbf{X} \mathbf{Y}^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Однако [2, с. 11], $C_k^s + C_k^{s+1} = C_{k+1}^{s+1}$. Следовательно, формула Лейбница справедлива и для матричного произведения.

Таким образом, подставляя $\mathbf{X}$ вида (12) в (11), получаем

$$\sum_{s=K}^0 \mathbf{A}_s \left[\sum_{r=0}^s C_s^r \mathbf{X}_K^{(r)} \left(\int \mathbf{Y}_1 dt \right)^{(s-r)} \right] = \mathbf{F}. \quad (14)$$

В силу (13) сумма коэффициентов при $\int \mathbf{Y}_1 dt$ в уравнении (14) равна нулю. Это делает его линейным уравнением $(K-1)$ -го порядка относительно $\mathbf{Y}_1$. Складывая коэффициенты при производных общего порядка матрицы $\mathbf{Y}_1$, имеем

$$\sum_{s=K-1}^0 \left(\sum_{r=0}^s C_{K-r}^{K-s} \mathbf{A}_{K-r} \mathbf{X}_K^{(s-r)} \right) \mathbf{Y}_1^{(K-s-1)} = \mathbf{F}. \quad (15)$$

Если ввести обозначения

$$\mathbf{A}_{1,s} \equiv \sum_{r=0}^s C_{K-r}^{K-s} \mathbf{A}_{0,K-r} \mathbf{X}_K^{(s-r)}, \quad \mathbf{A}_{0,s} \equiv \mathbf{A}_s, \quad \mathbf{Y}_0 \equiv \mathbf{X}, \quad (16)$$

то исходное матричное уравнение (11) записывается как

$$\sum_{s=K}^0 \mathbf{A}_{0,s} \mathbf{Y}_0^{(s)} = \mathbf{F}, \quad (17)$$

а его решение – в виде

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{X}_K \int \mathbf{Y}_1 dt, \quad \sum_{s=K}^0 \mathbf{A}_{0,s} \mathbf{X}_K^{(s)} = 0, \quad |\mathbf{X}_K| \neq 0, \quad (18)$$

где $\mathbf{Y}_1$ удовлетворяют неоднородному МЛЛОДУ.К–1

$$\sum_{s=K-1}^0 \mathbf{A}_{1,s} \mathbf{Y}_1^{(s)} = \mathbf{F}. \quad (19)$$

Коэффициенты этого уравнения зависят от параметров исходного матричного уравнения и решения однородного МЛЛОДУ.К (18). Эта зависимость дается формулами (16). Так как (17) и (19) отличаются лишь величиной K и обозначениями матричных коэффициентов, процедуру понижения порядка неоднородного МЛЛОДУ можно повторить. Обозначим, аналогично (18),

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &\equiv \mathbf{X}_{K-1} \int \mathbf{Y}_2 dt, \quad \sum_{s=K-1}^{(s)} \mathbf{A}_{1,s} \mathbf{X}_{K-1}^{(s)} = 0, \\ |\mathbf{X}_{K-1}| &\neq 0, \quad \sum_{s=K-2}^0 \mathbf{A}_{2,s} \mathbf{Y}_2^{(s)} = \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\mathbf{A}_{2,s}$ определяются через $\mathbf{A}_{1,s}$ соотношениями (16). Равенства (20) получаются из формул (18) и (19) заменой $(\mathbf{X}_K, \mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1) \rightarrow (\mathbf{X}_{K-1}, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2)$. При этом, в отличие от уравнения (11), которое имеет единичный коэффициент при старшей производной искомой матрицы, МЛЛОДУ.К– i ($i = 1, 2$) не являются нормальными; коэффициентами при $\mathbf{Y}_i^{(K-i)}$ являются $\mathbf{X}_K$ и $\mathbf{X}_{K-1}$, соответственно.

Таким образом, в процессе редуцирования порядков неоднородных матричных ЛОДУ решение уравнения (11) сводится к решению K однородных МЛЛОДУ.к, $k = 1, \dots, K$ вида (9). Коэффициенты этих уравнений определяются через все коэффициенты и решения однородных уравнений более высоких порядков. Их связывают рекуррентные формулы (10). Последним в этой череде уравнений будет алгебраическое матричное уравнение $\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 \cdots \mathbf{X}_K \mathbf{Y}_K = \mathbf{F}$. В силу невырожденности $\mathbf{X}_k$ выполнено $\mathbf{Y}_K = (\prod_{k=1}^K \mathbf{X}_k)^{-1} \mathbf{F}$. Следовательно,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_K \int \mathbf{X}_{K-1} \cdots \int \mathbf{X}_1 \int \mathbf{X}_K^{-1} \mathbf{X}_{K-1}^{-1} \cdots \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{F} dt \cdots dt, \quad (21)$$

что позволяет записать решение системы (1) в виде любого столбца этой матрицы. Отбрасывая в выбранном столбце его номер, можно представить расписанное по компонентам равенство (21) в виде (8).

Покажем, что решение (8) является общим. Для этого достаточно убедиться в том, что $\mathbf{X}$ вида (21) является общим решением уравнения (11).

