Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Митричева, О хроматическом числе для одной серии метрических пространств, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 422–431

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8602>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:15:16

О хроматическом числе для одной серии метрических пространств

И. М. Митричева

В статье речь идет о задаче отыскания хроматического числа метрического пространства с одним запрещенным расстоянием. При помощи линейно-алгебраического метода в комбинаторике и методов выпуклой оптимизации получена серия новых оценок, прослеживается изменение асимптотической нижней оценки хроматического числа евклидова пространства при непрерывном изменении метрики от l_1 до l_2 .

Библиография: 23 названия.

1. Введение. В настоящей статье речь пойдет об одном обобщении задачи о хроматическом числе, возникшей на рубеже 40-х и 50-х гг. и в разное время изучавшейся Нелсоном, Хадвигером, Эрдешем и др. (см., например, [1]–[7]).

Пусть дано метрическое пространство $(\mathbf{X}, \rho)$ и некоторое действительное положительное a . Тогда *хроматическим числом* пространства $(\mathbf{X}, \rho)$ с *запрещенным расстоянием* a называется величина $\chi((\mathbf{X}, \rho), a)$, равная минимальному количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки пространства $\mathbf{X}$, что никакие две точки, находящиеся друг от друга на расстоянии a , не получают одинаковых цветов.

Изначально задача ставилась для вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$, однако в середине 70-х годов появилась работа [8] Бенды и Перлеса, в которой рассматривалось главным образом рациональное пространство $\mathbb{Q}^n$ с евклидовым расстоянием в нем.

В дальнейшем мы будем рассматривать пространства $(\mathbb{R}^n, l_q)$, где $q \in [1, \infty]$, а для любых точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ расстояние между ними определяется как

$$l_q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt[q]{|x_1 - y_1|^q + \dots + |x_n - y_n|^q}, \quad q < \infty, \\ l_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|.$$

2. Известные результаты. К настоящему моменту известны следующие результаты:

$$(1.239 + o(1))^n \leq \chi((\mathbb{R}^n, l_2), a) \leq (3 + o(1))^n, \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00294).

$$(1.365 + o(1))^n \leq \chi((\mathbb{R}^n, l_1), a) \leq (5 + o(1))^n, \quad (2)$$

$$(1.207 + o(1))^n \leq \chi((\mathbb{R}^n, l_q), a) \leq (5 + o(1))^n, \quad q \in [1, \infty). \quad (3)$$

Нижние оценки в (1) и (2) принадлежат Райгородскому (см. [1], [9]–[11]), верхняя оценка в (1) была получена Ларманом и Роджерсом (см. [12]). Верхняя оценка в (2) непосредственно следует из второго неравенства в (3), полученного в работе [13] Канг и Фюреди. Нижняя оценка в (3) была фактически получена в [14] Франклом и Уилсоном.

Несложно также показать справедливость равенства

$$\chi((\mathbb{R}^n, l_\infty), a) = 2^n, \quad (4)$$

где a – любое вещественное число.

Подробнее с историей задачи можно ознакомиться по работам [1]–[7].

Дальнейший план статьи таков. В третьем разделе мы предложим серию метрик, которые в определенном смысле являются промежуточными для метрик l_1 и l_2 , в четвертом – опишем метод решения задачи об асимптотической нижней оценке хроматического числа пространства $\mathbb{R}^n$ с данными метриками, в пятом разделе мы сведем задачу об указанной асимптотической нижней оценке к выпуклой задаче оптимизации, в шестом разделе мы решим эту задачу, а в последнем разделе опишем численную реализацию алгоритма и полученные результаты.

3. Метрика ρ_t . Из предыдущего раздела видно, что константы в известных на сегодняшний момент нижних оценках хроматического числа достаточно хаотично зависят от q . А именно, даже если не брать в расчет $q = \infty$, мы имеем два выделенных значения – $q = 1$ и $q = 2$, – при которых упомянутые константы оказываются существенно больше своих аналогов при всех остальных значениях q . Разумеется, это связано со спецификой метода, при помощи которого были получены все эти константы. Желая как можно глубже понять суть метода, мы проследим в настоящей работе то, как меняется константа в основании экспоненты при своеобразном постепенном переходе от метрики l_1 к метрике l_2 . Для этого нам потребуется величина

$$\rho_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_t - y_t)^2 + |x_{t+1} - y_{t+1}| + \dots + |x_n - y_n|}.$$

Здесь t может принимать любое целое значение от 0 до n . Легко видеть, что при $t = 0$ данная величина совпадает с корнем из метрики l_1 , а при $t = n$ – с метрикой l_2 .

