Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Жесткая изотопическая классификация вещественных квадратичных комплексов и ассоциированных с ними куммеровых поверхностей, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 5, 705–718

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:13:31

УДК 512.7

Жесткая изотопическая классификация вещественных квадратичных комплексов и ассоциированных с ними куммеровых поверхностей

В. А. Краснов

Работа посвящена нахождению жестких изотопических классов трехмерных вещественных квадратичных комплексов прямых и ассоциированных с ними куммеровых поверхностей. Доказывается, что существует двенадцать жестких изотопических классов вещественных квадратичных комплексов и семь жестких изотопических классов ассоциированных с ними куммеровых поверхностей. Приведены характеристики, которые определяют эти жесткие изотопические классы.

Библиография: 10 названий.

Введение

Сначала приведем несколько обозначений и определений. Пусть $V \subset \mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^6)$ – трехмерное комплексное проективное алгебраическое многообразие, заданное системой уравнений

$$q_1(X_0, \dots, X_5) = 0, \quad q_2(X_0, \dots, X_5) = 0, \quad (0.1)$$

где

$$q_1(X_0, \dots, X_5) = q_1(X) = (M_1 X, X), \quad q_2(X_0, \dots, X_5) = q_2(X) = (M_2 X, X)$$

– ненулевые, непропорциональные квадратичные формы с комплексными коэффициентами, $X_0, \dots, X_5$ – однородные координаты в $\mathbb{P}^5$, M_1, M_2 – матрицы квадратичных форм. Такое многообразие будем называть *биквадрикой*. Биквадрике V однозначно соответствует пучок квадрик в $\mathbb{P}^5$

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) = 0, \quad (0.2)$$

который определяет прямую в пространстве квадрик $\mathbb{P}^{20}$, где λ_1, λ_2 являются однородными координатами этой прямой. Таким образом, множество биквадрик содержится в многообразии Грассмана $\mathbb{G}(2, 21)$, которое обозначим через $\mathbb{G}$. Размерность многообразия Грассмана $\mathbb{G}$ равна $2 \cdot 19 = 38$. Заметим, что биквадрика V , заданная системой уравнений (0.1), неособая тогда и только тогда, когда уравнение

$$\det(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = 0 \quad (0.3)$$

не имеет кратных корней на комплексной проективной прямой $\mathbb{P}^1$ (см., например, [1], [2]). Множество точек $p \in \mathbb{G}$, для которых это уравнение имеет кратные корни, образует дискриминантную гиперповерхность $\Delta \subset \mathbb{G}$.

Через $\mathbb{G}^*$ обозначим разность $\mathbb{G} \setminus \Delta$; это множество параметризует неособые биквадрики, а через $\mathbb{R}\mathbb{G}$, $\mathbb{R}\mathbb{G}^*$ обозначим множества вещественных точек из $\mathbb{G}$, $\mathbb{G}^*$, соответственно. Если $p \in \mathbb{G}^*$, то через V_p обозначаем соответствующую биквадрику. Заметим, что если $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$, то комплексная биквадрика V_p может быть задана системой уравнений (0.1) с вещественными коэффициентами. Тогда на комплексной биквадрике V_p определена инволюция комплексного сопряжения $\tau: V_p \rightarrow V_p$. Пара (V_p, τ) называется *вещественной биквадрикой*; мы будем ее также обозначать через V_p , так как инволюция $\tau: V_p \rightarrow V_p$ однозначно восстанавливается из инволюции комплексного сопряжения $\tau: \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^5$ и вложения $V_p \hookrightarrow \mathbb{P}^5$. Множество вещественных точек биквадрики V_p обозначается через $\mathbb{R}V_p$ и называется *вещественной частью биквадрики* V_p ; заметим, что $\mathbb{R}V_p$ равно множеству неподвижных точек V_p^τ инволюции $\tau: V_p \rightarrow V_p$.

Пусть квадратичная форма $q_1(X)$ имеет вид $X_0X_1 - X_2X_3 + X_4X_5$. Тогда биквадрика V , определенная системой уравнений (0.1), называется *квадратичным комплексом прямых* (см. подробности в [3]). Заметим, что квадрика $X_0X_1 - X_2X_3 + X_4X_5 = 0$ называется *квадрикой Клейна* (см. [4]) или *квадрикой Плюккера*; она равна образу многообразия Грассмана $\mathbb{G}(2, 4)$ при отображении Плюккера

$$X_0 = p_{01}, \quad X_1 = p_{23}, \quad X_2 = p_{02}, \quad X_3 = p_{13}, \quad X_4 = p_{03}, \quad X_5 = p_{12},$$

где $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$ – плюккеровы координаты в $\mathbb{G}(2, 4)$. Далее квадрика Клейна в $\mathbb{P}^5$ обозначается через $\mathcal{Q}$. Отображение Плюккера задает изоморфизм между многообразиями $\mathbb{G}(2, 4)$, $\mathcal{Q}$.

Множество неособых квадратичных комплексов является подмногообразием пространства биквадрик $\mathbb{G}^*$, его размерность равна девятнадцати. С каждым квадратичным комплексом V ассоциирована куммерова поверхность $S \subset \mathbb{P}^3$ (см. [3; гл. 6]; также первый раздел данной статьи). Поверхность S является особой кватрикой, которая имеет шестнадцать обыкновенных особых точек. Если V – вещественный квадратичный комплекс прямых, то S – вещественная поверхность. Обозначим через $\mathcal{C}$ множество неособых вещественных квадратичных комплексов, а через $\mathcal{S}$ обозначим соответствующее множество вещественных куммеровых поверхностей. Тогда определено отображение $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$, которое сопоставляет вещественному квадратичному комплексу V , ассоциированную с ним вещественную куммерову поверхность S .

Компоненты связности многообразия вещественных комплексов $\mathcal{C}$ называются *жесткими изотопическими классами* (см. аналогичное определение для вещественных алгебраических кривых в [5]). Обозначение и описание этих классов изложено во втором разделе, а сейчас мы можем сформулировать теорему, в которой указывается только количество жестких изотопических классов.

