Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Розовская, Экстремальные комбинаторные задачи для двухцветных раскрасок гиперграфов, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 4, 584–598

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8604>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:09:10

Экстремальные комбинаторные задачи для двухцветных раскрасок гиперграфов

А. П. Розовская

Рассматривается обобщение классической комбинаторной задачи Эрдеша–Хайнала. Пусть k – натуральное число. Требуется найти величину $m_k(n)$, равную минимальному количеству ребер n -равномерного гиперграфа, не допускающего таких двухцветных раскрасок множества вершин, что в каждом ребре гиперграфа содержится по k вершин каждого цвета. В работе получена новая нижняя асимптотическая оценка величины $m_k(n)$, которая улучшает предыдущие результаты в широком промежутке значений параметра k . Рассматриваются также другие обобщения данной задачи.

Библиография: 12 названий.

1. Введение и история задачи

В настоящей работе рассматривается известная экстремальная задача о раскрасках равномерных гиперграфов. Сначала дадим основные определения. *Гиперграфом* называется пара множеств $H = (V, E)$, где V есть некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа, а E – это совокупность подмножеств множества V , которые называются *ребрами* гиперграфа. Гиперграф называется *n -равномерным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Одной из классических экстремальных задач теории гиперграфов является задача о свойстве B гиперграфов. Напомним, что гиперграф обладает *свойством B* , если существует двухцветная раскраска множества его вершин, в которой все ребра гиперграфа являются неоднородными. Задача состоит в отыскании величины $m(n)$, равной минимальному числу ребер гиперграфа в классе n -равномерных гиперграфов, не обладающих свойством B . Впервые данная проблема была поставлена в работе Эрдеша и Хайнала (см. [1]). Сам Эрдеш (см. [2], [3]) с помощью простых вероятностных рассуждений получил следующие асимптотические оценки для $m(n)$:

$$2^{n-1} \leq m(n) \leq \frac{e \ln 2}{4} n^2 2^n (1 + o(1)). \quad (1)$$

В дальнейшем нижняя оценка, в отличие от верхней, была улучшена в ряде работ. Подробнее об этом можно прочитать в обзоре [4]. Наилучший на сегодняшний день

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00294).

результат принадлежит Радхакришнану и Сринивасану (см. [5]). Они доказали, что

$$m(n) \geq (0.1)2^n \sqrt{\frac{n}{\ln n}}.$$

Существует большое количество различных обобщений задачи Эрдеша–Хайнала (подробнее см. [4]). Одно из таких обобщений было предложено в работе Шабанова (см. [6]). Пусть дано натуральное число k . Будем говорить, что гиперграф $H = (V, E)$ обладает *свойством B_k* , если существует такая раскраска множества V в два цвета, что в каждом ребре содержится по крайней мере k вершин каждого цвета. По аналогии с величиной $m(n)$ обозначим через $m_k(n)$ величину, равную минимальному числу ребер гиперграфа в классе n -равномерных гиперграфов, не обладающих свойством B_k . Ясно, что свойство B_1 есть свойство B , и, значит, $m_1(n)$ есть $m(n)$. Применяя простые вероятностные соображения, для величины $m_k(n)$ можно получить следующую оценку, которая соответствует при $k = 1$ нижней оценке из (1):

$$m_k(n) \geq \frac{2^{n-1}}{\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}}. \quad (2)$$

Шабановым в работах [6], [7] было доказано, что если $k = k(n) = o(n/\ln n)$, то

$$m_k(n) \leq \frac{e \ln 2}{4} n^2 \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}} (1 + o(1)).$$

Помимо этого им была получена [8] следующая нижняя оценка величины $m_k(n)$:

$$m_k(n) = \Omega\left(\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} \frac{e^{-k/2}}{\sqrt{2k-1}} \frac{2^{n-k}}{\binom{n}{k-1}}\right) \quad (3)$$

при условии, что $k = k(n) = O(\ln n)$. В случае же, когда k имеет порядок роста больше $\ln n$, наилучшей нижней оценкой оставалась простая оценка (2).

2. Основной результат

Основным результатом работы является новая нижняя оценка для величины $m_k(n)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 14$, $k \geq 2$ и выполняется неравенство

$$2k^2(n-k) < (n-2k)^2. \quad (4)$$

Тогда

$$m_k(n) \geq 0.19 n^{1/4} \frac{2^{n-1}}{\binom{n-1}{k-1}}. \quad (5)$$

Сравним оценку (5) с предыдущими результатами. Ясно, что (5) асимптотически лучше, чем (2), но хуже (3) при $k \leq \delta \ln n$, где $\delta \in (0, 1/(2+4\ln 2))$. Но, в отличие от (3), оценка (5) верна для более широкой области значений k (см. условие (4)). Таким образом, полученная в теореме 1 оценка величины $m_k(n)$ улучшает предыдущие результаты при k , имеющем порядок роста между $\ln n$ и $\sqrt{n}$.

3. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы достаточно показать, что произвольный n -равномерный гиперграф, имеющий менее $0.19 n^{1/4} 2^{n-1} / \binom{n-1}{k-1}$ ребер, обладает свойством B_k .