Задавая начальные данные уравнения (11) в виде

$$\mathbf{X}^{(q)}(t_0) = \mathbf{R}_q, \quad \dot{\mathbf{R}}_q = 0, \quad q = 0, \dots, K-1,$$

решение (21) можно представить как

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = \mathbf{X}_K \left(\int_{t_0}^t \mathbf{X}_{K-1} \left(\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{X}_{K-2} \cdots \left(\int_{t_0}^{t_{K-2}} \mathbf{X}_1 \left(\int_{t_0}^{t_{K-1}} \mathbf{X}_K^{-1} \mathbf{X}_{K-1}^{-1} \cdots \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{F} dt_K \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \mathbf{Q}_K \right) dt_{K-1} + \mathbf{Q}_{K-1} \right) \cdots \right) dt_2 + \mathbf{Q}_2 \Big) dt_1 + \mathbf{Q}_1 \Big), \quad \dot{\mathbf{Q}}_k = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{R}_0) \implies (\mathbf{X}_K(t_0)\mathbf{Q}_1 = \mathbf{R}_0) \implies (\mathbf{Q}_1 = \mathbf{X}_K^{-1}(t_0)\mathbf{R}_0).$$

Беря производную от $\mathbf{X}$, мы можем наложить условие на $\mathbf{Q}_2$:

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{X}}(t_0) = \mathbf{R}_1) &\implies (\mathbf{X}_K(t_0)\mathbf{Q}_1 + \mathbf{X}_K(t_0)\mathbf{X}_{K-1}(t_0)\mathbf{Q}_2 = \mathbf{R}_1) \\ &\implies (\mathbf{Q}_2 = \mathbf{X}_{K-1}^{-1}(t_0)\mathbf{X}_K^{-1}(t_0)(\mathbf{R}_1 - \dot{\mathbf{X}}(t_0)\mathbf{Q}_1)). \end{aligned}$$

Продолжив этот процесс, мы получаем алгебраическую линейную треугольную матричную систему, из которой легко находятся $\mathbf{Q}_k$.

Таким образом, классический МВП МЛЛОДУ.1 обобщается на случай систем уравнений высших порядков формулой (8). Сформулируем иллюстративное

Следствие. Общим решением систем

$$\ddot{x}_i + A_{i1}^j \dot{x}_j + A_{i0}^j x_j = f_i, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \mathbf{A}_s \equiv (A_{is}^j) \in M_n^0(t), \quad s = 0, \dots, 2, \quad (22)$$

и

$$\ddot{x}_i + A_{i2}^j \ddot{x}_j + A_{i1}^j \dot{x}_j + A_{i0}^j x_j = f_i \quad (23)$$

являются, соответственно,

$$x_i = x_{2i}^j \int x_{1j}^l \int (\mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1^{-1}) l^m f_m dt dt, \quad \mathbf{X}_k \equiv (x_{ki}^j), \quad (24)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_2 + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{X}}_2 + \mathbf{A}_0 \mathbf{X}_2 = 0, \quad \mathbf{X}_2 \dot{\mathbf{X}}_1 + (2\dot{\mathbf{X}}_2 + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_2) \mathbf{X}_1 = 0, \quad |\mathbf{X}_k| \neq 0, \quad (25)$$

и

$$\begin{aligned} x_i = x_{3i}^j \int x_{2j}^l \int x_{1l}^m \int (\mathbf{X}_3^{-1} \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1^{-1}) m^p f_p dt dt dt, \\ \ddot{\mathbf{X}}_3 + \mathbf{A}_2 \ddot{\mathbf{X}}_3 + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{X}}_3 + \mathbf{A}_0 \mathbf{X}_3 = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\mathbf{X}_3 \ddot{\mathbf{X}}_2 + (3\dot{\mathbf{X}}_3 + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_3) \dot{\mathbf{X}}_2 + (3\ddot{\mathbf{X}}_3 + 2\mathbf{A}_2 \dot{\mathbf{X}}_3 + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_3) \mathbf{X}_2 = 0,$$

$$\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_3 \dot{\mathbf{X}}_1 + (2\mathbf{X}_3 \dot{\mathbf{X}}_2 + 3\dot{\mathbf{X}}_3 \mathbf{X}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_3 \mathbf{X}_2) \mathbf{X}_1 = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в теореме 1 $K = 2$, то $q = 0, 1$. Для $q = 0$ $s = 2, 1, 0$, $\mathbf{A}_{0,s} = \mathbf{A}_s$, что и определяет МЛЛОДУ.2 в (25). Для $q = 1$ $s = 1, 0$, а $\mathbf{A}_{1,s}$ определяются формулой (10): $\mathbf{A}_{1,1} = C_2^2 \mathbf{A}_{0,2} \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2$, $\mathbf{A}_{1,0} = \sum_{i=0}^1 C_{2-i}^1 \mathbf{A}_{0,2-i} \mathbf{X}_2^{(1-i)} = 2\dot{\mathbf{X}}_2 + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_2$. Если $K = 3$, то $q = 0, 1, 2$; ($q = 0 \implies (s = 3, \dots, 0)$), что определяет в (26) однородное уравнение 3-го порядка. Для $q = 1$ $s = 2, \dots, 0$, и согласно (10) мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{1,2} &= C_3^3 \mathbf{A}_{0,3} \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_3, & \mathbf{A}_{1,1} &= \sum_{i=0}^1 C_{3-i}^2 \mathbf{X}_3^{(1-i)} = 3\dot{\mathbf{X}}_3 + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_3, \\ \mathbf{A}_{1,0} &= \sum_{i=0}^2 C_{3-i}^1 \mathbf{A}_{0,3-i} \mathbf{X}_3^{(2-i)} = 3\ddot{\mathbf{X}}_3 + 2\mathbf{A}_2 \dot{\mathbf{X}}_3 + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_3. \end{aligned}$$

Эти коэффициенты и стоят при $\mathbf{X}_2^{(s)}$ во втором матричном уравнении (26). Для $q = 2$ $s = 1, 0$, так что согласно (10)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{2,1} &= C_2^2 \mathbf{A}_{1,2} \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_3 \mathbf{X}_2, \\ \mathbf{A}_{2,0} &= \sum_{i=0}^1 C_{2-i}^1 \mathbf{A}_{1,2-i} \mathbf{X}_2^{(1-i)} = 2\mathbf{X}_3 \dot{\mathbf{X}}_2 + (3\dot{\mathbf{X}}_3 + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_3) \mathbf{X}_2. \end{aligned}$$

Это и определяет МЛЛОДУ.1 в (26).