ТЕОРЕМА 0.1. *Существует двенадцать жестких изотопических классов неособых вещественных квадратичных комплексов.*

Для формулировки теоремы о жесткой изотопической классификации куммеровых поверхностей, ассоциированных с неособыми вещественными квадратичными комплексами, введем следующие обозначения: $\mathcal{S}_0$ – подмножество $\mathcal{S}$, состоящее из куммеровых поверхностей без вещественных точек; $\mathcal{S}_1$ – подмножество $\mathcal{S}$, состоящее из куммеровых поверхностей, вещественная часть которых гомеоморфна двумерному тору; $\mathcal{S}_2$ – подмножество $\mathcal{S}$, состоящее из куммеровых поверхностей, вещественная часть которых гомеоморфна несвязному объединению двух двумерных торов; $\mathcal{S}_3$ – подмножество $\mathcal{S}$, состоящее из куммеровых поверхностей, которые имеют четыре вещественных особых точек; $\mathcal{S}_4$ – подмножество $\mathcal{S}$, состоящее из куммеровых поверхностей, которые имеют восемь вещественных особых точек; $\mathcal{S}_5$ – подмножество $\mathcal{S}$, состоящее из куммеровых поверхностей, которые имеют шестнадцать вещественных особых точек.

ТЕОРЕМА 0.2. *Множества $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_4, \mathcal{S}_5$ связные, а множество $\mathcal{S}_3$ состоит из двух компонент связности. Таким образом, существует семь классов жесткой изотопической эквивалентности куммеровых поверхностей, ассоциированных с неособыми вещественными квадратичными комплексами.*

Компоненты связности множества $\mathcal{S}_3$ описаны в третьем разделе, они обозначаются через $\mathcal{S}'_3, \mathcal{S}''_3$. Также в третьем разделе приведены топологические типы вещественных частей куммеровых поверхностей, ассоциированных с вещественными квадратичными комплексами.

Заметим, наконец, что множество всех вещественных куммеровых поверхностей в $\mathbb{P}^3$ возможно не совпадает со множеством $\mathcal{S}$. Этот вопрос еще не исследован.

1. Куммеровы поверхности, ассоциированные с квадратичными комплексами

В этом разделе мы построим и изучим куммеровы поверхности, ассоциированные с неособыми квадратичными комплексами прямых.

1.1. Квадрика Клейна. Прямая $l \subset \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ определяется парой различных точек на ней $a = [\mathbf{a}]$, $b = [\mathbf{b}]$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ – неколлинеарные векторы в $\mathbb{C}^4$. Сопоставим прямой l точку $P(l) = [\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}]$ проективного пространства $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4)$. Полученное отображение $P: \mathbb{G}(2, 4) \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4)$ является вложением, оно называется *отображением Плюккера*. Опишем это отображение в координатах. Произвольный вектор из пространства $\mathbf{v} \in \Lambda^2 \mathbb{C}^4$ раскладывается в линейную комбинацию

$$\mathbf{v} = \sum_{0 \leq i < j \leq 3} p_{ij} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j,$$

где $\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_3$ – стандартный базис арифметического пространства $\mathbb{C}^4$. Набор чисел $\{p_{ij}\}$ дает однородные координаты точки $[\mathbf{v}]$ в проективном пространстве $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4)$. Отображение Плюккера $P: \mathbb{G}(2, 4) \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4)$ в координатах задается равенствами

$$p_{ij} = a_i b_j - a_j b_i, \quad 0 \leq i < j \leq 3,$$

где $(a_0, \dots, a_3), (b_0, \dots, b_3)$ – однородные координаты точек a, b . Образ отображения Плюккера $P: \mathbb{G}(2, 4) \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4)$ задается уравнением $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0$, которое в плюккеревых координатах $\{p_{ij}\}$ приобретает вид

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0.$$

Этот образ является квадрикой, которая называется *квадрикой Клейна* (см. [4]). Квадрику Клейна мы обозначаем через $\mathcal{Q}$. Отображение Плюккера задает изоморфизм между этими многообразиями $\mathbb{G}(2, 4), \mathcal{Q}$. Если $x \in \mathcal{Q}$, то через l_x обозначается соответствующая прямая в $\mathbb{P}^3$.

Если A – линейное преобразование пространства $\mathbb{C}^4$, то внешний квадрат $A \wedge A$ является линейным преобразованием пространства $\mathbb{C}^6 = \Lambda^2 \mathbb{C}^4$. (Отображение $A \wedge A$ однозначно определяется равенством $(A \wedge A)(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = A(\mathbf{a}) \wedge A(\mathbf{b})$.) Это соответствие определяет гомоморфизм групп $\wedge: \mathrm{PGL}(4, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{PGL}(6, \mathbb{C})$. Образ этого гомоморфизма равен подгруппе $\mathrm{PGL}(\mathcal{Q}, \mathbb{C})$, состоящей из проективных преобразований, переводящих квадрику Клейна в себя. Соответствующий гомоморфизм

$$\wedge: \mathrm{PGL}(4, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{PGL}(\mathcal{Q}, \mathbb{C}) \quad (1.1)$$

является изоморфизмом (см. [6]). Обозначим через $\mathrm{PGL}(4, \mathbb{R}), \mathrm{PGL}(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$ вещественные части групп $\mathrm{PGL}(4, \mathbb{C}), \mathrm{PGL}(\mathcal{Q}, \mathbb{C})$. Тогда изоморфизм (1.1) индуцирует изоморфизм

$$\wedge: \mathrm{PGL}(4, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PGL}(\mathcal{Q}, \mathbb{R}). \quad (1.2)$$

