Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Поляков, Пример расходящегося ряда Фурье по системе Виленкина, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 5, 780–787

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8607>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:20:27

Пример расходящегося ряда Фурье по системе Виленкина

И. В. Поляков

В данной работе построен пример функции из класса $Lo(\sqrt{\ln^+ L})$, ряд Фурье–Виленкина которой расходится почти всюду.

Библиография: 5 названий.

Для тригонометрической системы широко известны классические результаты Карлесона и Колмогорова о сходимости и расходимости рядов Фурье. Усилением теоремы Карлесона является результат Антонова [1]. Он показал, что для всякой функции из класса $L \ln^+ L \ln^+ \ln^+ \ln^+ L([0, 2\pi])$ ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней почти всюду. Это наилучший результат, касающийся сходимости для данной системы.

Аналогичный результат получен для системы Уолша (в нумерации Пэли) Сьелином и Сория в [2]. В то же время многие авторы обобщали пример Колмогорова. Одним из последних результатов в этом направлении является теорема, доказанная Конягиным в [3].

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ и последовательность $\{\psi(m)\}$ удовлетворяют следующим условиям: функция $\varphi(u)/u$ является неубывающей на $(0, +\infty)$, $\psi(m) \geq 1$, $m = 1, 2, \dots$, и $\varphi(m)\psi(m) = o(m\sqrt{\ln m}/\sqrt{\ln \ln m})$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда найдется функция $f \in L[-\pi, \pi]$ такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(|f(x)|) dx < \infty$$

и $\limsup_{m \rightarrow \infty} S_m(f, x)/\psi(m) = \infty$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$, где $S_m(f)$ – m -я частная сумма тригонометрического ряда Фурье функции f .

Для системы Уолша Бочкарев в [4] получил следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F(u) = uf(u)$, где $f(u)$ – неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $f(0) = 1$ и $f(u)$ удовлетворяет условию

$$f(u) = o(\sqrt{\log u}) \quad \text{при } u \rightarrow \infty.$$

Тогда существует такая функция $g \in F(L)$, ряд Фурье–Уолша–Пэли которой расходится всюду на $[0, 1)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00321) и программы “Ведущие научные школы” (проект НШ-3252.2010.1).

Обобщением системы Уолша служат мультипликативные ортонормированные системы функций, введенные Н. Я. Виленкиным.

Целью данной работы является построение примера, который является обобщением примера Бочкарева на случай систем Виленкина. При этом мы в значительной степени используем идеи конструкции Бочкарева.

Приведем необходимые определения.

Рассмотрим G_P – P -ичную группу, построенную по последовательности простых чисел $P = (p_0, p_1, \dots)$, $G_P = Z_{p_0} \times Z_{p_1} \dots$. Положим

$$m_0 = 1, \quad m_1 = p_0, \quad \dots, \quad m_i = p_0 p_1 \dots p_{i-1}.$$

Каждый элемент группы G_P представим в виде $x = (x_0, x_1, \dots)$, где $x_i \in Z_{p_i}$. Существует каноническое отображение группы G_P на отрезок $[0, 1]$, задаваемое по формуле $\lambda(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i / m_{i+1}$. Оно биективно с точностью до счетного множества и позволяет рассматривать систему Виленкина как на группе, так и на отрезке. Введем функции Радемахера на этой группе

$$r_j(x) = e^{2\pi i x_j / p_j}.$$

Всякое натуральное n представимо в виде

$$n = n_0 + n_1 m_1 + \dots + n_{|n|} m_{|n|}.$$

Здесь $|n|$ обозначает количество разрядов в P -ичном представлении числа n . Функции Виленкина определяются так:

$$\psi_n(x) = r_0(x)^{n_0} r_1(x)^{n_1} \dots r_{|n|}(x)^{n_{|n|}}.$$

Введем обозначение

$$D_{m_i}^*(x) = r_i^{p_i-1}(x) D_{m_i}(x),$$

где $D_m(x)$ – ядро Дирихле по системе Виленкина. От последовательности P потребуем, чтобы в ней было некоторое простое p , которое входит в эту последовательность бесконечное число раз. Через Δ_x^k обозначим P -ичный интервал ранга k , содержащий x , т.е. множество вида $\{y \in G_P : y_i = x_i, i = 0, \dots, k-1\}$. Всего имеется m_k различных интервалов ранга k . Обозначим через Δ_m^k – m -й слева (при отображении λ), $m = 0, 1, \dots, m_k - 1$.

