Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Верников, Письмо в редакцию, *Матем. заметки*,
2010, том 88, выпуск 6, 953–954

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8606>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:47:11

Письмо в редакцию

Б. М. Верников

В работе [1] предложено описание дистрибутивных, кодистрибутивных, стандартных, костандартных и нейтральных элементов решетки надкоммутативных многообразий полугрупп. Чтобы сформулировать этот результат точнее, нам понадобится ряд обозначений.

Пусть m и n – натуральные числа, причем $2 \leq m \leq n$. Разбиением числа n на m частей называется последовательность $\lambda = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m)$ натуральных чисел такая, что

$$\sum_{i=1}^m \ell_i = n, \quad \ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_m.$$

Множество всех разбиений числа n на m частей обозначается $\Lambda_{n,m}$. Пусть $\lambda \in \Lambda_{n,m}$. Через $W_{n,m,\lambda}$ обозначается множество всех слов длины n , зависящих от букв $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, в которые буква x_i входит ℓ_i раз для всякого $i = 1, 2, \dots, m$. Обозначим через $\mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{M}$ многообразие всех полугрупп, через $\mathcal{S}_n$ – многообразие полугрупп, заданное всеми уравновешенными тождествами длины $\geq n$, через $\mathcal{S}_{n,m}$ – подмногообразие в $\mathcal{S}_{n+1}$, заданное внутри $\mathcal{S}_{n+1}$ всеми уравновешенными тождествами длины n от $\leq m$ букв (при этом мы считаем, что $\mathcal{S}_{n,1} = \mathcal{S}_{n+1}$), через $\mathcal{S}_{n,m,\lambda}$ – подмногообразие в $\mathcal{S}_{n,m-1}$, заданное внутри $\mathcal{S}_{n,m-1}$ всеми уравновешенными тождествами вида $u = v$, где $u \in W_{n,m,\lambda}$. Через $\mathbf{OC}$ обозначается решетка всех надкоммутативных многообразий полугрупп.

Основной результат указанной выше работы утверждает, что для произвольного надкоммутативного многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) $\mathcal{V}$ – дистрибутивный элемент решетки $\mathbf{OC}$;
- (ii) $\mathcal{V}$ – кодистрибутивный элемент решетки $\mathbf{OC}$;
- (iii) $\mathcal{V}$ – стандартный элемент решетки $\mathbf{OC}$;
- (iv) $\mathcal{V}$ – костандартный элемент решетки $\mathbf{OC}$;
- (v) $\mathcal{V}$ – нейтральный элемент решетки $\mathbf{OC}$;
- (vi) $\mathcal{V}$ – одно из многообразий $\mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{M}$, $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{S}_{n,m}$ и $\mathcal{S}_{n,m,\lambda}$, где $2 \leq m \leq n$ и $\lambda \in \Lambda_{n,m}$.

В действительности условия (i)–(v) эквивалентны и имеет место импликация (vi) $\Rightarrow$ (v), но импликация (v) $\Rightarrow$ (vi) неверна. В самом деле, хорошо известно, что множество всех нейтральных элементов произвольной решетки L образует подрешетку в L . Между тем, множество многообразий

$$S = \{\mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{M}, \mathcal{S}_n, \mathcal{S}_{n,m}, \mathcal{S}_{n,m,\lambda} \mid 2 \leq m \leq n, \lambda \in \Lambda_{n,m}\}$$

не замкнуто относительно пересечений: если множество $\Lambda_{n,m}$ содержит более k разбиений и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – попарно различные разбиения из $\Lambda_{n,m}$, то

$$\bigwedge_{i=1}^k \mathcal{S}_{n,m,\lambda_i} \notin S.$$

Чтобы указать на допущенную в нашей работе ошибку, введем новые обозначения. Положим

$$\Lambda = \bigcup_{2 \leq m \leq n} \Lambda_{n,m}.$$

Если $\mathcal{V}$ – надкоммутативное многообразие полугрупп, ν – соответствующая этому многообразию вполне инвариантная конгруэнция на абсолютно свободной полугруппе F счетного ранга, а $\lambda \in \Lambda$, то через ν_λ обозначается ограничение конгруэнции ν на множество $W_{n,m,\lambda}$. В нашей работе доказывается (и эта часть рассуждений верна), что каждое из свойств (i)–(v) эквивалентно следующему условию:

(vii) для всякого разбиения $\lambda \in \Lambda$ отношение ν_λ является либо универсальным отношением, либо отношением равенства.