Итак, рассмотрим n -равномерный гиперграф $G = (V, E)$, удовлетворяющий условию

$$|E| = m < 0.19 n^{1/4} \frac{2^{n-1}}{\binom{n-1}{k-1}}. \quad (6)$$

Пусть задана двухцветная раскраска χ множества вершин гиперграфа G . Будем называть ребро *хорошим* в раскраске χ , если в нем есть по крайней мере k вершин каждого из двух цветов. Иначе назовем ребро *плохим* в χ . Ясно, что гиперграф обладает свойством B_k тогда и только тогда, когда существует двухцветная раскраска, в которой все ребра хорошие. Мы построим некоторую случайную раскраску ξ , и оценим вероятность того, что в этой раскраске найдутся плохие ребра.

3.1. Вспомогательная аналитика. Часть 1. Сначала мы докажем одно неравенство, которое нам понадобится в дальнейшем. А именно, мы установим, что из условия $n \geq 14$ и неравенства (4) следует, что

$$k < \frac{n}{6}. \quad (7)$$

Сперва покажем, что $k < n/4$. Предположим противное: пусть $k \geq n/4$. Тогда $(n - 2k)^2 \leq n^2/4$. В свою очередь,

$$2k^2(n - k) \geq \frac{2n^2}{16}(n - k) > \frac{2n^3}{32} = \frac{n^3}{16}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $k \leq n/2$. Выражение $n^3/16$, очевидно, больше, чем $n^2/4$ для всех $n > 14$. Таким образом, получается, что $(n - 2k)^2 \leq 2k^2(n - k)$, что противоречит условию (4). Следовательно, $k < n/4$.

Теперь покажем, что $k < n/6$. Из (4), условия $n \geq 14$ и доказанной оценки $k < n/4$ получаем цепочку неравенств

$$k < \frac{n - 2k}{\sqrt{2n - 2k}} \leq \frac{n - 2k}{\sqrt{1.5n}} \leq \frac{n - 2k}{\sqrt{21}} \leq \frac{n - 2k}{4}.$$

Следовательно, $4k < n - 2k$, т.е. $k < n/6$. Неравенство (7) обосновано.

3.2. Построение случайной раскраски. Без ограничения общности будем считать, что $V = \{1, 2, \dots, w\}$. Рассмотрим случайную перестановку σ множества V , имеющую равномерное распределение на множестве всех перестановок. Для каждого $v \in V$ положим

$$F_v = \bigcup_{e \in E: v \in e} \left\{ \sum_{s \in e} I\{\sigma(s) > \sigma(v)\} \geq n - k \right\}, \quad \xi_v = I\{F_v\}. \quad (8)$$

Случайное отображение ξ , сопоставляющее вершине v случайную величину ξ_v , можно интерпретировать как случайную раскраску (если $\xi_v = 0$, то красим в красный

цвет, а если $\xi_v = 1$, то в синий). Обозначим через $\mathcal{F}$ событие, заключающееся в том, что в случайной раскраске ξ есть плохие ребра. Из построения случайной раскраски ξ (см. (8)) следует, что событие $\sum_{s \in e} \xi_s < k$ невозможно, поэтому плохим ребро e может только, если $\sum_{s \in e} \xi_s > n - k$. Тогда ясно, что

$$\mathcal{F} = \bigcup_{e \in E} \left\{ \sum_{s \in e} \xi_s > n - k \right\}. \quad (9)$$

Если нам удастся показать, что вероятность события $\mathcal{F}$ строго меньше 1, то это будет означать существование двухцветной раскраски множества V , в которой нет плохих ребер, т.е. мы докажем, что G обладает свойством B_k .

Случайная раскраска ξ является итогом следующего рандомизированного алгоритма. На первом шаге алгоритма все вершины графа G покрашены в красный цвет. На втором шаге перекрасим первые k (в соответствии со случайной нумерацией σ) вершин каждого ребра в синий цвет. Такой рандомизированный алгоритм является естественным обобщением алгоритма случайной раскраски вершин гиперграфа, предложенного в работе Плухара [9].

Рассмотрим произвольное ребро e графа G . Если e плохое после второго шага алгоритма, то по крайней мере одна из последних k (по нумерации σ) вершин ребра e перекрасилась в синий цвет. Если бы все k последних вершин ребра e остались красными, то ребро e было бы хорошим. Если одна из последних вершин перекрасилась, то, значит, нашлось другое ребро f , в котором эта вершина была среди первых k по нумерации. В такой ситуации мы будем говорить, что ребро e *портится* ребром f .

Пусть $e \in E$ – ребро G . Для каждой вершины $v \in e$ введем события

$$F_e(v) = \left\{ \sum_{s \in e} I\{\sigma(s) > \sigma(v)\} \geq n - k \right\}, \quad L_e(v) = \left\{ \sum_{s \in e} I\{\sigma(s) > \sigma(v)\} < k \right\}, \quad (10)$$

т.е. событие $F_e(v)$ состоит в том, что вершина v находится среди первых k вершин ребра e , а событие $L_e(v)$ – в том, что v находится среди последних k вершин ребра e . Для любых двух ребер e и f таких, что $e \cap f \neq \emptyset$, и любой вершины $v_0 \in e \cap f$ введем событие

$$X(e, f, v_0) = L_e(v_0) \cap F_f(v_0). \quad (11)$$

Из вышеприведенных рассуждений вытекает соотношение

$$\left\{ \sum_{s \in e} \xi_s > n - k \right\} \subset \bigcup_{f \in E} \bigcup_{v_0 \in e \cap f} X(e, f, v_0). \quad (12)$$

Далее, мы оценим вероятность события $X(e, f, v_0)$.

