Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Антюшина, Н. М. Близняков, Диаграмма Ньютона, нечетные точки и индекс особой точки векторного поля на плоскости, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 6, 803–807

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8600>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:12:22

Диаграмма Ньютона, нечетные точки и индекс особой точки векторного поля на плоскости

И. В. Антюшина, Н. М. Близняков

На основе формулы для вычисления топологического индекса особой точки векторного поля на плоскости по диаграммам Ньютона компонент поля устанавливаются признак равенства индекса нулю и условия нечетности индекса в терминах целых точек диаграмм Ньютона.

Библиография: 8 названий.

Существует много различных условий (в разных терминах), ограничивающих значение топологического индекса особой точки векторного поля (см., например, [1]–[3]), основанных на разных способах вычисления индекса (см., например, [1], [2], [4]–[7]). Укажем условия равенства нулю и нечетности индекса в терминах геометрии целых точек диаграмм Ньютона.

Напомним используемые понятия и обозначения. Под суммой $A+B$ подмножеств A, B линейного пространства далее понимается сумма Минковского $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Носителем $\text{supp } f$ ряда

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^n} a_m x^m, \quad m = (m_1, \dots, m_n), \quad x^m = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n},$$

называется множество $\text{supp } f = \{m \in \mathbb{Z}_+^n : a_m \neq 0\}$; многогранником Ньютона Γ_+ ряда f называется выпуклая оболочка

$$\Gamma_+ = \text{co} \left(\bigcup_{m \in \text{supp } f} (m + \mathbb{R}_+^n) \right);$$

объединение компактных граней многогранника Γ_+ называется диаграммой Ньютона Γ ряда f . Диаграмма Ньютона называется удобной, если она пересекает все координатные оси. Для любой грани $\Delta \in \Gamma$ будем обозначать $f_\Delta(x) = \sum_{m \in \Delta} a_m x^m$. Далее мы будем рассматривать только двумерный случай, здесь возможны только нульмерные и одномерные грани (вершины и ребра соответственно).

Отметим, что для всякого ребра Δ диаграммы Ньютона Γ уравнение прямой, содержащей Δ , можно записать в виде

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = d,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, d \in \mathbb{Z}$ и $\text{НОД}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ (здесь среди чисел α_1, α_2 по крайней мере одно нечетное). Мы будем рассматривать только такие уравнения. Пусть Γ – диаграмма Ньютона некоторого ряда и Δ – некоторое ее ребро. Пусть $\alpha_1^{(\Delta)} y_1 + \alpha_2^{(\Delta)} y_2 = d^{(\Delta)}$ – уравнение прямой, содержащей Δ . Будем говорить, что ребро Δ имеет *тип* $(0/1)$, если $\alpha_1 \equiv 0 \pmod{2}$, $\alpha_2 \equiv 1 \pmod{2}$. Аналогичным образом определим другие типы ребер $(1/0)$ и $(1/1)$. Разобьем множество всех ребер диаграммы Γ на два класса: $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$. К классу $\Gamma^{(1)}$ отнесем всякое ребро диаграммы Γ , имеющее тип $(1/1)$ или $(1/0)$, к классу $\Gamma^{(2)}$ отнесем ребра типа $(0/1)$.

Пусть $F = (F_1, F_2)$ – аналитическое поле в $\mathbb{R}^2$ с особой точкой 0 , диаграммы Ньютона Γ_1, Γ_2 компонент которого удобны. Для всякого ребра Δ диаграммы Ньютона Γ_1 обозначим через $\tilde{\Delta}$ ребро или вершину диаграммы Γ_2 , получаемую пересечением многогранника Ньютона $\Gamma_{2,+}$ с опорной к нему прямой, параллельной ребру Δ . Всюду далее будем считать, что $\alpha_1^{(\Delta)} y_1 + \alpha_2^{(\Delta)} y_2 = d_1^{(\Delta)}$, $\alpha_1^{(\tilde{\Delta})} y_1 + \alpha_2^{(\tilde{\Delta})} y_2 = d_2^{(\tilde{\Delta})}$ – уравнения прямых, содержащих Δ и $\tilde{\Delta}$ соответственно. Поле F назовем *$\mathbb{R}$ -невырожденным*, если для всякого ребра $\Delta \in \Gamma_1^{(1)}$ многочлены $F_{1,\Delta}(1, x_2)$, $F_{2,\tilde{\Delta}}(1, x_2)$ не имеют общих ненулевых вещественных корней и для всякого ребра $\Delta \in \Gamma_1^{(2)}$ многочлены $F_{1,\Delta}(x_1, 1)$, $F_{2,\tilde{\Delta}}(x_1, 1)$ не имеют общих ненулевых вещественных корней.