Второй вариант метода вариации постоянных для (1) возникает как обобщение на матричный случай МВП скалярных ЛОДУ высших порядков. Для реализации его необходимо использовать операторы Гаусса, позволяющие решать линейные алгебраические матричные системы [3]. Под левым оператором Гаусса подразумевается линейный оператор $\Gamma(\mathbf{A}_i)$, определенный на последовательности невырожденных матриц $(\mathbf{A}_i)$, $i = 1, \dots, I$, который действует на другую матричную последовательность $(\mathbf{Y}_j)$, $j = 1, \dots, J$, и перемножается по правилам

$$\Gamma(\mathbf{A}_i) \mathbf{Y}_j \equiv \mathbf{Y}_j - \mathbf{A}_j (\mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{Y}_i, \quad (27)$$

$$\Gamma(\mathbf{B}_k) \Gamma(\mathbf{A}_i) \mathbf{Y}_j \equiv \Gamma(\Gamma(\mathbf{A}_i) \mathbf{B}_k) (\Gamma(\mathbf{A}_i) \mathbf{Y}_j). \quad (28)$$

В символах этих операторов решение системы матричных левосторонних линейных уравнений (СМАЛЛУ)

$$\mathbf{A}_i^j \mathbf{X}_j = \mathbf{B}_i: \quad i, j = 1, \dots, K,$$

где, как и выше, по повторяющимся верхним и нижним индексам производится суммирование, дается формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &= \left[\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(\mathbf{A}_k^k) \mathbf{A}_i^i \right]^{-1} \prod_{\tau=K}^{i+1} \Gamma(\mathbf{A}_\tau^\tau) \left[\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(\mathbf{A}_k^k) \mathbf{B}_i \right] \equiv W_i(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \\ \mathbf{A} &\equiv (\mathbf{A}_i^j), \quad \mathbf{B} \equiv (\mathbf{B}_i). \end{aligned} \quad (29)$$

Это соотношение предполагает невырожденность СМАЛЛУ, что определяется условием

$$d(\mathbf{A}) \equiv |\mathcal{D}(\mathbf{A})| \equiv \left| \mathbf{A}_1^1 \prod_{i=2}^{K-1} \left(\prod_{k=i-1}^1 \Gamma(\mathbf{A}_{i-k}^{i-k}) \mathbf{A}_i^i \right) \right| \neq 0. \quad (30)$$

С помощью операторов Гаусса доказывается следующая

ТЕОРЕМА 2. *Общим решением системы (1) является $\text{colon } \mathbf{X}$, где*

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k \mathbf{C}_k, \quad \sum_{s=K}^0 \mathbf{A}_s \mathbf{X}_k^{(s)} = 0, \quad (31)$$

$$\mathbf{C}_1 = - \int \mathbf{X}_1^{-1} \sum_{i=2}^K \mathbf{X}_i \mathbf{C}_i dt, \quad \mathbf{C}_K = \int \left[\prod_{m=1}^{K-1} \Gamma(\mathbf{X}_m^{(m-1)}) \mathbf{X}_K^{(K-1)} \right]^{-1} \mathbf{F} dt, \quad (32)$$

$$\mathbf{C}_l = - \int \left[\prod_{m=1}^{l-1} \Gamma(\mathbf{X}_m^{(m-1)}) \mathbf{X}_l^{(l-1)} \right]^{-1} \sum_{i=l+1}^K \left[\prod_{m=1}^{l-1} \Gamma(\mathbf{X}_m^{(m-1)}) \mathbf{X}_i^{(l-1)} \right] \dot{\mathbf{C}}_i dt,$$

а нумерация $\mathbf{X}_k$ такова, что

$$d(\mathbf{V}) \neq 0, \quad \mathbf{V} \equiv (\mathbf{X}_k^{(q)}), \quad k = 1, \dots, K, \quad q = 0, \dots, K-1. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как решения системы (1) и матричного уравнения (11) связаны соотношением $(x_i) = \text{colon } \mathbf{X}$, достаточно показать, что $\mathbf{X}$ вида (31) является общим решением МЛЛОДУ. Для этого рассмотрим фундаментальную систему решений однородного уравнения (11) $(\mathbf{X}_k)$, т.е. совокупность K решений с такой нумерацией их, при которой выполняется условие (33). Предположим, что $\mathbf{X}$ вида (31) удовлетворяет условиям

$$\mathbf{X}^{(q)} = \sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k^{(q)} \mathbf{C}_k, \quad q = 1, \dots, K-1. \quad (34)$$

Последовательно дифференцируя $\mathbf{X}$ $K-2$ раз, легко убедиться в том, что совокупность этих требований накладывает на $\mathbf{C}_k$ ряд ограничений:

$$\sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k^{(q)} \dot{\mathbf{C}}_k = 0, \quad q = 0, \dots, K-2. \quad (35)$$