Несложно убедиться, что функция $\rho_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является метрикой при каждом допустимом значении t . Неотрицательность, равенство нулю расстояния между совпадающими точками и симметрия очевидны. Неравенство треугольника проверяется непосредственно.

Заметим также, что при $t < n$ указанная метрика не порождает нормы, так как для нее не выполняется свойство однородности.

В настоящей работе мы получим нижние оценки для $\chi((\mathbb{R}^n, \rho_t), a)$. В данном случае (впрочем, как и во всех предыдущих) значение хроматического числа не зависит от величины запрещенного расстояния a , так как любую раскраску, соответствующую запрещенному расстоянию a_1 , можно превратить в раскраску для запрещенного расстояния a_2 масштабированием первых t координатных осей в a_2/a_1 раз,

а остальных осей – в $(a_2/a_1)^2$ раз. Поэтому мы можем далее писать $\chi(\mathbb{R}^n, \rho_t)$ вместо $\chi((\mathbb{R}^n, \rho_t), a)$.

4. Описание метода решения задачи и основная лемма. Для дальнейшей работы нам потребуется определение хроматического числа метрического пространства в терминах теории графов (см. [15]). Пусть фиксирована некоторая размерность n и запрещенное расстояние a . Определим бесконечный геометрический граф, соответствующий выбранным n и a , следующим образом:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, a) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}),$$

где

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{E} = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}, \rho_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a\},$$

т.е. $\mathcal{G}$ – граф, множество вершин которого совпадает с множеством всех точек $\mathbb{R}^n$, а ребрами соединены те пары вершин, для которых соответствующие точки пространства находятся на расстоянии a друг от друга. Хроматическое число пространства $(\mathbb{R}^n, \rho_t)$ с запрещенным расстоянием a есть обычное хроматическое число графа $\mathcal{G}$.

Нетрудно показать, что хроматическое число графа $\mathcal{G}$ конечно. По теореме Эрдеша–де Брёйна (см. [16]), если хроматическое число графа конечно, то существует его конечный подграф, на котором оно достигается, поэтому при отыскании хроматических чисел интересующих нас метрических пространств полезно иметь дело с *конечными геометрическими графами*, являющимися, по определению, конечными подграфами соответствующих (бесконечных) геометрических графов $\mathcal{G}$.

Построим семейство $\mathbf{G}_{\text{dist}}$ конечных геометрических графов в $(\mathbb{R}^n, \rho_t)$, а затем получим с помощью них оценку хроматического числа:

$$\chi(\mathbb{R}^n, \rho_t) \geq \max_{G \in \mathbf{G}_{\text{dist}}} \chi(G).$$

Пусть a_1, a_2, b_1, b_2 – произвольные неотрицательные целые числа, удовлетворяющие свойствам $a_1 + b_1 \leq t, a_2 + b_2 \leq n - t$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} V &= V(a_1, a_2, b_1, b_2; n, t) \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, |\{i \leq t : x_i = 1\}| = a_1, \\ &\quad |\{i \leq t : x_i = -1\}| = b_1, |\{i > t : x_i = 1\}| = a_2, |\{i > t : x_i = -1\}| = b_2\}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\bar{s} = \bar{s}(a_1, a_2, b_1, b_2; n, t) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V} \rho_t^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Пусть $p = p(a_1, a_2, b_1, b_2; n, t)$ – минимальное простое число, удовлетворяющее условию $\bar{s} - 4p < 0$. Положим

$$\begin{aligned} E &= E(a_1, a_2, b_1, b_2; n, t) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \rho_t^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2p\}, \\ \mathbf{G}_{\text{dist}} &= \{G(a_1, a_2, b_1, b_2; n, t)\} = \{(V(a_1, a_2, b_1, b_2; n, t), E(a_1, a_2, b_1, b_2; n, t))\}. \end{aligned}$$

Заметим, что для любого конечного графа $G = (V, E)$ справедливо неравенство $\chi(G) \geq |V|/\alpha(G)$, где $\alpha(G)$ – *число независимости* графа G , т.е. размер его максимального индуцированного пустого подграфа:

$$\alpha(G) = \max\{|W| : W \subseteq V, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \notin E \text{ для всех } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W\}.$$

Данная оценка асимптотически точна для “почти всякого” графа, так как согласно [17], [18] для “почти всякого” графа на n вершинах величины $\chi(G)$ и $|V|/\alpha(G)$ асимптотически близки друг к другу.