Далее в нашей работе утверждается, что многообразие $\mathcal{V}$ обладает свойством (vii) тогда и только тогда, когда оно принадлежит множеству S . Это утверждение никак не обосновывается, а объявляется очевидным.¹ Чтобы убедиться в том, что указанное утверждение неверно, достаточно привести пример многообразия, обладающего свойством (vii), но не принадлежащего множеству S . Обозначим через $\mathcal{K}$ многообразие полугрупп, заданное всеми уравновешенными не перестановочными тождествами. Учитывая, что многообразия $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{S}_{n,m}$ и $\mathcal{S}_{n,m,\lambda}$ удовлетворяют любому перестановочному тождеству длины $n+1$, а в $\mathcal{K}$ никакое перестановочное тождество не выполнено, мы получаем, что $\mathcal{K} \notin S$. В то же время, многообразие $\mathcal{K}$ обладает свойством (vii), так как если ξ – вполне инвариантная конгруэнция на полугруппе F , соответствующая многообразию $\mathcal{K}$, а $\lambda \in \Lambda_{n,m}$, то отношение ξ_λ является отношением равенства при $m = n$ и универсальным отношением при $m < n$.

Автором совместно с В. Ю. Шапрынским получено верное описание многообразий, удовлетворяющих условиям (i)–(v). Чтобы сформулировать этот результат, нам понадобятся новые обозначения. Пусть

$$\lambda = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) \in \Lambda_{n,m}.$$

Числа $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ называются компонентами разбиения λ . Обозначим через $q(\lambda)$ число компонент разбиения λ , равных 1 (если $\ell_m > 1$, то $q(\lambda) = 0$), а через $r(\lambda)$ сумму всех компонент разбиения λ , больших 1 (если $\ell_1 = 1$, то $r(\lambda) = 0$). Положим

$$s(\lambda) = \max\{r(\lambda) - q(\lambda) - \delta, 0\},$$

где $\delta = 0$, если $n = 3$, $m = 2$ и $\lambda = (2, 1)$, и $\delta = 1$ во всех остальных случаях. Для всякого $\lambda = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) \in \Lambda_{n,m}$ и $k \geq 0$ положим

$$\lambda^k = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{m+k}), \quad \text{где } \ell_{m+1} = \dots = \ell_{m+k} = 1$$

(в частности, $\lambda^0 = \lambda$), и

$$\mathcal{U}_\lambda = \bigwedge_{i=0}^{s(\lambda)} \mathcal{W}_{n+i, m+i, \lambda^i},$$

где $\mathcal{W}_{k,\ell,\mu}$ – многообразие, заданное всеми тождествами вида $u = v$, где $u, v \in W_{k,\ell,\mu}$. Справедливо следующее утверждение, доказательству которого будет посвящена отдельная работа.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ обладает любым из свойств (i)–(v) тогда и только тогда, когда либо $\mathcal{V} = \mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{V} = \bigwedge_{i=1}^k \mathcal{U}_{\lambda_i}$ для некоторых разбиений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \Lambda$.

Автор благодарит В. Ю. Шапрынского, обратившего его внимание на указанную выше ошибку и внесшего значительный вклад в ее исправление.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Б. М. Верников, “Специальные элементы решетки надкоммутативных многообразий полугрупп”, *Матем. заметки*, **70:5** (2001), 670–678.

Б. М. Верников

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

E-mail: boris.vernikov@usu.ru

Поступило

06.10.2009

¹Фактически это сделано в следующей фразе из доказательства теоремы 2 нашей работы: “Доказываемые импликации, очевидно, эквивалентны тому, что для всякого $\lambda \in \Lambda$ конгруэнция ν_λ является либо универсальным отношением, либо отношением равенства на W_λ ”. Именно эта фраза и является ошибочной.