3.3. Оценка вероятности события $X(e, f, v_0)$. Рассмотрим два произвольных ребра e и f . Пусть они имеют h общих вершин, а v_0 – некоторая вершина из $e \cap f$. Введем следующие обозначения для случайных множеств:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{v \in e \cap f : \sigma(v) < \sigma(v_0)\}, & B_1 &= \{v \in e \cap f : \sigma(v) > \sigma(v_0)\}, \\ A_2 &= \{v \in e \setminus f : \sigma(v) > \sigma(v_0)\}, & B_2 &= \{v \in f \setminus e : \sigma(v) < \sigma(v_0)\}. \end{aligned}$$

Если выполнено событие $X(e, f, v_0)$, то

$$|\{v \in e : \sigma(v) > \sigma(v_0)\}| \leq k - 1.$$

Таким образом, из события $X(e, f, v_0)$ следует неравенство $|A_2| + |B_1| \leq k - 1$. Кроме того, из события $X(e, f, v_0)$ вытекает неравенство

$$|\{v \in f : \sigma(v) < \sigma(v_0)\}| \leq k - 1.$$

Следовательно, должно быть выполнено $|A_1| + |B_2| \leq k - 1$. В силу своего определения (см. (11)) событие $X(e, f, v_0)$ эквивалентно пересечению указанных событий, т.е.

$$X(e, f, v_0) = \{|A_1| + |B_2| \leq k - 1\} \cap \{|A_2| + |B_1| \leq k - 1\}. \quad (13)$$

Но мы знаем, что $|A_1| + |B_1| = h - 1$. Отсюда следует, что из события $X(e, f, v_0)$ вытекает соотношение $h + |A_2| + |B_2| \leq 2k - 1$. В случае $h \geq 2k$ последнее неравенство не может иметь места и, следовательно, событие $X(e, f, v_0)$ невозможно. Далее всюду будем рассматривать только случай $h \leq 2k - 1$.

Из (13) получаем очевидное соотношение

$$X(e, f, v_0) = \bigcup_{\substack{i, j, t \in \mathbb{Z}_+ \\ t+j \leq k-1, t \leq h-1 \\ i \leq k-h+t}} \{|A_2| = i, |B_2| = j, |A_1| = t\}. \quad (14)$$

Введем событие $X(e, f)$, равное объединению событий $X(e, f, v_0)$ по всем вершинам v_0 из пересечения ребер e и f :

$$X(e, f) = \bigcup_{v_0 \in e \cap f} X(e, f, v_0). \quad (15)$$

Тогда в силу (14) получаем следующую оценку вероятности события $X(e, f)$:

$$\begin{aligned} P(X(e, f)) &\leq h \sum_{t=\max(0, h-k)}^{\min(k-1, h-1)} \binom{h-1}{t} \sum_{i=0}^{k-h+t} \binom{n-h}{i} \sum_{j=0}^{k-1-t} \binom{n-h}{j} \\ &\quad \times \frac{(n-h-i+t+j)!(n-h-j+(h-1-t)+i)!}{(2n-h)!}. \end{aligned} \quad (16)$$

Далее, мы будем оценивать выражение, стоящее в правой части (16).

Оценим сначала внутреннюю сумму по i в правой части (16). Для этого найдем максимальное слагаемое в сумме, рассматривая отношение соседних слагаемых. Отношение слагаемых при i и $i+1$ равно

$$\begin{aligned} &\frac{\binom{n-h}{i}(n-h-i+t+j)!(n-j-1-t+i)!}{\binom{n-h}{i+1}(n-h-(i+1)+t+j)!(n-j-t+i)!} \\ &= \frac{(i+1)(n-h-i+t+j)}{(n-h-i)(n-j-t+i)} \leq \frac{k(n-h-i+k)}{(n-h-i)(n-k+i)} = S_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Последнее неравенство выполнено в силу очевидных соотношений $i+1 \leq k$ и $j+t \leq k$.
Функция

$$\frac{n-h-i+k}{n-h-i} = 1 + \frac{k}{n-h-i}$$

возрастает по i , а $i \leq k$, следовательно,

$$S_1 \leq \frac{k(n-h)}{(n-h-k)(n-k+i)} = S_2.$$

Функция

$$\frac{n-h}{n-h-k} = 1 + \frac{k}{n-h-k}$$

возрастает по h , $h \leq 2k$, поэтому выполнены неравенства

$$S_2 \leq \frac{k(n-2k)}{(n-3k)(n-k+i)} \leq \frac{k(n-2k)}{(n-3k)(n-k)} \leq \frac{kn}{(n-2k)^2} = \alpha(n, k) = \alpha.$$

Обоснуем последнее неравенство. Имеем

$$\begin{aligned} (n-2k)^3 &= n^3 - 6kn^2 + 12k^2n - 8k^3 \leq n^3 - 6kn^2 + 12k^2n, \\ n(n-3k)(n-k) &= n^3 - 4kn^2 + 3k^2n. \end{aligned}$$