В работе [19] сформулирована и доказана следующая

ЛЕММА 1. *При любых допустимых значениях параметров a_1, a_2, b_1, b_2, n, t имеет место оценка*

$$\alpha(G) \leq \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4 \in S_k} C_t^{s_1} C_{t-s_1}^{s_2} C_{n-t}^{s_3} C_{n-t-s_3}^{s_4},$$

где множество S_k задается системой

$$\begin{cases} s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{N}, \\ s_1 + s_2 \leq \min\{t, k\}, \\ s_3 + s_4 \leq \min\{n-t, p-1-k\}, \\ 2s_1 + s_2 \leq k. \end{cases}$$

Зная, что $|V| = C_t^{a_1} C_{t-a_1}^{b_1} C_{n-t}^{a_2} C_{n-t-a_2}^{b_2}$, с помощью леммы получаем оценку

$$\chi(G) \geq \frac{C_t^{a_1} C_{t-a_1}^{b_1} C_{n-t}^{a_2} C_{n-t-a_2}^{b_2}}{\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4 \in S_k} C_t^{s_1} C_{t-s_1}^{s_2} C_{n-t}^{s_3} C_{n-t-s_3}^{s_4}}.$$

Отсюда непосредственно следует оценка хроматического числа пространства:

$$\chi(\mathbb{R}^n, \rho_t) \geq \max_{a_1, a_2, b_1, b_2} \frac{C_t^{a_1} C_{t-a_1}^{b_1} C_{n-t}^{a_2} C_{n-t-a_2}^{b_2}}{\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4 \in S_k} C_t^{s_1} C_{t-s_1}^{s_2} C_{n-t}^{s_3} C_{n-t-s_3}^{s_4}}. \quad (5)$$

5. Формулировка экстремальной задачи. В предыдущем разделе содержится нижняя оценка хроматического числа метрического пространства $(\mathbb{R}^n, \rho_t)$, полученная с помощью конечных геометрических графов. Для простоты можно положить $t = [t^0 n]$, $t^0 \in [0, 1]$. При $t^0 = 0$ задача сводится к задаче о хроматическом числе $\chi((\mathbb{R}^n, l_1), a)$, при $t^0 = 1$ – к задаче о числе $\chi((\mathbb{R}^n, l_2), a)$. В дальнейшем мы будем рассматривать $t^0 \in (0, 1)$. Пусть $a_1^0, a_2^0, b_1^0, b_2^0$ – числа из интервала $(0, 1)$, удовлетворяющие следующей системе ограничений:

$$a_1^0 + b_1^0 \leq \frac{t^0}{2}, \quad b_1^0 \leq a_1^0, \quad a_2^0 + b_2^0 \leq \frac{1-t^0}{2}, \quad b_2^0 \leq a_2^0.$$

Пусть также $a_1 = [a_1^0 n]$, $b_1 = [b_1^0 n]$, $a_2 = [a_2^0 n]$, $b_2 = [b_2^0 n]$. Тогда легко показать, что

$$\bar{s} = 2a_1 + 6b_1 + 2a_2 + 2b_2 \sim (2a_1^0 + 6b_1^0 + 2a_2^0 + 2b_2^0)n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Согласно известной теореме аналитической теории чисел (см. [20; гл. 9]), для любого достаточно большого x между x и $x + O(x^\alpha)$, где $\alpha < 1$, всегда существует простое число, поэтому в нашем случае мы всегда можем выбрать p таким образом, что $4p > \bar{s}n$, $p \sim p^0 n$, где

$$p^0 = \frac{2a_1^0 + 6b_1^0 + 2a_2^0 + 2b_2^0}{4} = \frac{a_1^0 + 3b_1^0 + a_2^0 + b_2^0}{2}.$$