Будем говорить, что точка целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$ имеет *тип* $(1, 0)$, если ее абсцисса нечетна, а ордината четна. Аналогично определим типы точек $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$. Точку решетки $\mathbb{Z}^2$ с обеими нечетными координатами будем называть *нечетной точкой*.

Существуют разные формулы для вычисления топологического индекса особой точки векторного поля по диаграммам Ньютона компонент поля (см., например, [4], [5], [7]). Воспользуемся формулой, указанной в [4], [5]. Приведем вариант формулы для двумерного случая и установим лемму, необходимые для доказательства основных утверждений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F = (F_1, F_2)$ – аналитическое векторное поле в $\mathbb{R}^2$ с особой точкой 0 и удобными диаграммами Ньютона Γ_1, Γ_2 компонент, являющиеся $\mathbb{R}$ -невырожденным. Тогда 0 – изолированная особая точка поля F и для ее топологического индекса $\text{ind}(F, 0)$ справедлива формула

$$\begin{aligned} \text{ind}(F, 0) = & - \sum_{\Delta \in \Gamma_1^{(1)}} \varkappa_{\Delta} \left(I_{-\infty}^0 \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(1, x_2)}{F_{1,\Delta}(1, x_2)} + I_0^{+\infty} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(1, x_2)}{F_{1,\Delta}(1, x_2)} \right) \\ & + \sum_{\Delta \in \Gamma_1^{(2)}} \varkappa_{\Delta} \left(I_{-\infty}^0 \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(x_1, 1)}{F_{1,\Delta}(x_1, 1)} + I_0^{+\infty} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(x_1, 1)}{F_{1,\Delta}(x_1, 1)} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\varkappa_{\Delta} = \frac{1 + (-1)^{d_1^{(\Delta)} + d_2^{(\tilde{\Delta})} + \alpha_1^{(\Delta)} + \alpha_2^{(\tilde{\Delta})}}}{2}$$

(здесь $I_a^b(f(x)/g(x))$ – индекс Коши вещественной рациональной функции $f(x)/g(x)$ в пределах от a до b , равный разности между числом разрывов $f(x)/g(x)$ с переходом от $-\infty$ к $+\infty$ и числом разрывов с переходом от $+\infty$ к $-\infty$ на интервале (a, b) при изменении аргумента от a к b (см. [8])).

ЛЕММА 1. *Прямая $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = d$ в $\mathbb{R}^2$, где $\alpha_1, \alpha_2, d \in \mathbb{Z}$, $\text{НОД}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, удовлетворяет условию $d + \alpha_1 + \alpha_2 \equiv 1 \pmod{2}$ тогда и только тогда, когда она не содержит нечетных точек.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть прямая не содержит нечетных точек. Предположим противное, $d + \alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0 \pmod{2}$. Так как $\text{НОД}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, то существуют $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = 1$. Тогда в противоречие с условием прямая содержит нечетную точку

$$(p_1(d + \alpha_1 + \alpha_2) - 1, p_2(d + \alpha_1 + \alpha_2) - 1).$$

Обратно. Предположим противное. Пусть

$$\alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^* = d,$$

где (y_1^*, y_2^*) – нечетная точка. Тогда, очевидно, $d + \alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0 \pmod{2}$. Противоречие.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $F = (F_1, F_2)$ – аналитическое векторное поле в $\mathbb{R}^2$ с особой точкой 0 и удобными диаграммами Ньютона Γ_1, Γ_2 компонент, являющиеся $\mathbb{R}$ -невырожденным. Если диаграмма Ньютона Γ ряда $F_1 \cdot F_2$ не содержит нечетных точек, то 0 – изолированная особая точка поля F и $\text{ind}(F, 0) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точка 0 является изолированной особой точкой поля F согласно теореме 1. Пусть $\Delta \in \Gamma_1$, $\hat{\Delta} = \Delta + \tilde{\Delta}$. Очевидно, $\hat{\Delta} \in \Gamma$, поэтому ребро $\hat{\Delta}$ не содержит нечетных точек. Значит, как нетрудно видеть, то же верно и для содержащей его прямой

$$\alpha_1^{(\Delta)} y_1 + \alpha_2^{(\Delta)} y_2 = d_1^{(\Delta)} + d_2^{(\Delta)}.$$

Тогда в силу леммы 1 множитель $\mathfrak{a}_\Delta$ из формулы 1 равен нулю. Теорема доказана.