В силу (7) выполняется соотношение $6k < n$. Тогда $2kn^2 > 9k^2n$ и

$$n(n-3k)(n-k) > (n-2k)^3.$$

Из условия (4) теоремы следует, что

$$\alpha = \frac{kn}{(n-2k)^2} < 1.$$

Следовательно, максимальное слагаемое в сумме достигается при максимальном i , равном $k-h+t$, а вся сумма оценивается сверху максимальным слагаемым, умноженным на $(1-\alpha)^{-1}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} P(X(e, f)) &\leq h \sum_{t=\max(0, h-k)}^{\min(k-1, h-1)} \binom{h-1}{t} \sum_{j=0}^{k-1-t} \binom{n-h}{k-h+t} \binom{n-h}{j} (1-\alpha)^{-1} \\ &\quad \times \frac{(n-k+j)!(n-k-1-h-j)!}{(2n-h)!}. \end{aligned} \quad (18)$$

Внутреннюю сумму по j в правой части (18) также будем оценивать с помощью выделения максимального слагаемого. Отношение слагаемых при j и $j+1$ равно

$$\begin{aligned} &\frac{\binom{n-h}{j}(n-k+j)!(n-k-1-h-j)!}{\binom{n-h}{j+1}(n-k+j+1)!(n-k-h-j-2)!} \\ &= \frac{(j+1)(n-k-h-j-1)}{(n-h-j)(n-k+j+1)} \leq \frac{kn}{(n-2k)^2} = \alpha < 1. \end{aligned}$$

Предпоследнее неравенство в цепочке получается точно так же, как это было сделано при оценивании суммы по i . Надо лишь заменить в выражении S_1 (см. (17)) i на j и заметить, что оцениваемая величина

$$(j+1)(n-k-h-j-1)(n-h-j)^{-1}(n-k+j+1)^{-1}$$

не превосходит S_1 с подставленным j всюду вместо i .

Получаем, что, как и в случае с суммой по i , максимальное слагаемое достигается при максимальном $j = k - 1 - t$, а вся сумма оценивается сверху максимальным слагаемым, умноженным на $(1-\alpha)^{-1}$. Следовательно, из (18) получаем неравенство

$$\begin{aligned} P(X(e, f)) \leq (1-\alpha)^{-2} h \sum_{t=\max(0, h-k)}^{\min(k-1, h-1)} \binom{h-1}{t} \binom{n-h}{k-h+t} \binom{n-h}{k-1-t} \\ \times \frac{(n-1-t)!(n-h+t)!}{(2n-h)!}. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь оценим отношение последних трех факториалов. Для этого мы используем хорошо известные оценки для $n!$:

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n}\right).$$

Получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} & \frac{(n-t-1)!(n-h+t)!}{(2n-h)!} \\ & \leq \frac{2\pi n(n-t-1)^{n-t-1}(n-h+t)^{n-h+t}}{\sqrt{2\pi(2n-h)}(2n-h)^{2n-h}} \exp\left(1 + \frac{1}{12(n-t-1)} + \frac{1}{12(n-h+t)}\right) \\ & = \frac{2\pi n((n-t-1)/n)^{n-t-1}((n-h+t)/n)^{n-h+t}}{\sqrt{2\pi(2n-h)}((2n-h)/n)^{2n-h}} n^{-1} \\ & \quad \times \exp\left(1 + \frac{1}{12(n-t-1)} + \frac{1}{12(n-h+t)}\right) \\ & = \frac{\sqrt{2\pi}(1-(t+1)/n)^{n-t-1}(1-(h-t)/n)^{n-h+t}}{\sqrt{2n-h} 2^{2n-h} (1-h/(2n))^{2n-h}} \\ & \quad \times \exp\left(1 + \frac{1}{12(n-t-1)} + \frac{1}{12(n-h+t)}\right) \\ & \leq \frac{\sqrt{2\pi} \exp(-(t+1)(n-t-1)/n) \exp(-(h-t)(n-h+t)/n)}{\sqrt{2n-h} 2^{2n-h} \exp(-h(2n-h)/(2n-h))} \\ & \quad \times \exp\left(1 + \frac{1}{12(n-t-1)} + \frac{1}{12(n-h+t)}\right) = S. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\exp(x/(1+x)) \leq 1+x \leq \exp(x)$ для $x > -1$. Тогда

$$\begin{aligned} S &\leq 2^{h-2n} \exp\left(\frac{1}{6(n-k)}\right) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2n-h}} \\ &\quad \times \exp(h+1) \exp\left(-\frac{(t+1)(n-t-1)}{n}\right) \exp\left(-\frac{(h-t)(n-h+t)}{n}\right) \\ &\leq 2^{h-2n} \exp\left(\frac{1}{6(n-k)}\right) \exp\left(\frac{2k^2}{n}\right) \sqrt{\frac{\pi}{n-k}}, \end{aligned}$$

где последнее неравенство выполнено в силу того, что

$$\begin{aligned} &\frac{-(t+1)(n-t-1)}{n} - \frac{(h-t)(n-h+t)}{n} \\ &= -(h+1) + \frac{(t+1)^2 + (h-t)^2}{n} \leq -(h+1) + \frac{2k^2}{n} \end{aligned}$$

и $\sqrt{2n-h} \geq \sqrt{2n-2k}$.