Каждая из групп $\mathrm{PGL}(4, \mathbb{R}), \mathrm{PGL}(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$ состоит из двух компонент связности, которые определяются знаком определителя соответствующей матрицы. Обозначим через $\mathrm{PGL}_+(4, \mathbb{R}), \mathrm{PGL}_+(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$ связные компоненты, содержащие единичные преобразования. Тогда изоморфизм (1.2) индуцирует изоморфизм

$$\wedge: \mathrm{PGL}_+(4, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PGL}_+(\mathcal{Q}, \mathbb{R}). \quad (1.3)$$

На квадрике Клейна $\mathcal{Q}$ существует два семейства плоскостей. Опишем одно из этих семейств. Если $x \in \mathbb{P}^3$, то через $\sigma(x)$ обозначается множество прямых в $\mathbb{P}^3$, проходящих через точку x . Это множество образует один из циклов Шуберта на многообразии Грассмана $\mathbb{G}(2, 4)$, а соответствующее множество на квадрике Клейна $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^5$ является плоскостью, которую мы обозначим через π_x .

1.2. Куммеровы поверхности. Рассмотрим на квадрике Клейна $\mathcal{Q}$ какую-нибудь неособую биквадрику $V \subset \mathcal{Q}$, которая по определению является квадратичным комплексом прямых. Обозначим через $S = S(V)$ множество точек $x \in \mathbb{P}^3$ таких, что плоскость $\pi_x \subset \mathbb{P}^5$ касается многообразия V . Множество $S \subset \mathbb{P}^3$ является особой поверхностью четвертой степени, которая называется *куммеровой поверхностью*, ассоциированной с квадратичным комплексом V . Все особенности поверхности S являются простыми двойными точками, число которых равно шестнадцати. Если точка $x \in S$ неособая, то пересечение $\pi_x \cap V$ состоит из двух разных прямых L'_x, L''_x в плоскости $\pi_x \subset \mathbb{P}^5$, в противном случае, это пересечение является двойной прямой $2L_x$ в плоскости $\pi_x \subset \mathbb{P}^5$.

Наоборот, каждая комплексная поверхность четвертой степени $S \subset \mathbb{P}^3$ с шестнадцатью простейшими особыми точками является куммеровой поверхностью, ассоциированной с некоторым неособым комплексным квадратичным комплексом прямых (см. [7]).

Пусть теперь квадратичный комплекс прямых V является вещественной биквадрикой. Тогда ассоциированная куммерова поверхность $S \subset \mathbb{P}^3$ будет вещественной поверхностью. Вещественная структура $\tau: S \rightarrow S$ индуцирована инволюцией комплексного сопряжения в $\mathbb{P}^3$. Нужно только показать, что если $x \in S \subset \mathbb{P}^3$, то комплексно сопряженная точка $\bar{x} \in \mathbb{P}^3$ также принадлежит поверхности S . Для этого заметим, что цикл Шуберта $\sigma(\bar{x}) \subset \mathbb{G}(2, 4)$ получается из цикла Шуберта $\sigma(x)$ с помощью комплексного сопряжения. Так как отображение Плюккера $\mathbb{G}(2, 4) \rightarrow \mathcal{Q}$ сохраняет вещественную структуру, плоскость $\pi_{\bar{x}} \subset \mathbb{P}^5$ получается из плоскости $\pi_x \subset \mathbb{P}^5$ с помощью комплексного сопряжения в $\mathbb{P}^5$. Квадратичный комплекс прямых V – вещественная биквадрика, поэтому, если плоскость π_x касается многообразия V , то комплексно сопряженная плоскость $\bar{\pi}_x = \pi_{\bar{x}}$ также касается многообразия V . Следовательно, точка $\bar{x} \in \mathbb{P}^5$ принадлежит поверхности S . Заметим еще, что множество особых точек поверхности S инвариантно относительно инволюции комплексного сопряжения $\tau: S \rightarrow S$. Действительно, если пересечение $\pi_x \cap V$ является двойной прямой $2L$, то пересечение $\pi_{\bar{x}} \cap V$ будет двойной комплексно сопряженной прямой $2\bar{L}$.

1.3. Косингулярные квадратичные комплексы. Обозначим через QC множество комплексных неособых квадратичных комплексов. Это множество содержится в многообразии Грассмана $\mathbb{G}(2, 19)$ и является неособым квазипроективным многообразием размерности 19. Через KS обозначим множество комплексных куммеровых поверхностей в $\mathbb{P}^3$. Определено отображение $\pi: QC \rightarrow KS$, которое квадратичному комплексу V сопоставляет ассоциированную с ним куммерову поверхность $S = S(V)$. Множество куммеровых поверхностей KS является квазипроективным многообразием размерности 18, а голоморфное отображение $\pi: QC \rightarrow KS$ является дифференцируемым локально-тривиальным расслоением, слои которого диффеоморфны двумерной сфере без шести различных точек (см. [7]).

Два квадратичных комплекса V, V' называются *косингулярными*, если ассоциированные с ними куммеровы поверхности совпадают (см. [7]). Таким образом, косингулярные комплексы V, V' принадлежат одному слою проекции $\pi: QC \rightarrow KS$. В книге [7] доказана следующая

ЛЕММА 1.1. *Если для квадратичного комплекса $V \subset \mathbb{P}^5$ выбраны однородные координаты $Y_0, \dots, Y_5$ такие, что комплекс задается системой уравнений*

$$Y_0^2 + \dots + Y_5^2 = 0, \quad c_0 Y_0^2 + \dots + c_5 Y_5^2 = 0, \quad (1.4)$$

где первое уравнение определяет квадрику Клейна, а числа $c_0, \dots, c_5 \in \mathbb{C}$ различные, то справедливы утверждения:

1) *система уравнений*

$$Y_0^2 + \dots + Y_5^2 = 0, \quad \frac{Y_0^2}{c_0 - c} + \dots + \frac{Y_5^2}{c_5 - c} = 0, \quad (1.5)$$

где число c отлично от чисел $c_0, \dots, c_5$, задает квадратичный комплекс V_c косингулярный комплексу V ;

- 2) каждый квадратичный комплекс V' , отличный от V , но косингулярный V , задается системой уравнений (1.5) при некотором числе $c \in \mathbb{C}$, т.е. $V' = V_c$;
- 3) при $c \rightarrow \infty$ комплекс V_c стремится к комплексу V .