Расписав по формуле Стирлинга биномиальные коэффициенты числителя правой части неравенства (5), получим

$$C_t^{a_1} C_{t-a_1}^{b_1} C_{n-t}^{a_2} C_{n-t-a_2}^{b_2} = (\gamma_1 + o(1))^n,$$

где

$$\gamma_1 = \frac{(t^0)^{t^0} (1-t^0)^{1-t^0}}{(a_1^0)^{a_1^0} (b_1^0)^{b_1^0} (t^0 - a_1^0 - b_1^0)^{t^0 - a_1^0 - b_1^0} (a_2^0)^{a_2^0} (b_2^0)^{b_2^0} (1-t^0 - a_2^0 - b_2^0)^{1-t^0 - a_2^0 - b_2^0}}.$$

Аналогично, положив $s_1^0 = s_1/n$, $s_2^0 = s_2/n$, $s_3^0 = s_3/n$, $s_4^0 = s_4/n$, получим

$$C_t^{s_1} C_{t-s_1}^{s_2} C_{n-t}^{s_3} C_{n-t-s_3}^{s_4} = (\gamma_2 + o(1))^n,$$

$$\gamma_2 = \frac{(t^0)^{t^0} (1-t^0)^{1-t^0}}{(s_1^0)^{s_1^0} (s_2^0)^{s_2^0} (s_3^0)^{s_3^0} (s_4^0)^{s_4^0} (t^0 - s_1^0 - s_2^0)^{t^0 - s_1^0 - s_2^0} (1-t^0 - s_3^0 - s_4^0)^{1-t^0 - s_3^0 - s_4^0}}.$$

Рассуждения, аналогичные проделанным в [3] и [21], приводят к асимптотике

$$\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4 \in S_k} C_t^{s_1} C_{t-s_1}^{s_2} C_{n-t}^{s_3} C_{n-t-s_3}^{s_4} = (\gamma_3 + o(1))^n,$$

где

$$\gamma_3 = \gamma_3(t^0; a_1^0, a_2^0, b_1^0, b_2^0) = \max_{k \in \{0, 1, \dots, p-1\}, \{s_i\} \in S_k} \gamma_2(t^0, \{s_i^0\}).$$

Зависимость величины γ_3 от параметров a_1^0 , b_1^0 , a_2^0 , b_2^0 обусловлена зависимостью от них величины p^0 .

Таким образом, верна оценка

$$\chi(\mathbb{R}^n, \rho_t) \geq (\gamma_4 + o(1))^n,$$

где

$$\gamma_4 = \max_{a_1^0, a_2^0, b_1^0, b_2^0} \frac{\gamma_1(t^0; a_1^0, a_2^0, b_1^0, b_2^0)}{\max_{k \in \{0, 1, \dots, p-1\}, \{s_i\} \in S_k} \gamma_2(t^0, \{s_i^0\})}.$$

Зафиксируем некоторые t^0 , a_1^0 , a_2^0 , b_1^0 , b_2^0 и будем работать со внутренним максимумом, стремясь найти его аналитически. Затем, уже численно, мы найдем внешний максимум. Положим $s_5^0 = t^0 - s_1^0 - s_2^0$, $s_6^0 = 1 - t^0 - s_3^0 - s_4^0$, $k^0 = k/n$. С учетом всего вышесказанного получаем, что задача отыскания максимума знаменателя эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^6 s_i^0 \ln s_i^0 \rightarrow \min, \\ 0 \leq k^0 \leq p^0, \\ s_i^0 \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4, \\ s_1^0 + s_2^0 \leq t^0, \\ s_3^0 + s_4^0 \leq 1 - t^0, \\ s_3^0 + s_4^0 \leq p^0 - k^0, \\ 2s_1^0 + s_2^0 \leq k^0, \\ s_5^0 = t^0 - s_1^0 - s_2^0, \\ s_6^0 = 1 - t^0 - s_3^0 - s_4^0. \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что условия на k^0 можно убрать из системы, так как они автоматически следуют из двух последних неравенств системы и неотрицательности величин s_1^0 , s_2^0 , s_3^0 и s_4^0 . Неравенства

$$s_1^0 + s_2^0 \leq t^0, \quad s_3^0 + s_4^0 \leq 1 - t^0$$

с учетом двух последних равенств системы можно заменить эквивалентными им более простыми в записи неравенствами

$$s_5^0 \geq 0, \quad s_6^0 \geq 0.$$

Согласно лемме 1 из статьи [22] минимум не может достигаться на границе области, поэтому можно считать все величины s_i^0 строго положительными, а значит, соответствующие условия $s_i^0 \geq 0$ можно исключить.