В итоге получаем оценку вероятности события $X(e, f)$:

$$\begin{aligned} P(X(e, f)) &\leq (1-\alpha)^{-2} \sum_{t=\max(0, h-k)}^{\min(k-1, h-1)} h \binom{h-1}{t} \binom{n-h}{k-h+t} \binom{n-h}{k-1-t} \\ &\quad \times 2^{h-2n} \exp\left(\frac{2k^2}{n} + \frac{1}{6(n-k)}\right) \sqrt{\frac{\pi}{n-k}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Посмотрим на общее слагаемое в сумме из правой части (20) как на функцию от h . Покажем, что это убывающая функция. Отношение значений общего слагаемого суммы при h и $h+1$ равно

$$\begin{aligned} \frac{h}{h+1} \frac{\binom{h-1}{t} \binom{n-h}{k-h+t} \binom{n-h}{k-1-t} 2^h}{\binom{h}{t} \binom{n-h-1}{k-h-1+t} \binom{n-h-1}{k-1-t} 2^{h+1}} &= \frac{(n-h)^2(h-t)}{2(h+1)(k-h+t)(n-h-k+t)} \\ &\geq \frac{(n-2k)^2}{2k^2(n-k)} = \delta. \end{aligned} \quad (21)$$

Поясним последнее неравенство. Положим $x = h - t$, тогда выражение

$$\frac{(n-h)^2(h-t)}{2(h+1)(k-h+t)(n-h-k+t)} = \frac{x}{x+t+1} \times \frac{(n-h)^2}{2(k-x)(n-x-k)}$$

является возрастающей функцией параметра x . Отсюда из ограничений

$$x = h - t \geq 1, \quad t \leq k - 1, \quad h < 2k$$

получаем (21).

По условию (4) теоремы величина δ строго больше 1. Следовательно, каждое слагаемое в правой части (20) есть убывающая функция от h . Тогда для любого t в силу ограничения $h \geq t+1$ получаем неравенство

$$h \binom{h-1}{t} \binom{n-h}{k-h+t} \binom{n-h}{k-1-t} 2^h \leq \binom{n-t-1}{k-1} \binom{n-t-1}{k-1-t} 2^{t+1} (t+1).$$

Отсюда в силу (20) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} P(X(e, f)) &\leq (1 - \alpha)^{-2} \sum_{t=\max(0, h-k)}^{\min(k-1, h-1)} \binom{n-t-1}{k-1} \binom{n-t-1}{k-1-t} 2^{t+1} \\ &\quad \times 2^{-2n} \exp\left(\frac{2k^2}{n} + \frac{1}{6(n-k)}\right) \sqrt{\frac{\pi}{n-k}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Ясно, что при увеличении количества положительных слагаемых сумма возрастает, поэтому

$$\begin{aligned} P(X(e, f)) &\leq (1 - \alpha)^{-2} \sum_{t=0}^{\min(k-1, h-1)} (t+1) \binom{n-t-1}{k-1} \binom{n-t-1}{k-1-t} 2^{t+1} \\ &\quad \times 2^{-2n} \exp\left(\frac{2k^2}{n} + \frac{1}{6(n-k)}\right) \sqrt{\frac{\pi}{n-k}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Найдем максимальное слагаемое в сумме по t , рассматривая, как и раньше, отношение соседних слагаемых. Отношение слагаемых при t и $t+1$ равно

$$\begin{aligned} \frac{(t+1) \binom{n-t-1}{k-1} \binom{n-t-1}{k-1-t}}{(t+2) \binom{n-t-2}{k-1} \binom{n-t-2}{k-1-t-1}} &= \frac{(t+1)(n-t-1)^2}{(t+2)2(k-1-t)(n-t-k)} \\ &\geq \frac{(n-k)^2}{4k(n-k)} = \frac{n-k}{4k} = \gamma^{-1} > 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Поясним последнее неравенство. Из условия (4) вытекает, что $2k^2 < (n-k)$, откуда получаем, что $4k \leq 2k^2 < (n-k)$, т.е. $\gamma = 4k/(n-k) < 1$.

Таким образом, максимальному слагаемому отвечает $t=0$, а вся сумма оценивается сверху максимальным слагаемым, умноженным на $(1-\gamma)^{-1}$. В итоге получаем окончательную верхнюю оценку вероятности события $X(e, f)$:

$$P(X(e, f)) \leq (1 - \alpha)^{-2} (1 - \gamma)^{-1} \binom{n-1}{k-1}^2 2^{1-2n} \exp\left(\frac{2k^2}{n} + \frac{1}{6(n-k)}\right) \sqrt{\frac{\pi}{n-k}}. \quad (25)$$

3.4. Вспомогательная аналитика. Часть 2. В данном пункте доказательства мы оценим множитель

$$T(n, k) = (1 - \alpha)^{-2} (1 - \gamma)^{-1} \exp\left(\frac{2k^2}{n} + \frac{1}{6(n-k)}\right) \sqrt{\frac{\pi}{n-k}},$$

входящий в правую часть оценки (25). Мы будем пользоваться ограничениями (4) ($2k^2(n-k) < (n-2k)^2$) и $n \geq 14$ из условия теоремы, а также доказанным неравенством (7) ($k < n/6$).