Подставим $\mathbf{X}_k$ в (11). Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{s=K}^0 \mathbf{A}_s \mathbf{X}^{(s)} &= \frac{d}{dt} \mathbf{X}^{K-1} + \sum_{s=K-1}^0 \mathbf{A}_s \mathbf{X}^{(s)} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k^{(K-1)} \mathbf{C}_k \right) + \sum_{s=K-1}^0 \mathbf{A}_s \left(\sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k^{(s)} \mathbf{C}_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k^{(K)} \mathbf{C}_k + \sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k^{(K-1)} \dot{\mathbf{C}}_k + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{s=K-1}^0 \mathbf{A}_s \mathbf{X}_k^{(s)} \mathbf{C}_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^K \left(\sum_{s=K}^0 \mathbf{A}_s \mathbf{X}_k^{(s)} \right) \mathbf{C}_k + \sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k^{(K-1)} \dot{\mathbf{C}}_k = \sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k^{(K-1)} \dot{\mathbf{C}}_k = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, на матрицы $\mathbf{C}_k$ накладывается K условий, аналогичных тем, что даются в МВП скалярных ЛОДУ:

$$\sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k^{(q)} \dot{\mathbf{C}}_k = 0, \quad q = 0, \dots, K-2, \quad \sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k^{(K-1)} \dot{\mathbf{C}}_k = \mathbf{F}. \quad (36)$$

Полученная СМАЛЛУ относительно $\dot{\mathbf{C}}_k$ в силу условия (33) является невырожденной. Таким образом, в M_{Kn} существует верхний триангулятор [4] $\mathbf{T}$, т.е. диагональная операторная матрица с элементами $\mathbf{T}_i^i$:

$$\mathbf{T}_1^1 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{T}_i^i = \prod_{k=i-1}^1 \Gamma(\mathbf{X}_k^{(k-1)}), \quad i = 2, \dots, K, \quad (37)$$

который приводит систему (36) к верхнетреугольному виду

$$\begin{aligned} \sum_{k=i}^K \left[\prod_{l=1}^{i-1} \Gamma(\mathbf{X}_l^{(l-1)}) \mathbf{X}_k^{(i-1)} \right] \dot{\mathbf{C}}_k &= 0, \quad i = 2, \dots, K-1, \\ \sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k \dot{\mathbf{C}}_k &= 0, \quad \prod_{l=1}^{K-1} \Gamma(\mathbf{X}_l^{(l-1)}) \mathbf{X}_K^{(K-1)} \dot{\mathbf{C}}_K = \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Если каждое из уравнений этой системы разрешить относительно $\dot{\mathbf{C}}_k$ с наименьшим индексом, что в силу условия (33) допустимо, то

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{C}}_k \equiv \mathbf{S}_k) &\implies \mathbf{S}_l = - \left[\prod_{m=1}^{l-1} \Gamma(\mathbf{X}_m^{(m-1)}) \mathbf{X}_l^{(l-1)} \right]^{-1} \\ &\quad \times \sum_{i=l+1}^K \left[\prod_{m=1}^{l-1} \Gamma(\mathbf{X}_m^{(m-1)}) \mathbf{X}_i^{(l-1)} \right] \mathbf{S}_i, \quad l = 2, \dots, K-1, \\ \mathbf{S}_1 &= -\mathbf{X}_1^{-1} \sum_{i=2}^K \mathbf{X}_i \mathbf{S}_i, \quad \mathbf{S}_K = \left[\prod_{m=1}^{K-1} \Gamma(\mathbf{X}_m^{(m-1)}) \mathbf{X}_K^{(K-1)} \right]^{-1} \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Это и позволяет записать (32).

Убедиться в общности полученного решения можно, записав $\mathbf{C}_k$ в виде

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{J}_k(t) - \mathbf{J}_k(t_0) + \mathbf{Q}_k, \quad \mathbf{J}_k(t) \equiv \int \mathbf{S}_k dt, \quad \dot{\mathbf{Q}}_k = 0.$$

Тогда $\mathbf{X} = \sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k (\mathbf{J}_k(t) - \mathbf{J}_k(t_0) + \mathbf{Q}_k)$, а набор начальных условий $\mathbf{X}^{(q)}(t_0) = \mathbf{R}_q$ ($\dot{\mathbf{R}}_q = 0$) записывается как

$$\sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k^{(q)}(t_0) \mathbf{Q}_k = \mathbf{R}_q - \frac{d^q}{dt^q} \left(\sum_{k=1}^K \mathbf{X}_k \mathbf{J}_k(t) \right) \Big|_{t=t_0}.$$

В силу (33) эта алгебраическая система всегда разрешима.

ЗАМЕЧАНИЕ. Подобно скалярному случаю, введением неизвестных $Y_k \equiv X^{(k-1)}$ МЛЛОДУ.К может быть сведено к системе матричных левосторонних ЛОДУ.1

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \dots \\ \mathbf{Y}_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{E} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 & \dots & -\mathbf{A}_{K-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \dots \\ \mathbf{Y}_K \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Рассматривая $\mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}_{k0}^l \mathbf{V}_l$, где $\mathbf{Y}_{k0}^l$ — K решений однородной системы (38), имеем $\mathbf{Y}_{k0}^l \dot{\mathbf{V}}_l = \mathbf{F}_k$, где $\mathbf{F}_k = 0$, $k = 1, \dots, K-1$, $\mathbf{F}_K = \mathbf{F}$. Так как $\mathbf{Y}_{k0}^l \equiv \mathbf{X}_l^{(k-1)}$, последнюю систему можно записать как

$$\sum_{l=1}^K \mathbf{X}_l^{(k-1)} \dot{\mathbf{V}}_l = \mathbf{F}_K.$$

Если произвести замену $(l, k, V) \rightarrow (k, q, C)$, то система принимает вид (36). Следовательно, дополнительный вариант МВП уравнения (11), следующий из метода вариации эквивалентной ему СМЛЛОДУ.1, совпадает с тем, что дает теорема 2.

