Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Нерсесян, Письмо в редакцию, *Матем. заметки*,
2012, том 91, выпуск 5, 799–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8601>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:27:55

Письмо в редакцию

А. Б. Нерсесян

В работе [1] рассматривается следующее уравнение:

$$\frac{d\phi(x)}{dx} - q(x)\phi(x) + \lambda(x) \int_0^\infty K(x, t)\phi(t) dt + g(x) = 0, \quad x > 0. \quad (1)$$

Изучается начальная задача типа Коши $\phi(0) = \rho > 0$ (см. в работе (2), (10), (11) и (40)). При условиях

$$0 \leq \lambda, \quad q \in L_\infty(0, \infty), \quad 0 \leq g \in L_1(0, \infty), \quad K \geq 0, \quad \sup_{t \in (0, \infty)} \int_0^\infty K(x, t) dx = 1$$

решение ϕ ищется в пространстве W_1^1 (т.е. $\phi, \phi' \in L_1(0, \infty)$).

Легко заметить, что эта задача сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$\phi(x) = e^{Q(x)} \left(\rho - \int_0^\infty K_1(x, t)\phi(t) dt - \int_0^x e^{-Q(t)} g(t) dt \right), \quad (2)$$

где

$$Q(x) = \int_0^x q(t) dt, \quad K_1(x, t) = \int_0^x e^{-Q(s)} \lambda(s) K(s, t) ds.$$

В качестве основных в работе выделены (см. с. 934 и 938) два результата. Первый из них (теорема) гласит, что если в указанных выше условиях найдется число $\alpha > 0$, при котором справедливо неравенство

$$\sup_{t \in (0, \infty)} \int_0^\infty \lambda(x) K(x, t) dx + \sup_{t \in (0, \infty)} (\alpha - q(t))(1 - e^{-\alpha t}) < \alpha, \quad (3)$$

то существует положительное решение $\phi(x) > 0$ задачи.

Однако в приведенной формулировке эта теорема неверна. Действительно, из (2) немедленно следует, что для существования $0 < \phi(x) \in L_1(0, \infty)$ необходимо, чтобы было

$$\rho \geq \int_0^\infty e^{-Q(t)} g(t) dt. \quad (4)$$

Как видим, величина ρ не может задаваться произвольно, независимо от остальных параметров задачи. Нетрудно видеть, что и без требования положительности решения постановка начальной задачи для уравнения (1) в W_1^1 некорректна. Для этого достаточно рассмотреть простейший случай $\lambda \equiv 0$, $q = \text{const} > 0$.

Далее, второй основной результат работы, сформулированный как предложение, содержит ту же некорректную постановку (см. также формулы (10) и (41) работы). Кроме того, его доказательство основано и на другой ошибочной предпосылке. Именно, использовано утверждение (лемма 2), что для любого $\beta > 0$ существует следующая операторная факторизация в W_1^1 :

$$\mathcal{D} - \mathcal{Q} + \Lambda \mathcal{K} = (I + \mathcal{W}_\beta)(\mathcal{D} + \beta I), \quad (5)$$

где I – единичный оператор, $\mathcal{D}$ – оператор дифференцирования, $\mathcal{K}$ – интегральный оператор с ядром K , а $\mathcal{Q}$ и Λ – соответственно операторы умножения на $q(x)$ и $\lambda(x)$. Здесь $\mathcal{W}_\beta$ – ограниченный в $L_1(0, \infty)$, интегральный оператор (см. формулы (8) и (9) работы). Его конкретный вид в данном случае несущественен.

Однако факторизация неверна, ибо приводит к противоречию, если ее применить, например, к функции $f = e^{-\beta x} \in W_1^1$ и учесть, что $(\mathcal{D} + \beta I)f \equiv 0$.

Наконец, отметим, что в упомянутом выше предложении автор подчеркивает (см. также аннотацию к работе), что ему удастся описать структуры решения $\phi \in W_1^1$ задачи. Основанием для этого является утверждение, что существуют $\beta > 0$ и $F \in L_1(0, \infty)$, для которых справедливо следующее представление решения (формула (10) работы):

$$\phi(x) = \phi(0)e^{-\beta x} + \int_0^x e^{-\beta(x-t)} F(t) dt, \quad x > 0.$$

Однако здесь нет абсолютно никакой дополнительной информации о решении рассматриваемой задачи, ибо данное представление не что иное, как формула Ньютона–Лейбница для произведения $e^{\beta x} \phi(x)$.

Сказанное не касается пункта 3 работы, результаты которого, по сути, не имеют отношения к теореме и предложению, приведенным выше.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] [X. А. Хачатрян](#), *Матем. заметки*, **83:6** (2008), 933–940.

А. Б. Нерсисян

Институт математики НАН Армении

E-mail: nerses@instmath.sci.am

Поступило

23.01.2009