Имеет место следующий набор соотношений:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{kn}{(n-2k)^2} \leq \frac{n}{2k(n-k)} \leq \frac{n}{4(5/6)n} = \frac{3}{10}, \\ \gamma &= \frac{4k}{n-k} \leq \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{6(n-k)} < \frac{1}{5n} < \frac{1}{70}, \\ \frac{2k^2}{n} &\leq \frac{(n-2k)^2}{n(n-k)} < 1, \quad \sqrt{\frac{\pi}{n-k}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\frac{n}{n-k}} \leq \sqrt{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\frac{6}{5}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из неравенств (26) получаем итоговую верхнюю оценку множителя $T(n, k)$:

$$\begin{aligned} T(n, k) &= (1 - \alpha)^{-2} (1 - \gamma)^{-1} e^{1/(6(n-k)) + (2k^2)/n} \sqrt{\frac{\pi}{n-k}} \\ &\leq \left(\frac{10}{7}\right)^2 5e^{71/70} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\frac{6}{5}} < 2(0.19)^{-2} \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (27)$$

3.5. Завершение доказательства. Завершим доказательство теоремы 1. Из (25) и (27) следует, что

$$P(X(e, f)) < (0.19)^{-2} 2^{2-2n} \binom{n-1}{k-1}^2 \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (28)$$

Заметим, что в силу соотношений (9), (12), (15) выполнено соотношение

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{e, f} X(e, f). \quad (29)$$

Тогда вероятность события $\mathcal{F}$ оценивается сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}) &\leq P\left(\bigcup_{e, f} X(e, f)\right) \leq |E|^2 \max_{e, f} P(X(e, f)) \\ &< |E|^2 (0.19)^{-2} 2^{2-2n} \binom{n-1}{k-1}^2 \frac{1}{\sqrt{n}} < 1. \end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из условия (6) на гиперграф G .

Подведем итоги. Мы показали, что вероятность события $\mathcal{F}$ строго меньше единицы. Значит, с положительной вероятностью в случайной раскраске ξ не будет плохих ребер. Следовательно, G обладает свойством B_k . В силу произвольности выбора G с условием (6) получаем искомое неравенство

$$m_k(n) \geq 0.19 \sqrt[n]{\frac{2^{n-1}}{\binom{n-1}{k-1}}}.$$

Теорема 1 доказана.

4. Задачи о классах гиперграфов с ограничением на пересечение ребер

Рассмотрим следующее обобщение задачи о свойстве B_k . Будем говорить, что гиперграф обладает свойством A_h , если любые два ребра гиперграфа либо не пересекаются, либо имеют не менее h общих вершин. Определим величину $m_{k,h}(n)$ как минимальное возможное количество ребер гиперграфа, обладающего свойством A_h , но не обладающего свойством B_k . Отметим, что в случае $h \geq 2k$ данная задача не имеет смысла. Легко понять, что любой гиперграф, обладающий свойством A_{2k} , обладает и свойством B_k , поэтому величина $m_{k,h}(n)$ не существует при $h \geq 2k$. Наилучшая нижняя оценка этой величины в нетривиальном случае была получена Шабановым (см. [7]):

$$m_{k,h}(n) \geq c \left(\frac{3n}{2h \ln n} \right)^{h/3} \frac{2^{n-1}}{\binom{n}{k-1}}, \quad (30)$$

где $k = O(h \ln n)$ и $h < 2k$.

Кроме того, всегда верна оценка

$$m_{k,h}(n) \geq m_k(n),$$

т.е. для $m_{k,h}(n)$ имеют место те же нижние оценки, что и для $m_k(n)$, в том числе и (5). Следующая теорема дает новую нижнюю оценку для $m_{k,h}(n)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k < h < 2k$ и выполнено неравенство (4). Тогда

$$m_{k,h}(n) \geq \frac{0.19n^{1/4}2^{n-1}}{\sqrt{2^{h-k}(h-k+1)\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{2k-1-h}}}. \quad (31)$$

Несложно проверить, что в условиях теоремы 2 отношение правых частей оценок (31) и (5) оценивается снизу выражением вида $(c_0 n/k)^{(h-k)/2}$, где c_0 – некоторая универсальная константа. Таким образом, (31) лучше оценивает величину $m_{k,h}(n)$, нежели (5). Кроме того, по сравнению с ранее известным результатом (30) теорема 2 существенно расширяет область значений параметра k , для которых получена нетривиальная нижняя оценка $m_{k,h}(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 проводится тем же способом, что и доказательство теоремы 1. Нам достаточно показать, что произвольный n -равномерный гиперграф $H = (V, E)$, обладающий свойством A_h , количество ребер которого удовлетворяет неравенству

$$|E| < \frac{0.19n^{1/4}2^{n-1}}{\sqrt{2^{h-k}(h-k+1)\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{2k-1-h}}},$$

обладает и свойством B_k .

Пусть $H = (V, E)$ – такой гиперграф. Рассмотрим случайную раскраску ξ , которая была построена в доказательстве теоремы 1 (см. (8)). В доказательстве теоремы 1 было обосновано (см. (29)), что событие $\mathcal{F}$, заключающееся в том, что в случайной раскраске ξ гиперграф H имеет плохие ребра, содержится в объединении по e и f событий $X(e, f)$ (см. определение (15)), где e и f – два различных ребра H , имеющие непустое пересечение. Согласно (22) в условиях теоремы 1 (т.е. при выполнении (31)) выполнено неравенство

$$\begin{aligned} P(X(e, f)) &\leq (1 - \alpha)^{-2} \sum_{t=\max(0, l-k)}^{\min(k-1, l-1)} (t+1) \binom{n-t-1}{k-1} \binom{n-t-1}{k-1-t} 2^{t+1} \\ &\times 2^{-2n} \exp\left(\frac{2k^2}{n} + \frac{1}{6(n-k)}\right) \sqrt{\frac{\pi}{n-k}}, \end{aligned} \quad (32)$$