Как и в случае теоремы 1, поясним действие и символику теоремы 2

СЛЕДСТВИЕ. *Общими решениями уравнений (22) и (23) являются colon $\mathbf{X}$:*

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= -\mathbf{X}_1 \int \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_2 [\Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_2]^{-1} \mathbf{F} dt + \mathbf{X}_2 \int [\Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_2]^{-1} \mathbf{F} dt, \\ \ddot{\mathbf{X}}_k + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{X}}_k + \mathbf{A}_0 \mathbf{X}_k &= 0, \quad |\mathbf{X}_1 \Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_2| \neq 0, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (39)$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= -\mathbf{X}_1 \int \mathbf{X}_1^{-1} \{ \mathbf{X}_2 [\Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_2]^{-1} [\Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_3] - \mathbf{X}_3 \} [\Gamma(\dot{\mathbf{X}}_2) \Gamma(\mathbf{X}_1) \ddot{\mathbf{X}}_3]^{-1} \mathbf{F} dt \\ &\quad - \mathbf{X}_2 \int [\Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_2]^{-1} [\Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_3] [\Gamma(\dot{\mathbf{X}}_2) \Gamma(\mathbf{X}_1) \ddot{\mathbf{X}}_3]^{-1} \mathbf{F} dt \\ &\quad + \mathbf{X}_3 \int [\Gamma(\dot{\mathbf{X}}_2) \Gamma(\mathbf{X}_1) \ddot{\mathbf{X}}_3]^{-1} \mathbf{F} dt, \\ \ddot{\mathbf{X}}_k + \mathbf{A}_2 \ddot{\mathbf{X}}_k + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{X}}_k + \mathbf{A}_0 \mathbf{X}_k &= 0, \quad k = 1, \dots, 3, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_i &\equiv \dot{\mathbf{X}}_i - \dot{\mathbf{X}}_1 \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \Gamma(\dot{\mathbf{X}}_2) \Gamma(\mathbf{X}_1) \ddot{\mathbf{X}}_3 &\equiv \Gamma(\Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_2) (\Gamma(\mathbf{X}_1) \ddot{\mathbf{X}}_3) \equiv \ddot{\mathbf{X}}_3 - \ddot{\mathbf{X}}_1 \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_3 \\ &\quad - (\ddot{\mathbf{X}}_2 - \ddot{\mathbf{X}}_1 \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_2) (\dot{\mathbf{X}}_2 - \dot{\mathbf{X}}_1 \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} (\dot{\mathbf{X}}_3 - \dot{\mathbf{X}}_1 \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_3). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в теореме 2 положить $K = 2$, то общее решение системы (1), принимающей вид (22), определяется в виде colon $\mathbf{X}$: $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \mathbf{C}_1 + \mathbf{X}_2 \mathbf{C}_2$, где $\ddot{\mathbf{X}}_k + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{X}}_k + \mathbf{A}_0 \mathbf{X}_k = 0$, $|\mathbf{X}_1 \Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_2| \neq 0$, а $\mathbf{C}_k$ определяются соотношениями (32). Первое из этих двух равенств вырождается в $\mathbf{C}_1 = -\int \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_2 \dot{\mathbf{C}}_2 dt$, а второе принимает вид $\mathbf{C}_2 = \int [\Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_2]^{-1} \mathbf{F} dt$. Условие (33) означает невырожденность матриц $\mathbf{X}_1$

и $\Gamma(\mathbf{X}_1)\dot{\mathbf{X}}_2$, что обеспечивает нахождение $\mathbf{C}_k$ в той части $\mathbf{T}$, где это выполняется. Дифференцируя $\mathbf{C}_2$ и подставляя $\dot{\mathbf{C}}_2$ и $\mathbf{C}_k$ в $\mathbf{X}$, получаем (39). При этом формула (27) позволяет записать $\Gamma(\mathbf{X}_1)\dot{\mathbf{X}}_2 = \dot{\mathbf{X}}_2 - \dot{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_1^{-1}\mathbf{X}_2$.

Решение системы (32) теоремы 2 определяет через решения однородных МЛЛОДУ.3 как colon $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{X}_k \mathbf{C}_k, \quad \sum_{s=3}^0 \mathbf{A}_s \mathbf{X}_k^{(s)} = 0, \quad |\mathbf{X}_1 \Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_2 \Gamma(\dot{\mathbf{X}}_2) \Gamma(\mathbf{X}_1) \ddot{\mathbf{X}}_3| \neq 0.$$

При этом формулы (32) расписываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= - \int \mathbf{X}_1^{-1} (\mathbf{X}_2 \dot{\mathbf{C}}_2 + \mathbf{X}_3 \dot{\mathbf{C}}_3) dt, \\ \mathbf{C}_2 &= - \int [\Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_2]^{-1} [\Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_3] \dot{\mathbf{C}}_3 dt, \\ \mathbf{C}_3 &= \int [\Gamma(\dot{\mathbf{X}}_2) \Gamma(\mathbf{X}_1) \ddot{\mathbf{X}}_3]^{-1} \mathbf{F} dt. \end{aligned}$$

Дифференцируя $\mathbf{C}_3$ и подставляя $\dot{\mathbf{C}}_3$ в $\mathbf{C}_2$, имеем правый сомножитель в формуле (40). Если подставить $\dot{\mathbf{C}}_2$ и $\dot{\mathbf{C}}_3$ в $\mathbf{C}_1$, то тождественные преобразования позволяют записать коэффициент $\mathbf{X}_1$ в (40). По определению же (28)

$$\Gamma(\dot{\mathbf{X}}_2) \Gamma(\mathbf{X}_1) \ddot{\mathbf{X}}_3 = \Gamma(\Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_2) (\Gamma(\mathbf{X}_1) \ddot{\mathbf{X}}_3).$$