Для произвольной системы однородных координат $Z_0, \dots, Z_5$ в $\mathbb{P}^5$ эта лемма приобретает следующую формулировку.

ЛЕММА 1.2. Если квадратичный комплекс $V \subset \mathbb{P}^5$ задается в однородных координатах $Z_0, \dots, Z_5$ системой уравнений

$$(M_1 Z, Z) = 0, \quad (M_2 Z, Z) = 0, \quad (1.6)$$

где M_1, M_2 – матрицы, причем первое уравнение определяет квадрику Клейна, то справедливы утверждения:

- 1) система уравнений

$$(M_1 Z, Z) = 0, \quad (M_1(M_2 - cM_1)^{-1}M_1 Z, Z) = 0, \quad (1.7)$$

где число c отлично от характеристических чисел матрицы $M_1^{-1}M_2$, задает квадратичный комплекс V_c , косингулярный комплексу V ;

- 2) каждый квадратичный комплекс V' , отличный от V , но косингулярный V , задается системой уравнений (1.7) при некотором числе $c \in \mathbb{C}$, т.е. $V' = V_c$;
- 3) при $c \rightarrow \infty$ комплекс V_c стремится к комплексу V .

2. Жесткая изотопическая классификация

2.1. Жесткая изотопическая классификация вещественных биквадрик.

Здесь мы опишем компоненты связности множества $\mathbb{R}\mathbb{G}^*$, которые в работе [8] обозначены через

$$G_0, G_2, G(4), G(6), G(1, 1, 2), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2).$$

Пусть $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$; тогда через L_p обозначим соответствующую вещественную прямую в $\mathbb{P}^{20}$, а через $V_p \subset \mathbb{P}^5$ – соответствующую вещественную биквадрику, которая равна пересечению всех квадрик $Q_a \subset \mathbb{P}^5$, где $a \in L_p$. (Если точка a принадлежит пространству квадрик $\mathbb{P}^{20}$, то через Q_a обозначается соответствующая квадрика). Пусть биквадрика V_p задается системой уравнений (0.1) с вещественными коэффициентами. Тогда на вещественной прямой L_p квадратичные формы $q_1(X)$, $q_2(X)$ определяют вещественные однородные координаты λ_1, λ_2 . Следовательно, пучок квадрик, соответствующий точке $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$, будет иметь уравнение вида (0.2). Рассмотрим уравнение

$$d_p(\lambda_1, \lambda_2) = \det(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = 0, \quad (2.1)$$

где M_1, M_2 – матрицы коэффициентов квадратичных форм $q_1(X)$, $q_2(X)$, а точка $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$ принадлежит $\mathbb{P}^1 = L_p$. Тогда уравнение (2.1) имеет ровно шесть решений в $\mathbb{P}^1 = L_p$, так как биквадрика V_p неособая. Заметим, что эти решения совпадают с точками пересечения прямой L_p и дискриминантной гиперповерхности $\Lambda \subset \mathbb{P}^{20}$, которая равна множеству особых квадрик.

Далее рассмотрим окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, заданную уравнением $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$. Тогда уравнение шестой степени (2.1) можно рассматривать на этой окружности. Оно

может иметь на окружности S^1 $2n$ корней, где $n = 0, 2, 4, 6$. (Заметим, что число n равно числу точек пересечения прямой $\mathbb{R}L_p$ с дискриминантной гиперповерхностью $\mathbb{R}\Lambda$.) Обозначим эти корни через $R_1, \dots, R_{2n}$, порядок которых индуцируется движением по окружности S^1 в фиксированном направлении от одного из фиксированных корней уравнения (2.1). (Заметим, что на прямой $\mathbb{R}L_p$ нет канонической ориентации, поэтому ее нет также на двулистном накрытии $S^1 \rightarrow \mathbb{R}L_p$.) Через G_n обозначим множество точек $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$, для которых уравнение (0.3) имеет $2n$ корней на окружности S^1 , т.е. число точек пересечения вещественной прямой $\mathbb{R}L_p$ с дискриминантной гиперповерхностью $\mathbb{R}\Lambda$ равно n . Тогда каждое из множеств $G_n \subset \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ состоит из целых компонент связности. Но оказывается, что множества G_0, G_2 связные, поэтому далее рассматриваем случаи $n = 4, 6$.

Рассмотрим целочисленную функцию $I_p(\lambda)$, $\lambda \in S^1$, принимающую целочисленные значения в пределах от 0 до 6, равную отрицательному индексу инерции квадратичной формы

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X).$$

Если $n > 0$, то точки $R_1, \dots, R_{2n}$ являются точками разрыва функции $I_p(\lambda)$, причем при переходе через такие точки значения функции $I_p(\lambda)$ изменяются на ± 1 .

Справедливо следующее (см. [9; Appendix A])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Точки $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$, $p' \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ принадлежат одной компоненте связности тогда и только тогда, когда существует эквивариантный (относительно антиподальной инволюции) гомеоморфизм окружности S^1 , переводящий индекс-функцию $I_p(\lambda)$ в индекс-функцию $I_{p'}(\lambda)$.*

Заметим, что в работе [9] не приведено полного доказательства этого предложения, оно изложена в статье [8]. С помощью предложения 2.1 доказывается рассмотренная далее жесткая изотопическая классификация трехмерных вещественных биквадрик.

Фиксированное направление на окружности S^1 назовем “положительным”. Тогда точку R_j назовем также “положительной”, если при переходе через нее в положительном направлении значения функции $I_p(\lambda)$ увеличиваются на 1; в противном случае точка R_j называется “отрицательной”. Можно так выбрать начальный корень R_1 уравнения (0.3) и направление на окружности S^1 , что возможны только следующие расположения знаков точек $R_1, \dots, R_{2n}$. (Вообще, расположение знаков может быть и другим, но мы выбирали одно из эквивалентных расположений.)