где $l = |e \cap f|$. По условию теоремы 2 $\max(0, l-k) = l-k \geq h-k$. Тогда можно увеличить сумму, считая, что t изменяется от $h-k$ до $k-1$. Найдем максимальное слагаемое в сумме, рассматривая отношение соседних слагаемых. Как и в теореме 1, получаем, что максимальному слагаемому отвечает минимальное значение $t = h-k$

(подробнее см. оценки (24)), а вся сумма оценивается сверху максимальным слагаемым, умноженным на $(1 - \gamma)^{-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} P(X(e, f)) &\leq (1 - \alpha)^{-2}(h - k + 1) \binom{n - h + k - 1}{2k - 1 - h} \binom{n - h + k - 1}{k - 1} \\ &\quad \times (1 - \gamma)^{-1} 2^{h-k+1} \left(2^{-2n} \exp\left(\frac{1}{6(n-k)} + \frac{2k^2}{n}\right) \sqrt{\frac{\pi}{n-k}} \right). \end{aligned}$$

Далее, согласно (27) получаем итоговую оценку вероятности события $X(e, f)$:

$$P(X(e, f)) \leq (0.19)^{-2} 2^{2-2n} (h - k + 1) \binom{n - 1}{2k - 1 - h} \binom{n - 1}{k - 1} 2^{h-k} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

В итоге, вероятность события $\mathcal{F}$ оценивается сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}) &\leq \sum_{e, f} P(X(e, f)) \\ &< |E|^2 (0.19)^{-2} 2^{2-2n} (h - k + 1) \binom{n - 1}{2k - 1 - h} \binom{n - 1}{k - 1} 2^{h-k} \frac{1}{\sqrt{n}} < 1. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что с положительной вероятностью в случайной раскраске ξ не будет плохих ребер. Значит, H обладает свойством B_k , и в силу произвольности выбора H получаем искомое неравенство

$$m_{k,h}(n) \geq 0.19 \frac{2^{n-1} \sqrt[4]{n}}{\sqrt{\binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{2k-1-h} 2^{h-k} (h-k+1)}}.$$

Теорема 2 доказана.

5. Простые гиперграфы

Еще одно обобщение задачи Эрдеша–Хайнала о свойстве B связано с простыми гиперграфами. *Простым гиперграфом* называется гиперграф, любые два ребра которого имеют не более одной общей вершины. Обозначим через $m^*(n)$ величину, равную минимальному возможному числу ребер в простом n -равномерном гиперграфе, не обладающем свойством B . Впервые задача об отыскании величины $m^*(n)$ была поставлена Эрдешем и Ловасом (см. [10]). Ими были получены следующие результаты:

$$c_1 \frac{4^n}{n^3} \leq m^*(n) \leq c_2 n^4 4^n. \quad (33)$$

Позже нижняя оценка была улучшена Сабо [11]. Он доказал, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0(\varepsilon)$ выполнено

$$m^*(n) \geq 4^n n^{-\varepsilon}.$$

Рассмотрим естественное обобщение этой задачи, заключающееся в поиске величины $m_k^*(n)$, равной минимальному возможному числу ребер простого n -равномерного гиперграфа, не обладающего свойством B_k . Нами получена новая нижняя оценка величины $m_k^*(n)$, сформулированная в теореме 3.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $2k^2(n - k - 1) < (n - 2k - 1)^2$. Тогда

$$m_k^*(n) \geq \frac{(0.19)^2}{8e} \frac{2^{2n-2}}{(n-1)^{3/2} \binom{n-2}{k-1}^2}.$$

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующая теорема, которая дает достаточное условие обладания свойством B_k для n -равномерного гиперграфа.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $H = (V, E)$ – n -равномерный гиперграф, каждое ребро которого пересекается не более чем с D другими ребрами. Пусть, кроме того, выполнено неравенство (31). Если

$$D \leq \frac{0.19}{\sqrt{4e}} n^{1/4} \frac{2^{n-1}}{\binom{n-1}{k-1}} - 1, \quad (34)$$

то H обладает свойством B_k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $H = (V, E)$ – n -равномерный гиперграф такой, что каждое его ребро пересекается не более чем с D другими ребрами.

Пусть ξ – случайная раскраска V , построенная так же, как в доказательстве теоремы 1 (см. (8)). Из (29) следует, что событие $\mathcal{F}$, заключающееся в том, что в случайной раскраске ξ гиперграф H имеет плохие ребра, содержится в объединении событий $\{X(e, f) : e, f \in E, e \cap f \neq \emptyset\}$. Если мы докажем, что

$$P\left(\bigcap_{e,f} \overline{X(e, f)}\right) > 0,$$

то это будет означать, что с положительной вероятностью в ξ не будет плохих ребер, и, таким образом, будет обосновано, что H обладает свойством B_k .

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующая теорема, доказательство которой можно найти в [12].