Если расписать согласно (27) $\Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_2$ и $\Gamma(\mathbf{X}_1) \ddot{\mathbf{X}}_3$ и ввести матричные последовательности $\mathbf{A}_i = \Gamma(\mathbf{X}_1) \dot{\mathbf{X}}_i$ и $\mathbf{B}_i = \Gamma(\mathbf{X}_1) \ddot{\mathbf{X}}_i$, $i = 2, 3$, то определение произведения операторов Гаусса (28) позволяет представить $\Gamma(\dot{\mathbf{X}}_2) \Gamma(\mathbf{X}_1) \ddot{\mathbf{X}}_3$ в указанном виде.

3. Достаточные условия разрешимости в квадратурах систем (1) определяются значительно сложнее, чем в случае отдельных уравнений. Это связано с тем, что к проблемам интегрирования скалярных ЛОДУ.К, обобщаемых системами (1), добавляются специфические проблемы оперирования матричным уравнением (11). Только при очень жестких ограничениях на параметры МЛЛОДУ.К его решение сводится к решению совокупности скалярных уравнений высших порядков. Примером таких ограничений является, очевидно, диагональность матриц $\mathbf{A}_s$. Обобщение этого случая дает

Предложение 3. Если в системе (1) над комплексным полем матрицы $\mathbf{A}_s$ принадлежат разрешимой алгебре Ли, то ее решение сводится к решению однородных ЛОДУ.К

$$\sum_{s=K}^0 a_{is} y_i^{(s)} = 0, \quad a_{is} \in C^0(t). \quad (41)$$

Доказательство. Если все $\mathbf{A}_s$ принадлежат разрешимой L_N ($U_{N-K} = \emptyset$), то согласно теореме Ли [4, с. 62] найдется такая невырожденная матрица $\mathbf{T}$, что преобразование подобия $\mathbf{T}\mathbf{A}_s\mathbf{T}^{-1}$ приводит их одновременно к треугольной форме. Так что, умножая (1) слева на $\mathbf{T}$, мы имеем систему

$$\sum_{s=K}^0 (\mathbf{T}\mathbf{A}_s\mathbf{T}^{-1})_i^j y_j^{(s)} = T_i^j f_j, \quad y_j \equiv T_j^k x_k, \quad \dot{T}_i^j = 0, \quad \mathbf{T} \equiv (T_i^j).$$

Если $(\mathbf{T}\mathbf{A}_s\mathbf{T}^{-1})_i^j = a_{is}$, то полученное равенство эквивалентно системе

$$\sum_{s=K}^0 a_{is} y_i^{(s)} = T_i^j f_j, - \sum_{s=K}^0 (\mathbf{T}\mathbf{A}_s\mathbf{T}^{-1})_i^q y_q,$$

где q , в зависимости от вида треугольности, либо меньше, либо больше i . Таким образом, МВП позволяет решение системы (1) свести к решению совокупности уравнений (41).

Некоммутативность матричного умножения сильно усложняет процедуру интегрирования МЛЛОДУ.К, сводящуюся часто к ряду нерешенных проблем теории матриц. Тем не менее, некоторые методы классической теории ОДУ могут быть обобщены на матричный случай. Это позволяет дать дополнительные условия разрешимости систем (1). Так теорема о факторизуемости МЛЛОДУ.К [5] позволяет сформулировать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если в системе (1) $\mathbf{A}_s = \mathbf{P}_{K,s}$, а матрицы $\mathbf{P}_{k,s}$, $k = 1, \dots, K$, индуктивно определяются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k,k-1} &= \mathbf{B}_k + \mathbf{P}_{k-1,k-2}, & \mathbf{P}_{k,k} &= \mathbf{E}, \\ \mathbf{P}_{k,j} &= \dot{\mathbf{P}}_{k-1,j} + \mathbf{B}_k \mathbf{P}_{k-1,j-1} + \mathbf{P}_{k-1,j-1}, & j &= 1, \dots, K-2, \\ \mathbf{P}_{k,0} &= \dot{\mathbf{P}}_{k-1,0} + \mathbf{B}_k \mathbf{P}_{k-1,0}, & \mathbf{P}_{1,0} &= \mathbf{B}_1, \end{aligned} \quad (42)$$

где $\mathbf{B}_k = b_k^\alpha \mathbf{E}_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, M$, $b_k^\alpha \in \mathbf{C}^k(t)$, $\|\mathbf{B}_k\| < \infty$, а $\mathbf{E}_\alpha$ – постоянные матрицы базиса M -мерного радикала R_M некоторого представления в M_n алгебры Ли L_N , то общим решением системы (1) является $\text{colon } \mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}_K \int \mathbf{Y}_K^{-1} \mathbf{Y}_{K-1} \int \dots \int \mathbf{Y}_2^{-1} \mathbf{Y}_1 \int \mathbf{Y}_1^{-1} \mathbf{F} dt \dots dt, \quad (43)$$