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $F(u) = u f(u)$, где $f(u)$ – неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $f(0) = 1$ и $f(u)$ удовлетворяет условию

$$f(u) = o(\sqrt{(\log u)}) \quad \text{при } u \rightarrow \infty,$$

и пусть последовательность P удовлетворяет условию $\liminf p_i < \infty$. Тогда существует функция $g \in F(L)$, у которой ряд Фурье по системе Виленкина расходится всюду в $[0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое p , которое согласно условию, встречается в последовательности P бесконечное число раз. Для ядер Дирихле системы Виленкина верна формула (ее легко проверить непосредственно)

$$D_n^\psi(x) = \psi_n(x) \sum_{k=0}^{\infty} D_{m_k}^\psi(x) \sum_{j=p_k-n_k}^{p_k-1} r_k^j(x). \quad (1)$$

Построим последовательность полиномов по системе Виленкина с непересекающимися спектрами. Рассмотрим последовательность чисел $\{\alpha_v\}$ так, чтобы $0 < \alpha_v < 1$ и $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v < \infty$. Выберем некоторое $N_0 > 1$. Пусть выбрано некоторое N_v . Покажем, как определить N_{v+1} . Выберем числа $N_v < i_1^v < i_2^v < \dots < i_{pN_v}^v$ так, чтобы $p i_l^v = p$, $l = 1, 2, \dots, pN_v$. После этого найдем $N_{v+1} > i_{pN_v}^v$, при этом последовательность $\{N_v\}$ выбирается так, чтобы выполнялось

$$f(u) \leq \alpha_v \sqrt{\log u} \quad \text{при} \quad u \geq \left(\frac{p^{(p-1)N_v}}{\sqrt{N_v}} \right)^{1/2}, \quad (2)$$

и чтобы было

$$\alpha_v \geq \frac{1}{\sqrt{N_v}}, \quad (3)$$

$$\alpha_v > \frac{1}{\sqrt{p^{(p-1)N_v}}}. \quad (4)$$

Заметим также, что $N_{v+1} > pN_v$, откуда $N_v > p^v$.

Так как $F(u)$ строго возрастает, существует неубывающая обратная функция $G(y)$. Для нее верна оценка

$$G(y) > \frac{y}{\alpha_v 2\sqrt{\log y}} \quad \text{при} \quad y \geq \alpha_v p^{(p-1)N_v}.$$

Действительно, $G(y) = u(y)$ находится из уравнения $F(u) = uf(u) = y$. Отсюда $u > \sqrt{y}$ при $y \geq \alpha_v p^{(p-1)N_v}$ и, значит, $u > (p^{(p-1)N_v} / \sqrt{N_v})^{1/2}$. Из выбора N_v , применяя оценку для $f(u)$, получаем $\alpha_v u \sqrt{\log u} \geq uf(u) = y$ и, значит,

$$u > \frac{y}{\alpha_v \sqrt{\log(y/\alpha_v)}} > \frac{y}{\alpha_v 2\sqrt{\log y}},$$

так как $\log(y/\alpha_v) \leq \log y^2$. Это следует из того, что $y \geq \alpha_v p^{(p-1)N_v}$ и, значит, из (4) получаем $y/\alpha_v \leq y^2$. Теперь положим

$$F_{N_v} = \frac{1}{\sqrt{N_v}} \sum_{j=1}^{N_v} r_{i_j^v}^{p i_j^v - 1}(x) = \frac{1}{\sqrt{N_v}} \sum_{j=1}^{N_v} r_{i_j^v}^{p-1}(x).$$

Внутри каждого интервала $\Delta_m^{i_{N_v}^v + 1}$ выделим подмножество

$$\delta_m^{i_{N_v}^v + 1} = \{x \in \Delta_m^{i_{N_v}^v + 1} : x_{i_l^v} = x_{i_{N_v+l}^v} = x_{i_{2N_v+l}^v} = \dots = x_{i_{(p-1)N_v+l}^v}, l = 1, \dots, N_v\}. \quad (5)$$

Положим

$$P_{N_v}(x) = \begin{cases} p^{N_v(p-1)} F_{N_v}(x), & x \in \bigcup_{k=0}^{m_{i_{N_v}^v}+1-1} \delta_k^{i_{N_v}^v+1}, \\ 0, & x \notin \bigcup_{k=0}^{m_{i_{N_v}^v}+1-1} \delta_k^{i_{N_v}^v+1}. \end{cases}$$