ТЕОРЕМА 5 (Локальная лемма Ловаса). Пусть $A_1, \dots, A_n$ – события, $P(A_i) \leq p$ для всех i и для любого i найдется множество событий $S_i \subset \{A_1, \dots, A_n\} \setminus A_i$ такое, что $|S_i| \leq d$ и A_i независимо с алгеброй, порожденной событиями $\{A_1, \dots, A_n\} \setminus (S_i \cup A_i)$. Тогда если $e(d+1)p < 1$, то

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) > 0.$$

В силу построения случайной раскраски ξ событие $X(e, f)$ (см. определения (15) и (11)) независимо с алгеброй, порожденной событиями

$$\{X(g, u) : g, u \in E, g \cap u \neq \emptyset, (g \cup u) \cap (e \cup f) = \emptyset\}.$$

Для события $X(e, f)$ введем набор событий

$$S(e, f) = \{X(g, u) : g, u \in E, g \cap u \neq \emptyset, (g \cup u) \cap (e \cup f) \neq \emptyset\}.$$

По условию теоремы 4 количество элементов в $S(e, f)$ не превосходит $4(D+1)^2 - 1$. Согласно (28) вероятность события $X(e, f)$ для любых e и f не превосходит

$$P(X(e, f)) \leq (0.19)^{-2} \binom{n-1}{k-1}^2 2^{1-2n} \sqrt{\frac{1}{n}} = P^*.$$

Тогда в силу (34) выполняется неравенство

$$e(4(D+1)^2 - 1 + 1)P^* < 1$$

и, следовательно, применима локальная лемма с параметрами $d = 4(D+1)^2 - 1$, $p = P^*$ для набора событий $X(e, f)$. Из нее получаем, что

$$P(\overline{\mathcal{F}}) \geq P\left(\bigcap_{e,f} \overline{X(e, f)}\right) > 0.$$

Теорема 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из теоремы 4 мы знаем, что если дан n -равномерный гиперграф, каждое ребро которого пересекается не более чем с D другими ребрами, где

$$D \leq \frac{0.19}{\sqrt{4e}} n^{1/4} \frac{2^{n-1}}{\binom{n-1}{k-1}} - 1,$$

то данный гиперграф обладает свойством B_k . Обозначим

$$X(n) = \frac{0.19}{\sqrt{4e}} n^{1/4} \frac{2^{n-1}}{\binom{n-1}{k-1}} - 1.$$

Тогда если n -равномерный гиперграф не обладает свойством B_k , то в нем найдется ребро e_0 , пересекающееся более чем с $X(n)$ другими ребрами. Значит, найдется вершина $v_0 \in e_0$ такая, что

$$\deg v_0 \geq \frac{X(n)}{n} + 1.$$

Итак, пусть $H = (V, E)$ есть n -равномерный гиперграф, не обладающий свойством B_k . Рассмотрим $(n-1)$ -равномерный гиперграф $H_1 = (V, E_1)$, который получается из H выкидыванием из каждого ребра вершины (ровно одной) максимальной степени. Ясно, что H_1 не обладает свойством B_k , так как исходный гиперграф H этим свойством не обладал. Тогда из приведенных выше рассуждений следует, что найдется вершина $v_1 \in V$ с условием

$$\deg_{H_1} v_1 \geq \frac{X(n-1)}{n-1} + 1.$$

Рассмотрим все ребра, содержащие вершину v_1 . Мы только что удалили из каждого такого ребра вершину максимальной степени. Восстановим эти вершины. Исходный гиперграф H является простым, следовательно, все эти восстановленные вершины будут различны. Пусть $u_1, \dots, u_m$ — эти вершины, причем

$$m \geq \deg_{H_1} v_1 \geq \frac{X(n-1)}{n-1} + 1.$$

Степень каждой вершины u_j в гиперграфе H будет также не меньше, чем $\deg_{H_1} v_1$, причем любые u_i и u_j имеют не более одного общего ребра.

Через каждую восстановленную вершину проходит не менее, чем $A = X(n-1)/(n-1)$ ребер. Тогда общее количество ребер в графе оценивается снизу суммой

$$A + (A-1) + (A-2) + \dots = \binom{A+1}{2}.$$

Осталось подставить в это выражение значение A . Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Erdős, A. Hajnal, “On a property of families of sets”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **12**:1-2 (1961), 87–123.
- [2] P. Erdős, “On a combinatorial problem”, *Nordisk Mat. Tidskr.*, **11** (1963), 5–10.
- [3] P. Erdős, “On a combinatorial problem. II”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **15**:3-4 (1964), 445–447.
- [4] A. V. Kostochka, “Color-critical graphs and hypergraphs with few edges: a survey”, *More Sets, Graphs and Numbers*, Bolyai Soc. Math. Stud., **15**, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 175–197.
- [5] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, “Improved bounds and algorithms for hypergraph 2-coloring”, *Random Structures Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32.
- [6] Д. А. Шабанов, “Об одной комбинаторной задаче Эрдеша”, *Докл. РАН*, **396**:2 (2004), 166–169.
- [7] Д. А. Шабанов, “Экстремальные задачи для раскрасок равномерных гиперграфов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:6 (2007), 183–222.
- [8] Д. А. Шабанов, “Рандомизированные алгоритмы раскрасок гиперграфов”, *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 139–160.
- [9] A. Pluhár, “Greedy colorings for uniform hypergraphs”, *Random Structures Algorithms*, **35**:2 (2009), 216–221.
- [10] P. Erdős, L. Lovász, “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions”, *Infinite and Finite Sets*, v. II, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **10**, North-Holland, Amsterdam, 1975, 609–627.
- [11] Z. Szabó, “An application of Lovász Local Lemma – a new lower bound for the van der Waerden number”, *Random Structures Algorithms*, **1**:3 (1990), 343–360.
- [12] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.

А. П. Розовская

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: anarozovski@gmail.com

Поступило

09.12.2009

Исправленный вариант

23.02.2011