Таким образом, решаемая нами задача эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^6 s_i^0 \ln s_i^0 \rightarrow \min, \\ s_3^0 + s_4^0 - p^0 + k^0 \leq 0, \\ 2s_1^0 + s_2^0 - k^0 \leq 0, \\ s_5^0 - t^0 + s_1^0 + s_2^0 = 0, \\ s_6^0 - 1 + t^0 + s_3^0 + s_4^0 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Мы будем решать задачу (7) с помощью теоремы Каруша–Куна–Таккера (см., например, [23; гл. 3]).

6. Решение экстремальной задачи. Выпишем функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \lambda_0 \left(\sum_{i=1}^6 s_i^0 \ln s_i^0 \right) + \lambda_1 (s_3^0 + s_4^0 - p^0 + k^0) + \lambda_2 (2s_1^0 + s_2^0 - k^0) \\ & + \lambda_3 (s_5^0 - t^0 + s_1^0 + s_2^0) + \lambda_4 (s_6^0 - 1 + t^0 + s_3^0 + s_4^0). \end{aligned}$$

Приравняв к нулю ее производные по $s_1^0, \dots, s_6^0, k^0$, вместе с уравнениями нежесткости получаем систему

$$\begin{cases} \lambda_1 (s_3^0 + s_4^0 - p^0 + k^0) = 0, \\ \lambda_2 (2s_1^0 + s_2^0 - k^0) = 0, \\ \lambda_0 (1 + \ln s_1^0) + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_0 (1 + \ln s_2^0) + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_0 (1 + \ln s_3^0) + \lambda_1 + \lambda_4 = 0, \\ \lambda_0 (1 + \ln s_4^0) + \lambda_1 + \lambda_4 = 0, \\ \lambda_0 (1 + \ln s_5^0) + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_0 (1 + \ln s_6^0) + \lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Если предположить, что $\lambda_0 = 0$, то мы сразу же получим равенство нулю всех остальных λ_i . Следовательно, можно считать, что $\lambda_0 \neq 0$, а так как мы решаем задачу минимизации, т.е. этот коэффициент должен быть неотрицательным, то можно

положить $\lambda_0 = 1$. С учетом этого замечания эквивалентными преобразованиями система сводится к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1^0 s_5^0 = s_2^{0^2}, \\ s_3^0 = s_4^0, \\ (s_1^0 - s_2^0)(2s_1^0 - p^0 + k^0) = 0, \\ (s_1^0 - s_2^0)(2s_1^0 + s_2^0 - k^0) = 0, \\ s_2^0 s_3^0 = s_1^0 s_6^0, \\ s_1^0 + s_2^0 + s_5^0 = t^0, \\ s_3^0 + s_4^0 + s_6^0 = 1 - t^0, \\ \lambda_1 = \ln s_2^0 - \ln s_1^0, \\ \lambda_2 = \lambda_1, \\ \lambda_3 = -1 - \ln s_5^0, \\ \lambda_4 = -1 - \ln s_6^0. \end{array} \right. \quad (9)$$

Таким образом, если искомый минимум существует, то он удовлетворяет данной системе. С другой стороны, согласно теореме Каруша–Куна–Таккера, если существует набор $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_4\}$, для которого выполняются все три приведенные ниже условия, и при этом $\lambda_0 > 0$, то соответствующий набор $(s_1^0, s_2^0, s_3^0, s_4^0, s_5^0, s_6^0, k^0)$ представляет собой точку абсолютного минимума:

- 1) $\mathcal{L}_s = 0$;
- 2) $\lambda_i \geq 0$ (в неравенствах);
- 3) $\lambda_i f_i = 0$ (в неравенствах).

Условие неотрицательности λ_0 , условие 1) и условие 3) в данной системе выполняются автоматически. Следовательно, для каждого решения системы остается проверить только неотрицательность λ_1 и λ_2 .