где $\mathbf{Y}_k = \exp(y_k^\alpha \mathbf{E}_\alpha)$: $\mathbf{Y}_k(0) = \mathbf{E}$, а y_k^α находятся в квадратурах из системы

$$\dot{y}_k^\beta = -b_k^\gamma \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (y_k^\alpha C_{\alpha\beta}^\gamma)^n \right]^{-1}, \quad y_k^\alpha(0) = 0. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [6] показано, что матрица X из (43) является решением МЛЛОДУ.К (11) с A_s вида (42). Следовательно, решением системы (1) будет любой столбец этой матрицы. Чтобы убедиться в общности его, запишем (43) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = \mathbf{Y}_K \left(\int_0^t \mathbf{Y}_K^{-1} \mathbf{Y}_{K-1} \left(\int_0^{t_1} \dots \left(\int_0^{t_{K-2}} \mathbf{Y}_2^{-1} \mathbf{Y}_1 \left(\int_0^{t_{K-1}} \mathbf{Y}_1^{-1} \mathbf{F} dt_K \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \mathbf{Q}_1 \right) dt_{K-1} + \mathbf{Q}_2 \right) \dots \right) dt_1 + \mathbf{Q}_K \right). \end{aligned}$$

Тогда равенства $\mathbf{X}^{(q)}(0) = \mathbf{R}_q$: $\dot{\mathbf{R}}_q = 0$ позволяют последовательно явно выражать Q_k через $\mathbf{R}_q$ и $\mathbf{B}_k^{(q)}(0)$. Так $(X(0) = R_0) \implies (R_0 = Q_K)$,

$$\begin{aligned} (\dot{X}(0) = R_1) &\implies (B_K(0)Q_K + Q_{K-1} = R_1) \implies (Q_{K-1} = R_1 - B_K(0)R_0), \\ (\ddot{X}(0) = R_2) &\implies (R_2 = (\dot{B}_K(0) + B_K^2(0))Q_K + B_{K-1}(0)Q_{K-1} + Q_{K-2}) \\ &\implies (Q_{K-2} = R_2 - (\dot{B}_K(0) + B_K^2(0))R_0 - B_{K-1}(0)(R_1 - B_K(0)R_0)) \dots \end{aligned}$$

Следует отметить, что матрицы $\mathbf{Y}_k$ можно находить не только в экспоненциальном, но и в мультипликативно-экспоненциальном виде [6]:

$$\mathbf{Y}_k = \prod_{\alpha=1}^M \exp(g_{k\alpha} \mathbf{E}_\alpha), \quad \mathbf{Y}_k(0) = \mathbf{E},$$

$$\dot{g}_{k\alpha} = -b_k^\beta \left(\prod_{\gamma=1}^{\alpha-1} \exp(g_{k\alpha} C_{\gamma\alpha}^\beta) \right)^{-1}, \quad g_{k\alpha}(0) = 0,$$

которое к ряду случаев легче использовать практически.

Случаи $K = 2, 3$ для МЛЛОДУ.К рассмотрены в [5]. Там же имеется пример.

Более общие, чем в предложении 4, условия разрешимости систем (1) могут быть установлены при рассмотрении МЛЛОДУ.К, эквивалентных триангулируемым системам матричных уравнений [7]. Для получения таких ограничений необходимо использовать формулы решения левосторонних и правосторонних систем алгебраических линейных уравнений. Первые из них имеют вид (29), а вторые решаются с помощью аналогичных формул, содержащих правосторонние операторы Гаусса [3]. Ввиду громоздкости формулирования и записи подобных ограничений, покажем их вид на примере системы второго порядка.

Предложение 5. Если в системе (22) $f_i = 0$, а матрицы $\mathbf{A}_s$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= -(\dot{\mathbf{B}}_1^2 + \mathbf{B}_1^1 \mathbf{B}_1^2 + \mathbf{B}_1^2 \mathbf{B}_2^2)(\mathbf{B}_1^2)^{-1}, \\ \mathbf{A}_0 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^1 - \dot{\mathbf{B}}_1^1 - (\mathbf{B}_1^1)^2 - \mathbf{B}_1^2 \mathbf{B}_2^1, \end{aligned} \quad (45)$$

где $\mathbf{B}_k^p \in M_n^1(t)$, $k, l = 1, 2$, $|\mathbf{B}_1^2| \neq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1^1 &= [(\mathbf{T}_1^1 \mathbf{C}_1^1 + \mathbf{T}_1^2 \mathbf{C}_2^1)(\mathbf{E} + (\mathbf{T}_1^1)^{-1} \mathbf{T}_1^2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{T}_1^1) - \mathbf{T}_1^2 \mathbf{C}_2^2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{T}_2^1](\mathbf{T}_1^1)^{-1}, \\ \mathbf{B}_1^2 &= -(\mathbf{T}_1^1 \mathbf{C}_1^1 + \mathbf{T}_1^2 \mathbf{C}_2^1)(\mathbf{T}_1^1)^{-1} \mathbf{T}_1^2 \mathbf{C}_2^2 \mathbf{H}^{-1}, \\ \mathbf{B}_2^1 &= (\mathbf{T}_2^1 \mathbf{C}_1^1 + \mathbf{T}_2^2 \mathbf{C}_2^1)[\mathbf{E} + (\mathbf{T}_1^1)^{-1} \mathbf{T}_1^2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{T}_2^1](\mathbf{T}_1^1)^{-1} - \mathbf{T}_2^2 \mathbf{C}_2^2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{T}_2^1, \\ \mathbf{B}_2^2 &= -(\mathbf{T}_2^1 \mathbf{C}_1^1 + \mathbf{T}_2^2 \mathbf{C}_2^1)(\mathbf{T}_1^1)^{-1} \mathbf{T}_1^2 \mathbf{H}^{-1} + \mathbf{T}_2^2 \mathbf{C}_2^2 \mathbf{H}^{-1}, \end{aligned} \quad (46)$$