Так как обобщенные функции Радемахера образуют на группе G_P ортонормированную систему, в силу определения функций F_{N_v} и P_{N_v} имеем оценку

$$\|P_{N_v}\|_1 = \|F_{N_v}\|_1 \leq \|F_{N_v}\|_2 = 1.$$

Отметим, что функции $\text{Re}(r_j(x))^{p-1}$, $j = 1, 2, \dots$, являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и, значит, по теореме Марцинкевича–Зигмунда [5] справедливо следующее

$$\|P_{N_v}\| \simeq 1.$$

Определим функцию $g(x)$ в виде сходящегося в $L(G_P)$ ряда

$$g(x) = \sum_{v=1}^{\infty} f_v(x),$$

где $f_v(x) = (1/\sqrt{N_v})P_{N_v}(x)$.

Теперь для каждого $x \in G_P$ выберем две последовательности $q(v, x)$ и $n(v, x)$, так что отрезок $[q(v, x), n(v, x)]$ не пересекается со спектрами полиномов $P_{N_l}(x)$ при $l \neq v$.

Положим

$$n(v, x) = \sum_{j=1}^{pN_v} \epsilon_j(x) m_{i_j^v}, \quad q(v, x) = \sum_{j=N_v+1}^{pN_v} \epsilon_j(x) m_{i_j^v}, \quad (6)$$

где $\epsilon_j(x) = 0, 1$ при $j = 1, 2, \dots, N_v$ выбраны так, чтобы

$$\left| \sum_{j=1}^{N_v} \epsilon_j(x) r_{i_j^v}^{p-1}(x) \right| \geq \frac{N_v}{p}.$$

Это можно сделать следующим образом. Рассмотрим числа $T_0(x), T_1(x), \dots, T_{p-1}(x)$, где $T_m(x)$ – количество вхождений числа m в последовательность $\{x_{i_1^v}, x_{i_2^v}, \dots, x_{i_{N_v}^v}\}$. Пусть $T_{s_0}(x)$ максимальное из этих чисел. Тогда положим при $j = 1, 2, \dots, N_v$

$$\epsilon_j(x) = \begin{cases} 1, & x_{i_j^v} = s_0, \\ 0, & x_{i_j^v} \neq s_0. \end{cases}$$

При $j > N_0$ определим $\epsilon_j(x)$ так, чтобы

$$\epsilon_j(x) = \epsilon_{N_v+j}(x) = \epsilon_{2N_v+j}(x) = \dots = \epsilon_{(p-1)N_v+j}(x), \quad j = 1, 2, \dots, N_v. \quad (7)$$

Напомним формулу для частных сумм ряда Фурье:

$$S_n g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (g, \psi_i) \psi_i(x) = \int_G g(t) \psi_n(x-t) \sum_{k=0}^{\infty} D_{m_k}(x-t) \sum_{j=p_k-n_k}^{p_k-1} r_k^j(x-t).$$

Пользуясь тем, что при $q(v, x) \leq i < n(v, x)$ функции $\psi_i(x)$ ортогональны $f_m(x)$, если $m \neq v$, вычислим разность

$$\begin{aligned} S_{n(v,x)}g(x) - S_{q(v,x)}g(x) &= S_{n(v,x)}f_v(x) - S_{q(v,x)}f_v(x) \\ &= \psi_{n(v,x)}(x) \sum_{j=1}^{N_v} \epsilon_j(x) \int_G f_v(t) \psi_{n(v,x)}(-t) D_{m_{i_j}}^*(x-t). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь учитывалось, что при любом $t \in G_P$ для $j > N_v$ имеем

$$\psi_{n(v,x)}(t) D_{m_{i_j}}^*(t) = \psi_{q(v,x)}(t) D_{m_{i_j}}^*(t).$$

Далее, для всех $t, x \in G_P$ имеет место равенство

$$f_v(t) \psi_{n(v,x)}(t) = f_v(t).$$

Это видно из того, что $f_v(t) \neq 0$ только на множествах $\delta_m^{i_{N_v}^v+1}$, а на таких множествах, как видно из (6), (5), (7) и определения системы Виленкина, $\psi_{n(v,x)}(t) = 1$. Также $\psi_{n(v,x)}(-t) = \psi_{n(v,x)}(t) = 1$. Значит, верно