Поскольку $\lambda_0 > 0$, согласно теореме Каруша–Куна–Таккера любой набор чисел $(s_1^0, s_2^0, s_3^0, s_4^0, s_5^0, s_6^0, k^0)$, удовлетворяющий условиям системы (9), доставляет минимум в задаче (7). Так как целевая функция $\sum_{i=1}^6 s_i^0 \ln s_i^0$ строго выпукла, это решение будет единственным.

Решение системы мы получим с помощью функции

$$F_{t^0, p^0}(c) = -p^0 c^3 + (-t^0 - 3p^0 + 2)c^2 + (2t^0 - 3p^0 + 2)c + (2t^0 - 2p^0 + 2).$$

Рассмотрим корень c_0 кубического уравнения $F_{t^0, p^0}(c) = 0$ такой, что $c_0 \geq 1$. Так как

$$\begin{aligned} F_{t^0, p^0}(1) &= -p^0 - (-t^0 - 3p^0 + 2) + (2t^0 - 3p^0 + 2) + (2t^0 - 2p^0 + 2) \\ &= 3\left(\frac{t^0 + 1}{2} - p^0\right) + 3.5t^0 + 0.5 > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

а при достаточно большом значении c гарантированно $F_{t^0, p^0}(c) < 0$, такой корень всегда существует. Положим

$$s_1^0 = \frac{t^0}{1 + c_0 + c_0^2}, \quad s_2^0 = \frac{c_0 t^0}{1 + c_0 + c_0^2}, \quad s_5^0 = \frac{c_0^2 t^0}{1 + c_0 + c_0^2},$$

Таблица

t^0	γ_4	t^0	γ_4	t^0	γ_4
0.010000	1.364577	0.340000	1.318571	0.670000	1.276580
0.020000	1.363131	0.350000	1.317235	0.680000	1.275380
0.030000	1.361688	0.360000	1.315903	0.690000	1.274185
0.040000	1.360249	0.370000	1.314575	0.700000	1.272994
0.050000	1.358812	0.380000	1.313250	0.710000	1.271808
0.060000	1.357379	0.390000	1.311929	0.720000	1.270627
0.070000	1.355949	0.400000	1.310612	0.730000	1.269450
0.080000	1.354521	0.410000	1.309299	0.740000	1.268278
0.090000	1.353097	0.420000	1.307989	0.750000	1.267111
0.100000	1.351677	0.430000	1.306684	0.760000	1.265949
0.110000	1.350259	0.440000	1.305382	0.770000	1.264791
0.120000	1.348844	0.450000	1.304084	0.780000	1.263639
0.130000	1.347433	0.460000	1.302791	0.790000	1.262491
0.140000	1.346025	0.470000	1.301501	0.800000	1.261348
0.150000	1.344620	0.480000	1.300215	0.810000	1.260211
0.160000	1.343219	0.490000	1.298933	0.820000	1.259078
0.170000	1.341820	0.500000	1.297655	0.830000	1.257950
0.180000	1.340425	0.510000	1.296381	0.840000	1.256827
0.190000	1.339034	0.520000	1.295112	0.850000	1.255710
0.200000	1.337645	0.530000	1.293846	0.860000	1.254597
0.210000	1.336260	0.540000	1.292585	0.870000	1.253489
0.220000	1.334879	0.550000	1.291328	0.880000	1.252387
0.230000	1.333501	0.560000	1.290075	0.890000	1.251290
0.240000	1.332126	0.570000	1.288826	0.900000	1.250198
0.250000	1.330755	0.580000	1.287582	0.910000	1.249111
0.260000	1.329387	0.590000	1.286342	0.920000	1.248029
0.270000	1.328022	0.600000	1.285106	0.930000	1.246953
0.280000	1.326661	0.610000	1.283875	0.940000	1.245881
0.290000	1.325304	0.620000	1.282648	0.950000	1.244816
0.300000	1.323950	0.630000	1.281425	0.960000	1.243755
0.310000	1.322600	0.640000	1.280207	0.970000	1.242700
0.320000	1.321253	0.650000	1.278994	0.980000	1.241650
0.330000	1.319910	0.660000	1.277785	0.990000	1.240606

$$s_3^0 = s_4^0 = \frac{1 - t^0}{2 + c_0}, \quad s_6^0 = \frac{c_0(1 + t^0)}{2 + c_0}, \quad k^0 = 2s_1^0 + s_2^0.$$

Непосредственно проверяется, что данный набор удовлетворяет всем уравнениям системы (9). Остается проверить условие неотрицательности $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Из (9) получаем $\lambda_2 = \lambda_1 = \ln(s_2^0/s_1^0) = \ln c_0 > 0$ (так как $c_0 > 1$). Следовательно, $(s_1^0, s_2^0, s_3^0, s_4^0, s_5^0, s_6^0, k^0)$ – точка минимума в задаче (7).