Если $n = 4$, то реализуются два (с точностью до эквивалентности) случая расположения знаков точек $R_1, \dots, R_8$:

$$++++-- --, \quad +- - + - + +-.$$

В этих случаях точка $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ по определению принадлежит множествам: $G(4)$, $G(1, 1, 2)$, соответственно. (В скобках указываются последовательные числа, каждое из которых равно количеству знаков в отдельной группе из плюсов.)

Если $n = 6$, то реализуются пять (с точностью до эквивалентности) случаев расположения знаков точек $R_1, \dots, R_{12}$:

$$+++++-- -- --, \quad +-----+ - + + + -,$$

$$\begin{aligned}
 &+ - - - + + - + + + --, \quad + + - - + + - - + + --, \\
 &+ - - + - + - + - + + -.
 \end{aligned}$$

В этих случаях точка $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ принадлежит по определению множествам

$$G(6), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2),$$

соответственно. (В скобках указываются количества знаков в группах из плюсов. Заметим, что циклическая перестановка этих чисел, а также изменение их порядка на противоположный, приводят к эквивалентным обозначениям компонент связности множества неособых вещественных биквадрик. Заметим также, что число групп из плюсов всегда нечетно при $n = 4$ и $n = 6$.)

Заметим, что в статье [8] доказана теорема, которая описывает топологический тип многообразия $\mathbb{R}V_p$ в зависимости от принадлежности точки p компонентам

$$G_0, G_2, G(4), G(6), G(1, 1, 2), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2),$$

соответственно.

2.2. Жесткая изотопическая классификация вещественных отмеченных пучков квадрик. Пусть $V \subset \mathbb{P}^5$ – неособая биквадрика. Тогда она определяет линейный пучок квадрик Q_a , $a \in L \subset \mathbb{P}^{20}$, проходящих через эту биквадрику. Отметим среди этих квадрик одну неособую квадрику Q . Полученный пучок квадрик будем обозначать через (V, Q) и называть *отмеченным пучком квадрик*. Каждый такой пучок задается системой уравнений вида (0.1), где первое уравнение определяет неособую квадрику, которая считается отмеченной. Множество отмеченных комплексных пучков квадрик обозначим через $\mathbb{B}$. Рассмотрим комплексно аналитическое отображение $\pi: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{G}^*$, которое паре $(V_p, Q) \in \mathbb{B}$ сопоставляет точку $p \in \mathbb{G}^*$. Во множестве вещественных точек $\mathbb{R}\mathbb{B}$, которое состоит из пар (V, Q) , где биквадрика V и квадрика Q – вещественные, рассмотрим подмножество $\mathcal{B}$, состоящее из таких пар (V, Q) , что квадрика Q задается уравнением $q(X) = 0$, в котором квадратичная форма $q(X)$ имеет сигнатуру, равную нулю. Покажем, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Отображение $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ сюръективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть неособая вещественная биквадрика $V = V_p$ задана системой уравнений (0.1), а $I(\lambda)$ – соответствующая индекс-функция на окружности S^1 . Тогда существует точка $(\lambda_1^0, \lambda_2^0) = \lambda^0 \in S^1$, $\lambda^0 \neq R_j$, такая, что индекс $I(\lambda^0)$ квадратичной формы $\lambda_1^0 q_1(X) + \lambda_2^0 q_2(X)$ равен трем. Это утверждение вытекает из равенства $I(-\lambda) = 6 - I(\lambda)$ и следующего факта: при переходе через точку $\lambda = R_j$ функция $I(\lambda)$ изменяется на ± 1 . Действительно, если $I(\lambda) > 3$, то на дуге окружности S^1 , соединяющей точки λ , $-\lambda$, должна найтись точка $\lambda^0 \neq R_j$ такая, что $I(\lambda^0) = 3$. В противном случае на этой дуге должна существовать точка R_j , при переходе через которую значение функции $I(\lambda)$ изменится по модулю на число, большее чем 1. Обозначим через Q квадрику, заданную уравнением

$$\lambda_1^0 q_1(X) + \lambda_2^0 q_2(X) = 0.$$

Тогда при отображении $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ пара $(V, Q) \in \mathcal{B}$ отображается в точку $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$. Предложение доказано.

Прообразы компонент связности

$$G_0, G_2, G(4), G(6), G(1, 1, 2), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2)$$

при отображении $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ будем обозначать через

$$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}(4), \mathcal{B}(6), \mathcal{B}(1, 1, 2), \mathcal{B}(1, 1, 4), \mathcal{B}(1, 2, 3), \mathcal{B}(2, 2, 2), \mathcal{B}(1, 1, 1, 1, 2),$$

соответственно. Пусть есть два вещественных отмеченных пучка квадратик (V_p, Q) , $(V_{p'}, Q')$. Причем первый из них задается системой уравнений (0.1), где первое уравнение определяет квадриту Q , а второй пучок квадратик аналогично задается системой уравнений

$$q'_1(X_0, \dots, X_5) = 0, \quad q'_2(X_0, \dots, X_5) = 0,$$

где первое уравнение определяет квадриту Q' . Тогда аналогично доказательству предложения 2.1 строится доказательство следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пучки квадратик (V_p, Q) , $(V_{p'}, Q')$ принадлежат одной компоненте связности многообразия $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда существует эквивариантный (относительно антиподальной инволюции) гомеоморфизм окружности S^1 , переводящий индекс-функцию $I_p(\lambda)$ в индекс-функцию $I_{p'}(\lambda)$ и оставляющий точку $(1, 0) \in S^1$ неподвижной или переводящий ее в точку $(-1, 0) \in S^1$.*

Из этого предложения вытекают следующие утверждения (см. подробности в [10]).