$$f_v(t) \psi_{n(v,x)}(-t) = f_v(t).$$

Продолжая вычисление разности (8), получаем

$$\begin{aligned} S_{n(v,x)}g(x) - S_{q(v,x)}g(x) &= \psi_{n(v,x)}(x) \sum_{j=1}^{N_v} \epsilon_j(x) \int_G f_v(t) D_{m_{i_j}}^*(x-t) \\ &= \psi_{n(v,x)}(x) \sum_{j=1}^{N_v} \epsilon_j(x) \int_G \frac{1}{\sqrt{N_v}} P_{N_v}(x) D_{m_{i_j}}^*(x-t) \\ &= \psi_{n(v,x)}(x) \sum_{j=1}^{N_v} \epsilon_j(x) \int_G \frac{1}{\sqrt{N_v}} F_{N_v}(x) D_{m_{i_j}}^*(x-t) \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались постоянством $D_{m_{i_j}}^*(x-t)$ на интервалах $\Delta_m^{i_{N_v}^v+1}$ при $j = 1, \dots, N_v$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N_v} \psi_{n(v,x)}(x) \sum_{j=1}^{N_v} \epsilon_j(x) \int_G r_{i_j^v}^{p-1}(t) r_{i_j^v}^{p-1}(x-t) D_{m_{i_j}}^*(x-t) \\ &= \frac{1}{N_v} \psi_{n(v,x)}(x) \sum_{j=1}^{N_v} \epsilon_j(x) r_{i_j^v}^{p-1}(x). \end{aligned}$$

В силу выбора $\epsilon_j(x)$ получаем, что при всех $x \in G_P$ имеет место оценка

$$|S_{n(v,x)}g(x) - S_{q(v,x)}g(x)| \geq \frac{1}{p}.$$

Отсюда следует, что ряд Фурье по системе Виленкина функции $g(x)$ расходится всюду в G_P .

Покажем, что $g \in F(L)$. Обозначим

$$E_v = \text{supp } f_v$$

и положим

$$H_v = E_v \setminus \bigcup_{m=v+1}^{\infty} E_m.$$

Из вида функции f_v следует, что $\lim_{v \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{m=v}^{\infty} E_m) = 0$. Следовательно, с точностью до множества меры нуль

$$\text{supp } g = \bigcup_{v=1}^{\infty} H_v.$$

Таким образом, учитывая, что $H_v \cap H_m = \emptyset$ при $m \neq v$, получаем

$$\int_G F(|g(x)|) dx = \sum_{v=1}^{\infty} \int_{H_v} F(|g(x)|) dx = \sum_{v=1}^{\infty} \int_{H_v} F\left(\left|\sum_{m=1}^v f_m(x)\right|\right) dx.$$

Пользуясь тем, что мера G_v не превосходит $p^{-(p-1)N_v}$, получаем

$$\int_{H_v} F(|g(x)|) dx \leq \alpha_v + \int_{\alpha_v p^{(p-1)N_v}}^{\infty} \mu\left\{F\left(\left|\sum_{m=1}^v f_m(x)\right|\right) > y\right\} dy.$$

Так как $F(u)$ строго возрастает, существует неубывающая обратная функция $G(y)$. Продолжая цепочку неравенств, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha_v p^{(p-1)N_v}}^{\infty} \mu\left\{F\left(\left|\sum_{m=1}^v f_m(x)\right|\right) > y\right\} dy \\ & \leq \int_{\alpha_v p^{(p-1)N_v}}^{\infty} \mu\left\{\left|\sum_{m=1}^v f_m(x)\right| > G(y)\right\} dy \\ & \leq \sum_{m=1}^v \int_{\alpha_v p^{(p-1)N_v}}^{\infty} \mu\left\{|f_m(x)| \geq \frac{1}{(v-m+2)^2} G(y)\right\} dy. \end{aligned}$$

Для каждой функции f_m на ее носителе E_m применим экспоненциальную оценку для суммы независимых случайных величин [6; с. 93]:

$$\begin{aligned} & \mu\left\{x \in E_m : |f_m(x)| \geq \frac{G(y)}{(v-m+2)^2}\right\} \\ & \leq \frac{1}{p^{N_m(p-1)}} \mu\left\{x \in G : \left|\sum_{j=1}^{N_m} r_{i_j^m}^{p_{i_j^m}-1}(x)\right| > \frac{G(y)N_m}{(v-m+2)^2 p^{(p-1)N_m}}\right\} \\ & \leq \frac{1}{p^{N_m(p-1)}} \mu\left\{x \in G : \left|\text{Re} \sum_{j=1}^{N_m} r_{i_j^m}^{p_{i_j^m}-1}(x)\right| > \frac{G(y)N_m}{2(v-m+2)^2 p^{(p-1)N_m}}\right\} \\ & \quad + \frac{1}{p^{N_m(p-1)}} \mu\left\{x \in G : \left|\text{Im} \sum_{j=1}^{N_m} r_{i_j^m}^{p_{i_j^m}-1}(x)\right| > \frac{G(y)N_m}{2(v-m+2)^2 p^{(p-1)N_m}}\right\} \\ & \leq \frac{4}{p^{(p-1)N_m}} \exp\left(-\frac{1}{8} \frac{G^2(y)N_m}{(v-m+2)^4 p^{2(p-1)N_m}}\right). \end{aligned}$$

Из нижней оценки для функции $G(y)$ и предыдущих оценок, преобразуя интеграл, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha_v p^{(p-1)N_v}}^{\infty} \mu \left\{ \left| \sum_{m=1}^v f_m(x) \right| > G(y) \right\} dy \\ & \leq \sum_{m=1}^v \int_{\alpha_v p^{(p-1)N_v}}^{\infty} \frac{4}{p^{(p-1)N_m}} \exp \left(-\frac{1}{8} \frac{G^2(y) N_m}{(v-m+2)^4 p^{2(p-1)N_m}} \right) dy \\ & \leq \sum_{m=1}^v \int_{\alpha_v p^{(p-1)N_v}}^{\infty} \frac{4}{p^{(p-1)N_m}} \exp \left(-\frac{1}{8} \frac{y^2 N_m}{\alpha_v^2 \log y (v-m+2)^4 p^{2(p-1)N_m}} \right) dy \end{aligned}$$

делая замену переменной ($y = \alpha_v z$)

$$\begin{aligned} & = \alpha_v \sum_{m=1}^v \int_{p^{(p-1)N_v}}^{\infty} \frac{4}{p^{(p-1)N_m}} \exp \left(-\frac{1}{8} \frac{z^2 N_m}{\log(\alpha_v z) (v-m+2)^4 p^{2(p-1)N_m}} \right) dz \\ & \leq \alpha_v \sum_{m=1}^v \int_{p^{(p-1)N_v}}^{\infty} \frac{4}{p^{(p-1)N_m}} \exp \left(-\frac{1}{8} \frac{z^2 N_m}{\log(z) (v-m+2)^4 p^{2(p-1)N_m}} \right) dz \end{aligned}$$

еще раз заменяем переменную ($z = p^{(p-1)N_m} y$)

$$\begin{aligned} & \leq 4\alpha_v \sum_{m=1}^v \int_{p^{(p-1)(N_v-N_m)}}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{8} \frac{y^2 N_m}{((p-1)N_m \log p + \log y) (v-m+2)^4} \right) dy \\ & \leq 4\alpha_v \sum_{m=1}^v \int_{p^{(p-1)(N_v-N_m)}}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{8} \frac{y^2}{((p-1) \log p + \log y) (v-m+2)^4} \right) dy \\ & \leq 4\alpha_v \sum_{m=1}^v \int_{p^{(p-1)(N_v-N_m)}}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{8(p-1) \log p} \frac{y^2}{(1 + \log y) (v-m+2)^4} \right) dy. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $(v-m+2)^4(1+\log y) < Cy$ при $y \geq p^{(p-1)(N_v-N_m)}$, находим окончательную оценку

$$\int_{H_v} F(|g(x)|) dx < C\alpha_v.$$

Значит,

$$\int_{G_P} F(|g(x)|) dx < \infty.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Yu. Antonov, "Convergence of Fourier series", *East J. Approx.*, **2:2** (1996), 187–196.
- [2] P. Sjölin, F. Soria, "Remarks on a theorem by N. Yu. Antonov", *Studia Math.*, **158:1** (2003), 79–97.
- [3] С. В. Конягин, "О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье", *Матем. сб.*, **191:1** (2000), 103–126.

- [4] С. В. Бочкарев, “Всюду расходящиеся ряды Фурье по системе Уолша и мультипликативным системам”, *УМН*, **59**:1 (2004), 103–124.
- [5] J. Gosselin, “Almost everywhere convergence of Vilenkin–Fourier series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **185** (1973), 345–370.
- [6] В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, Теория вероятностей и математическая статистика, **39**, Наука, М., 1987.

И. В. Поляков

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: igorp86@mail.ru

Поступило

05.11.2009

Исправленный вариант

10.11.2010