Утверждение теоремы 2 допускает следующее уточнение.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $F = (F_1, F_2)$ – аналитическое векторное поле в $\mathbb{R}^2$ с особой точкой 0 и удобными диаграммами Ньютона Γ_1, Γ_2 компонент, являющиеся $\mathbb{R}$ -невырожденным. Если диаграмма Ньютона Γ ряда $F_1 \cdot F_2$ не содержит нечетных точек множества $\text{supp } F_1 + \text{supp } F_2$, то 0 – изолированная особая точка поля F и $\text{ind}(F, 0) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 точка 0 является изолированной особой точкой поля F . Пусть $\Delta \in \Gamma_1^{(1)}$ имеет тип $(1/0)$. Тогда если $d_1 + d_2$ четно, то $\mathfrak{a}_\Delta = 0$. Пусть теперь $d_1 + d_2$ нечетно. Заметим, что если вещественная рациональная функция $R(x)$ четна, то $I_{-\infty}^0 R(x) + I_0^{+\infty} R(x) = 0$. Покажем, что в слагаемом в формуле (1), соответствующем ребру Δ , второй множитель равен нулю. Для этого достаточно показать, что функция $F_{2, \tilde{\Delta}}(1, x_2)/F_{1, \Delta}(1, x_2)$ является четной или, другими словами, что все точки множества $(\text{supp } F_1 \cap \Delta) \cup (\text{supp } F_2 \cap \tilde{\Delta})$ имеют ординаты одинаковой четности. Пусть для определенности $d_1 \equiv 1 \pmod{2}$, $d_2 \equiv 0 \pmod{2}$. Тогда согласно лемме 1 прямая $\alpha_1^{(\Delta)} y_1 + \alpha_2^{(\Delta)} y_2 = d_1^{(\Delta)}$ содержит нечетную точку, а $\alpha_1^{(\Delta)} y_1 + \alpha_2^{(\Delta)} y_2 = d_2^{(\Delta)}$ не содержит нечетных точек. Отсюда, учитывая тип ребра Δ , легко видеть, что это ребро содержит точки типов $(1, 1)$ и $(1, 0)$, а $\tilde{\Delta}$ может

содержать точки типов $(0, 0)$ и $(0, 1)$. Пусть

$$A = (A_1, A_2), B = (B_1, B_2) \in \text{supp } F_1 \cap \Delta,$$

$$C = (C_1, C_2), D = (D_1, D_2) \in \text{supp } F_2 \cap \tilde{\Delta}.$$

Точки $A + C$, $B + C$ не являются нечетными, так как принадлежат множеству $\hat{\Delta} \cap (\text{supp } F_1 + \text{supp } F_2)$. Тогда если точка A имеет тип $(1, 1)$, то C имеет тип $(0, 1)$, а $B - (1, 1)$. Если же точка A имеет тип $(1, 0)$, то C имеет тип $(0, 0)$, а $B - (1, 0)$. Таким образом, $A_2 \equiv C_2 \pmod{2}$, $A_2 \equiv B_2 \pmod{2}$. Аналогично, $B_2 \equiv D_2 \pmod{2}$. Подобные выводы можно сделать о ребрах других типов (для типа $(0/1)$ необходимо исследовать абсциссы точек). Теорема доказана.

Отрезок с концами в точках решетки $\mathbb{Z}^2$ назовем *элементарным*, если он не содержит точек из этой решетки кроме своих концов. Легко видеть, что концы любого элементарного отрезка имеют различные типы.