1) Множества $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}(4), \mathcal{B}(6), \mathcal{B}(1, 1, 4), \mathcal{B}(2, 2, 2)$ связные.

2) Каждое из множеств $\mathcal{B}(1, 1, 2), \mathcal{B}(1, 2, 3), \mathcal{B}(1, 1, 1, 1, 2)$ состоит из двух компонент связности. Для точек из этих компонент индекс-функция $I(\lambda)$, $\lambda \neq R_j$, последовательно принимает следующие значения (начиная со значения в точке $(1, 0) \in S^1$ и кончая значением в точке $(-1, 0) \in S^1$):

для компонент множества $\mathcal{B}(1, 1, 2)$

$$3, 2, 3, 2, 3 \quad \text{или} \quad 3, 2, 3, 4, 3; \quad (2.2)$$

для компонент множества $\mathcal{B}(1, 2, 3)$

$$3, 2, 1, 2, 3, 2, 3 \quad \text{или} \quad 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3; \quad (2.3)$$

для компонент множества $\mathcal{B}(1, 1, 1, 1, 2)$

$$3, 2, 3, 2, 3, 2, 3 \quad \text{или} \quad 3, 2, 3, 2, 3, 4, 3. \quad (2.4)$$

Заметим, что последовательности значений (2.2)–(2.4) определены неоднозначно, а с точностью до обращения порядка и замены всех значений на дополнительные к ним до 6. Компоненты связности, которые получаются из второго утверждения, мы будем обозначать через

$$\mathcal{B}'(1, 1, 2), \mathcal{B}'(1, 2, 3), \mathcal{B}'(1, 1, 1, 1, 2); \quad \mathcal{B}''(1, 1, 2), \mathcal{B}''(1, 2, 3), \mathcal{B}''(1, 1, 1, 1, 2),$$

соответственно. Таким образом, многообразие $\mathcal{B}$ состоит из двенадцати компонент связности

$$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}(4), \mathcal{B}(6), \mathcal{B}(1, 1, 4), \mathcal{B}(2, 2, 2), \mathcal{B}'(1, 1, 2), \mathcal{B}''(1, 1, 2),$$

$$\mathcal{B}'(1, 2, 3), \mathcal{B}''(1, 2, 3), \mathcal{B}'(1, 1, 1, 1, 2), \mathcal{B}''(1, 1, 1, 1, 2). \quad (2.5)$$

Они называются *жесткими изотопическими классами* вещественных отмеченных пучков квадрик.

2.3. Жесткая изотопическая классификация вещественных квадратичных комплексов. Каждый квадратичный комплекс V определяет отмеченный пучок квадрик $(V, \mathcal{Q})$. Поэтому мы можем считать, что множество вещественных квадратичных комплексов содержится во множестве вещественных отмеченных пучков квадрик $\mathcal{B}$. Покажем, что в каждой из двенадцати компонент связности множества $\mathcal{B}$ имеются вещественные квадратичные комплексы. Действительно, для произвольного вещественного отмеченного пучка квадрик (V, Q) существует вещественное проективное преобразование с положительным определителем пространства $\mathbb{P}^5$, переводящее отмеченную квадрику Q в квадрику Клейна $\mathcal{Q}$. Таким образом, это преобразование переводит отмеченный пучок квадрик (V, Q) в вещественный квадратичный комплекс. Осталось заметить, что множество вещественных проективных преобразований с положительным определителем пространства $\mathbb{P}^5$ образует связную группу.

Рассмотрим отображение компонент связности

$$\pi_0(\mathcal{C}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{B}), \quad (2.6)$$

индуцированное вложением $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Предыдущее рассуждение показывает, что это отображение сюръективно. Покажем, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Отображение компонент связности (2.6) биективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны показать, что если вещественные квадратичные комплексы V, V' содержатся в одной компоненте связности множества $\mathcal{B}$, то существует путь $p(t)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве $\mathcal{C}$ такой, что $V_{p(0)} = V$, $V_{p(1)} = V'$.

Рассмотрим непрерывное семейство отмеченных биквадрик (V_t, Q_t) , $0 \leq t \leq 1$, такое, что $(V_0, Q_0) = (V, \mathcal{Q})$, $(V_1, Q_1) = (V', \mathcal{Q})$. В произведении $[0; 1] \times \mathrm{PGL}_+(6, \mathbb{R})$ рассмотрим подмногообразие $\mathfrak{M}$, состоящее из пар (t, g) , $0 \leq t \leq 1$, где $g \in \mathrm{PGL}_+(6, \mathbb{R})$ переводит квадрику Q_t в квадрику Клейна $\mathcal{Q}$. Проекция $\mathfrak{M} \rightarrow [0; 1]$ задает локально-тривиальное расслоение со слоем $\mathrm{PGL}_+(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$. Поэтому существует непрерывное семейство преобразований $g_t \in \mathrm{PGL}_+(6, \mathbb{R})$, $0 \leq t \leq 1$, такое, что $g_0 = e$, $g_t(Q_t) = \mathcal{Q}$. Это семейство преобразований является сечением расслоения $\mathfrak{M} \rightarrow [0; 1]$. Семейство преобразований g_t позволяет построить непрерывное семейство вещественных квадратичных комплексов $(g_t(V_t))$, $0 \leq t \leq 1$. Так как $g_1 \in \mathrm{PGL}_+(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$, существует непрерывное семейство преобразований $g'_t \in \mathrm{PGL}_+(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$, $1 \leq t \leq 2$, такое, что $g'_1 = g_1$, $g'_2 = e$. Два семейства квадратичных комплексов

$$W_t = (g_{2t}(V_{2t})), \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad W'_t = g'_{2t}(V'), \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1,$$

склеиваются в одно непрерывное семейство, которое определяет требуемый путь $p(t)$ в пространстве $\mathcal{C}$. Предложение доказано.