причем $\mathbf{H} = \Gamma(\mathbf{T}_1^1) \mathbf{T}_2^2$, $|\mathbf{H}| \neq 0$, $\mathbf{T}_i^j = 0$, $\mathbf{C}_k^k = \mathbf{C}_k^\alpha \mathbf{E}_\alpha$, а $\mathbf{E}_\alpha$ – базис радикала R_k алгебры Ли L_N над M_n , то решением этой системы является colon $(\mathbf{T}_1^j \mathbf{Y}_j)$: $\mathbf{Y}_1 \equiv \mathbf{Y}_{10} \mathbf{K}_1$, $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_{20} \int \mathbf{Y}_{20}^{-1} \mathbf{C}_2^1 \mathbf{Y}_1 dt$, $\dot{\mathbf{K}}_1 = 0$, $\mathbf{Y}_{k0} = \exp(y_k^\alpha \mathbf{E}_\alpha)$, где y_k^α находятся в квадратурах из системы (44), в которой произведена замена $(b^\alpha) \rightarrow (-c_k^\alpha)$.

Доказательство. Рассмотрим систему однородных МЛЛОДУ.1

$$\dot{\mathbf{X}}_k = \mathbf{B}_k^l \mathbf{X}_l, \quad \mathbf{B}_k^l \in M_n^1(t), \quad k, l = 1, 2, \quad |\mathbf{B}_k^{\bar{k}}| \neq 0, \quad k \neq \bar{k} = 1, 2. \quad (47)$$

Эта система эквивалентна двум матричным уравнениям второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}_k + \mathbf{A}_{1k} \dot{\mathbf{X}}_k - (\mathbf{A}_{1k} \mathbf{B}_k^k + \dot{\mathbf{B}}_k^k + \mathbf{B}_k^l \mathbf{B}_l^k) \mathbf{X}_k &= 0, \\ \mathbf{A}_{1k} &= -(\dot{\mathbf{B}}_k^{\bar{k}} + \mathbf{B}_k^l \mathbf{B}_l^{\bar{k}})(\mathbf{B}_k^{\bar{k}})^{-1}. \end{aligned} \quad (48)$$

При $k = 1$ коэффициенты МЛЛОДУ.2 принимают вид (45). Так что в силу предложения 2, теорем 1 и 2, интегрируемость системы (1) с указанными ограничениями на $\mathbf{A}_s$, обеспечивается разрешимостью системы (47). Однако, если в последней сделать замену $\mathbf{X}_k = \mathbf{T}_k^l \mathbf{Y}_l$, где $d(\mathbf{T}) \neq 0$, $\dot{\mathbf{T}} \equiv (\dot{\mathbf{T}}_k^l) = 0$, $\mathbf{Y}_l$ удовлетворяют матричной системе $\dot{\mathbf{Y}}_l = \mathbf{C}_l^k \mathbf{Y}_k$, в которой $\mathbf{C}_1^1 = 0$, а $\mathbf{C}_k^k$ принадлежат R_k , то $\mathbf{Y}_k$ могут быть найдены в квадратурах. Второе уравнение этой системы, $\dot{\mathbf{Y}}_2 = \mathbf{C}_2^1 \mathbf{Y}_1 + \mathbf{C}_2^2 \mathbf{Y}_2$, имеет решение $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_{20} \int \mathbf{Y}_{20}^{-1} \mathbf{C}_2^1 \mathbf{Y}_1 dt$, в котором $\dot{\mathbf{Y}}_{20} = \mathbf{C}_2^2 \mathbf{Y}_{20}$. Если определить $\mathbf{Y}_{k0}$ в экспоненциальных видах $\mathbf{Y}_{k0} = \exp(y_k^\alpha \mathbf{E}_\alpha)$, то на y_k^α наложатся требования нелинейной системы (44), где функции b^α должны быть заменены на $-c_k^\alpha$ [6]. Для R_K эта система разрешима в квадратурах. Таким образом, интегрируемость системы (47) обеспечивается требованием $\mathbf{V}_k^l \mathbf{T}_l^m = \mathbf{T}_k^l \mathbf{C}_l^m$, вытекающим из (47) после подстановки вместо $\mathbf{X}_k$ матриц $\mathbf{T}_k^l \mathbf{Y}_l$. А так как в (46) записано решение с помощью формул Фробениуса [8, с. 59] последней алгебраической системы, то условия (46) обеспечивают триангуляцию и интегрируемость системы (47).

Следовательно, $\text{colon } \mathbf{X}_1$ является решением однородной системы (22).

Следует, видимо, отметить, что определение $\mathbf{V}_k^l$ с точностью до нумерации позволяет в утверждении предложения 6 рассматривать оба вида МЛЛОДУ.2 (48) и оба вида треугольности матрицы $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_k^l)$.

Примером, иллюстрирующим предложение 5, может служить расписанный по компонентам пример работы [7].

Обобщение этого результата на случай систем более высокого порядка формулируется в символах левосторонних и правосторонних операторов Гаусса [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.
- [2] Риордан Д. Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982.
- [3] Деревенский В. П. Решение систем матричных алгебраических линейных уравнений // Изв. вузов. Матем. 1998. № 10 (437). С. 32–36.
- [4] Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
- [5] Деревенский В. П. Матричные линейные дифференциальные уравнения высших порядков // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 4. С. 711–714.
- [6] Деревенский В. П. Экспоненциальное решение матричных линейных дифференциальных уравнений первого порядка // Изв. вузов. Матем. 1981. № 7. С. 31–33.
- [7] Деревенский В. П. Системы матричных линейных дифференциальных уравнений первого порядка // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 1. С. 63–75.
- [8] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

Казанская государственная архитектурно-строительная академия

Поступило
20.05.2002