7. Практическая реализация алгоритма и новые результаты. Итак, мы свели задачу о нахождении нижней оценки на хроматическое число при каждом фиксированном t^0 к решению кубического уравнения (10), нахождению соответствующего этому корню набора параметров и вычислению функции γ_4 от них. Данный

алгоритм был реализован на компьютере, в таблице и на графике представлены значения функции γ_4 для t^0 от 0 до 1 с шагом 0.01. Как мы видим, значения в концах отрезка согласуются с известными нижними оценками.

Рисунок

На графике изображена функция $\gamma_4(t^0)$ (сплошная линия). При $t^0 = 0$ получаем нижнюю оценку (2), при $t^0 = 1$ — ограничение снизу из (1). Зависимость оказывается не линейной, но достаточно близкой к ней. Функция выглядит вогнутой, однако доказать это не представляется возможным.

В заключение автор выражает благодарность научным руководителям д.ф.-м.н. А. М. Райгородскому и д.ф.-м.н. В. Ю. Протасову за постановку задачи, внимание к работе и помощь в написании статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56:1** (2001), 107–146.
- [2] А. Сойфер, “Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее”, Матем. просвещение, **8**, МЦНМО, М., 2004, 185–221.
- [3] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.
- [4] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, New York, 2005.
- [5] J. Pach, P. K. Agarwal, *Combinatorial Geometry*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [6] V. Klee, S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Dolciani Math. Exp., **11**, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1991.
- [7] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and His Mathematics, II*, Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, Springer-Verlag, Berlin, 2002, 649–666.
- [8] M. Benda, M. Perles, “Colorings of metric spaces”, *Geombinatorics*, **9:3** (2000), 113–126.
- [9] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства”, *УМН*, **55:2** (2000), 147–148.
- [10] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства с метрикой l_q ”, *УМН*, **59:5**(359) (2004), 161–162.

- [11] А. М. Райгородский, “О хроматических числах метрических пространств”, *Чебышевский сб.*, **5**:1 (9) (2004), 165–173.
- [12] D. G. Larman, C. A. Rogers, “The realization of distances within sets in Euclidean space”, *Mathematika*, **19** (1972), 1–24.
- [13] Z. Füredi, J.-H. Kang, “Distance graphs on $\mathbb{Z}^n$ with l_1 -norm”, *Theoret. Comput. Sci.*, **319**:1-3 (2004), 357–366.
- [14] P. Frankl, R. M. Wilson, “Intersection theorems with geometric consequences”, *Combinatorica*, **1**:4 (1981), 357–368.
- [15] Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973.
- [16] N. G. de Bruijn, P. Erdős, “A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations”, *Indag. Math.*, **13**:5 (1951), 371–373.
- [17] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.
- [18] B. Bollobás, *Random Graphs*, Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [19] А. М. Райгородский, И. И. Тимирова, “О Проблеме Нелсона–Эрдеша–Хадвигера для одной серии метрических пространств”, *Чебышевский сб.*, **9**:1 (2008), 125–134.
- [20] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967.
- [21] А. М. Райгородский, И. М. Шитова, “О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями”, *Матем. сб.*, **199**:4 (2008), 107–142.
- [22] Е. С. Горская, И. М. Митричева, В. Ю. Протасов, А. М. Райгородский, “Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации”, *Матем. сб.*, **200**:6 (2009), 3–22.
- [23] Э. М. Галеев, М. И. Зеликин, С. В. Конягин, Г. Г. Магарил-Ильяев, Н. П. Осмоловский, В. Ю. Протасов, В. М. Тихомиров, А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление*, МЦНМО, М., 2008.

И. М. Митричева

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: irina.mitricheva@gmail.com

Поступило

15.04.2009