Прообразы компонент связности

$$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}(4), \mathcal{B}(6), \mathcal{B}(1, 1, 4), \mathcal{B}(2, 2, 2), \mathcal{B}'(1, 1, 2), \mathcal{B}''(1, 1, 2),$$

$$\mathcal{B}'(1, 2, 3), \mathcal{B}''(1, 2, 3), \mathcal{B}'(1, 1, 1, 1, 2), \mathcal{B}''(1, 1, 1, 1, 2).$$

при отображении (2.6) будем обозначать через

$$\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}(4), \mathcal{C}(6), \mathcal{C}(1, 1, 4), \mathcal{C}(2, 2, 2), \mathcal{C}'(1, 1, 2), \mathcal{C}''(1, 1, 2), \\ \mathcal{C}'(1, 2, 3), \mathcal{C}''(1, 2, 3), \mathcal{C}'(1, 1, 1, 1, 2), \mathcal{C}''(1, 1, 1, 1, 2),$$

соответственно. Таким образом, теорема 0.1 доказана.

3. Доказательство теоремы 0.2

В проективном пространстве $\mathbb{P}^5$ сделаем замену однородных координат:

$$\begin{aligned} X_0 &= Z_0 + Z_1, & X_1 &= Z_0 - Z_1, & X_2 &= -Z_2 - Z_3, \\ X_3 &= Z_2 - Z_3, & X_4 &= Z_4 + Z_5, & X_5 &= Z_4 - Z_5. \end{aligned}$$

Тогда квадрика Клейна $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^5$ будет задаваться уравнением

$$Z_0^2 - Z_1^2 + Z_2^2 - Z_3^2 + Z_4^2 - Z_5^2 = 0.$$

ЛЕММА 3.1. *При отображении $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ компоненты связности $\mathcal{C}''(1, 1, 2)$ и $\mathcal{C}(4)$ отображаются в одну компоненту.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} Z_0^2 - Z_1^2 + Z_2^2 - Z_3^2 + Z_4^2 - Z_5^2 = 0, \\ 2Z_0^2 + 2Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + 2Z_4Z_5 = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Непосредственно проверяется, что она определяет вещественный квадратичный комплекс V из компоненты $\mathcal{C}(4)$. Если теперь взять косингулярный комплекс V_c при $c = 3/2$, то непосредственно проверяется, что полученный квадратичный комплекс принадлежит компоненте $\mathcal{C}''(1, 1, 2)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. *При отображении $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ компоненты связности*

$$\mathcal{C}(2, 2, 2), \mathcal{C}(1, 1, 4), \mathcal{C}'(1, 2, 3), \mathcal{C}''(1, 1, 1, 1, 2)$$

отображаются в одну компоненту.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} Z_0^2 - Z_1^2 + Z_2^2 - Z_3^2 + Z_4^2 - Z_5^2 = 0, \\ 4Z_0^2 + 4Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 - 2Z_4^2 - 2Z_5^2 = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Непосредственно проверяется, что она определяет вещественный квадратичный комплекс V из компоненты $\mathcal{C}(2, 2, 2)$. Если теперь взять косингулярные комплексы V_c при $c = 0$, $c = 5/2$, $c = 3/2$, соответственно, то непосредственно проверяется, что полученные квадратичные комплексы принадлежат компонентам $\mathcal{C}(1, 1, 4)$, $\mathcal{C}'(1, 2, 3)$, $\mathcal{C}''(1, 1, 1, 1, 2)$, соответственно. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. При отображении $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ компоненты связности $\mathcal{C}''(1, 2, 3)$ и $\mathcal{C}(6)$ отображаются в одну компоненту.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} Z_0^2 - Z_1^2 + Z_2^2 - Z_3^2 + Z_4^2 - Z_5^2 = 0, \\ Z_0^2 + Z_1^2 + 2Z_2^2 + 2Z_3^2 + 3Z_4^2 + 3Z_5^2 = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Непосредственно проверяется, что она определяет вещественный квадратичный комплекс V из компоненты $\mathcal{C}(6)$. Если теперь взять косингулярный комплекс V_c при $c = 3/2$, то непосредственно проверяется, что полученный квадратичный комплекс принадлежит компоненте $\mathcal{C}''(1, 2, 3)$. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 0.2. Если V – вещественный квадратичный комплекс, заданный системой уравнений (0.1), то из леммы 1.2 следует, что множество вещественных косингулярных с V вещественных квадратичных комплексов равно множеству $\mathbb{R} \setminus \{c_1, \dots, c_k\}$, где $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, а $c_1, \dots, c_k$ – вещественные собственные значения матрицы $M_1^{-1}M_2$. Таким образом, если S – ассоциированная с комплексом V куммерова поверхность, то множество вещественных квадратичных комплексов, для которых ассоциированные куммеровы поверхности совпадают с S , равно множеству $\mathbb{R} \setminus \{c_1, \dots, c_k\}$. Из этого утверждения следует, что отображение $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ над каждой компонентой связности множества $\mathcal{S}$ является локально тривиальным расслоением со слоем $\mathbb{R} \setminus \{1, \dots, k\}$, где число k зависит от выбранной компоненты и равно числу n , если квадратичный комплекс принадлежит множеству G_n .

Из теоремы 0.1 и лемм 3.1–3.3 вытекает, что число компонент связности множества $\mathcal{S}$ не больше семи. Покажем, что их в точности семь. Для этого используем результаты из статьи [10] о топологической классификации вещественных частей куммеровых поверхностей, ассоциированных с вещественными квадратичными комплексами. Чтобы сформулировать эти результаты, нам потребуется ввести дополнительные обозначения.