Язык геометрии целых точек позволяет формулировать критерий нечетности индекса.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $F = (F_1, F_2)$ – аналитическое векторное поле в $\mathbb{R}^2$ с особой точкой 0 и удобными диаграммами Ньютона Γ_1, Γ_2 компонент, являющееся $\mathbb{R}$ -невыврожденным. Пусть Λ – множество точек плоскости, принадлежащих тем ребрам диаграммы Γ_1 , каждое из которых параллельно какому-либо ребру диаграммы Ньютона Γ ряда $F_1 \cdot F_2$, содержащему нечетную точку. Если N – число точек решетки $\mathbb{Z}^2$, принадлежащих множеству Λ , а K – число связных компонент этого множества, то 0 – изолированная особая точка поля F и $\text{ind}(F, 0) \equiv N - K \pmod{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1 точка 0 является изолированной особой точкой поля F . Обозначим через Γ_0 объединение ребер диаграммы Γ_1 , для каждого из которых соответствующее ребро $\hat{\Delta} = (\Delta + \tilde{\Delta}) \in \Gamma$ содержит нечетную точку. Как и в теореме 2, если $\Delta \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, то $\mathfrak{a}_\Delta = 0$, а если $\Delta \in \Gamma_0$, то $\mathfrak{a}_\Delta = 1$. Таким образом, индекс $\text{ind}(F, 0)$ будет нечетным тогда и только тогда, когда множество Γ_0 содержит нечетное число таких ребер, что для каждого из них соответствующая сумма индексов Коши нечетна. В процессе подсчета суммы индексов Коши, соответствующей какому-либо ребру $\Delta \in \Gamma_0$, суммируются числа $0, 1, -1$. Значит, эта сумма четна (нечетна), если четно (нечетно) общее количество чисел 1 и -1 , складываемых при ее подсчете. Если $\Delta \in \Gamma_1^{(1)} \cap \Gamma_0$, то это количество четно (нечетно), если число ν_Δ ненулевых вещественных корней многочлена $F_{1,\Delta}(1, x_2)$ с учетом их кратностей четно (нечетно). Для ребра из $\Gamma_1^{(1)} \cap \Gamma_0$ четность соответствующего числа ν_Δ совпадает с четностью длины проекции ребра Δ на ось ординат, а эта длина четна (нечетна), если ребро Δ состоит из четного (нечетного) числа элементарных отрезков. Аналогичные выводы можно сделать о ребре $\Delta \in \Gamma_1^{(2)} \cap \Gamma_0$. Таким образом, индекс $\text{ind}(F, 0)$ нечетен, если и только если множество Γ_0 содержит нечетное количество таких ребер, каждое из которых состоит из нечетного числа элементарных отрезков, или, другими словами, если и только если Γ_0 содержит нечетное число элементарных отрезков. Отсюда следует заключение теоремы, потому что в каждой связной компоненте множества Λ число элементарных отрезков равно числу целых точек этой компоненты, уменьшенному на 1.

С помощью теоремы 4 можно доказать следующий признак нечетности индекса только в терминах нечетных точек.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $F = (F_1, F_2)$ – аналитическое векторное поле в $\mathbb{R}^2$ с особой точкой 0 и удобными диаграммами Ньютона Γ_1, Γ_2 компонент, являющиеся $\mathbb{R}$ -невырожденным. Если каждое ребро диаграммы Ньютона Γ ряда $F_1 \cdot F_2$ содержит нечетную точку, а диаграммы Γ_1, Γ_2 не содержат нечетных точек, то 0 – изолированная особая точка поля F и $\text{ind}(F, 0) \equiv 1 \pmod{2}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа, Нелинейный анализ и его приложения*, Наука, М., 1975.
- [2] М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволоцкий, П. П. Забрейко, *Векторные поля на плоскости*, Физматгиз, М., 1963.
- [3] Н. М. Близняков, “Оценки топологических индексов”, *Геометрия и теория особенностей в нелинейных уравнениях*, Новое в глобальном анализе, Изд-во Воронежск. ун-та, Воронеж, 1987, 9–23; N. M. Bliznyakov, “Topological index estimates”, *Global Analysis – Studies and Applications III*, Lecture Notes in Math., **1334**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 180–198.
- [4] Н. М. Близняков, “К задаче вычисления индекса особой точки векторного поля в $\mathbb{R}^n$ ”, Совместные заседания семинара имени И. Г. Петровского и Московского математического общества, *УМН*, **38**:5 (1983), 143.
- [5] Н. М. Близняков, “Индексы Коши и индекс особой точки векторного поля”, *Применение топологии в современном анализе*, Новое в глобальном анализе, Изд-во Воронежск. ун-та, Воронеж, 1987, 3–21; N. M. Bliznyakov, “Cauchy indices and the index of a singular point of a vector field”, *Global Analysis – Studies and Applications II*, Lecture Notes in Math., **1214**, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 1–20.
- [6] Г. Н. Химшиашвили, “О локальной степени гладкого отображения”, *Сообщ. АН ГрузССР*, **85**:2 (1977), 309–312.
- [7] А. И. Эстеров, “Индекс вещественной особой точки и ее диаграмма Ньютона”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2003, № 1, 8–12.
- [8] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.

И. В. Антюшина

Воронежский государственный университет
E-mail: iamveryok@mail.ru

Поступило

17.11.2009

Н. М. Близняков

Воронежский государственный университет
E-mail: nmbliznyakov@yandex.ru