Мы рассмотрим три топологические поверхности с особыми точками Π_1, Π_2, Π_3 , которые строятся следующим образом. Для построения поверхности Π_1 возьмем две двумерные сферы Σ, Σ' , на каждой из которых отметим четыре точки

$$s_1, s_2, s_3, s_4 \in \Sigma, \quad s'_1, s'_2, s'_3, s'_4 \in \Sigma'.$$

Поверхность Π_1 получается из сфер Σ, Σ' отождествлением точек s_i, s'_i ; $i = 1, 2, 3, 4$. Для построения поверхности Π_2 возьмем четыре двумерные сферы $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma'_1, \Sigma'_2$, на каждой из которых отметим четыре точки

$$\begin{aligned} s_{11}, s_{12}, t_{11}, t_{12} &\in \Sigma_1, & s_{21}, s_{22}, t_{21}, t_{22} &\in \Sigma_2, \\ s'_{11}, s'_{12}, t'_{11}, t'_{12} &\in \Sigma'_1, & s'_{21}, s'_{22}, t'_{21}, t'_{22} &\in \Sigma'_2. \end{aligned}$$

Поверхность Π_2 получается из сфер $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma'_1, \Sigma'_2$ отождествлением точек s_{ij}, s'_{ij} , а также точек t_{1j}, t_{2j} с t'_{2j}, t'_{1j} соответственно; $j = 1, 2$. Для построения поверхности Π_3 возьмем восемь двумерных сфер $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma'_1, \Sigma'_2, \Sigma'_3, \Sigma'_4$, на каждой из которых отметим четыре точки

$$s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14} \in \Sigma_1, \quad s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24} \in \Sigma_2,$$

$$\begin{aligned}
s_{31}, s_{32}, s_{33}, s_{34} &\in \Sigma_3, & s_{41}, s_{42}, s_{43}, s_{44} &\in \Sigma_4, \\
s'_{11}, s'_{12}, s'_{13}, s'_{14} &\in \Sigma'_1, & s'_{21}, s'_{22}, s'_{23}, s'_{24} &\in \Sigma'_2, \\
s'_{31}, s'_{32}, s'_{33}, s'_{34} &\in \Sigma'_3, & s'_{41}, s'_{42}, s'_{43}, s'_{44} &\in \Sigma'_4.
\end{aligned}$$

Поверхность Π_3 получается из сфер $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma'_1, \Sigma'_2, \Sigma'_3, \Sigma'_4$ отождествлением точек $s_{ij}, s'_{ji}; i, j = 1, 2, 3, 4$.

Через T обозначим двумерный тор $S^1 \times S^1$, а через $2T$ обозначим несвязное объединение двух таких торов. Пусть $p \in \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, V_p – соответствующий квадратичный комплекс, а S_p – ассоциированная с ним куммерова поверхность. В работе [10] доказаны следующие утверждения.

- 1) Если $p \in \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_2$, то топологическая поверхность $\mathbb{R}S_p$ гомеоморфна особой поверхности Π_1 .
- 2) Если $p \in \mathcal{B}'(1, 1, 2)$, то топологическая поверхность $\mathbb{R}S_p$ гомеоморфна особой поверхности Π_2 .
- 3) Если $p \in \mathcal{B}'(1, 1, 1, 1, 2)$, то топологическая поверхность $\mathbb{R}S_p$ гомеоморфна особой поверхности Π_3 .
- 4) Если $p \in \mathcal{B}(6) \cup \mathcal{B}''(1, 2, 3)$, то множество $\mathbb{R}S_p$ – пустое.
- 5) Если $p \in \mathcal{B}(4) \cup \mathcal{B}''(1, 1, 2)$, то топологическая поверхность $\mathbb{R}S_p$ гомеоморфна тору T .
- 6) Если $p \in \mathcal{B}(1, 1, 4) \cup \mathcal{B}'(1, 2, 3) \cup \mathcal{B}(2, 2, 2) \cup \mathcal{B}''(1, 1, 1, 1, 2)$, то топологическая поверхность $\mathbb{R}S_p$ гомеоморфна несвязному объединению двух торов $2T$.

Из этих утверждений следует, что число компонент связности во множестве $\mathcal{S}$ не менее шести, так как имеется шесть топологических типов вещественных частей куммеровых поверхностей, ассоциированных с вещественными квадратичными комплексами. С другой стороны, предыдущие замечания о слоях проекции $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ показывают, что существует два изотопических класса таких поверхностей, у которых вещественная часть гомеоморфна особой топологической поверхности Π_1 . Следовательно, число компонент связности во множестве $\mathcal{S}$ равно семи. Далее, из выше сформулированных утверждений следует, что множества $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_4, \mathcal{S}_5$ связные, а множество $\mathcal{S}_3$ состоит из двух компонент связности. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Две компоненты множества $\mathcal{S}_3$ можно описать следующим образом. Пусть множества $\mathcal{S}'_3, \mathcal{S}''_3$ состоят из вещественных куммеровых поверхностей, которые ассоциированы с вещественными квадратичными комплексами из компонент $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_2$, соответственно. Тогда из доказательства теоремы 0.2 следует, что эти множества образуют связанные компоненты множества $\mathcal{S}_3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Reid, *The Complete Intersection of Two or More Quadrics*, Ph.D. Thesis, 1972, <http://www.warwick.ac.uk/~masda/3folds/qu.pdf>.
- [2] А. Н. Тюрин, “О пересечении квадрик”, *УМН*, **30:6**(186) (1975), 51–99.
- [3] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982.
- [4] I. V. Dologachev, *Topics in Classical Algebraic Geometry*, <http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/topics.pdf>.
- [5] В. А. Рохлин, “Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых”, *УМН*, **33:5** (1978), 77–89.

- [6] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory. A First Course*, Grad. Texts in Math., **129**, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] C. M. Jessop, *A Treatise on the Line Complex*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1903.
- [8] В. А. Краснов, “Вещественные трехмерные биквадрики”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 119–144.
- [9] A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *Real Enriques surfaces*, Lecture Notes in Math., **1746**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [10] В. А. Краснов, “О вещественных квадратичных комплексах прямых”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:6 (2010), 157–182.

В. А. Краснов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило

29.06.2009