Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Борисенко, Е. В. Петров, Поверхности в трехмерной группе Гейзенберга с ограничением на якобиан гауссова отображения, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 5, 794–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8609>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 17:50:34

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Поверхности в трехмерной группе Гейзенберга с ограничением на якобиан гауссова отображения

А. А. Борисенко, Е. В. Петров

1. Случай евклидова пространства. Несуществование в трехмерном евклидовом пространстве поверхностей с ограниченной сверху отрицательным числом кривизной гарантируется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1 [1; теорема В]. *В E^3 на всякой полной регулярной поверхности точная верхняя грань гауссовой кривизны не меньше нуля.*

Этот результат обобщает классическую теорему Д. Гильберта о несуществовании полной регулярной поверхности постоянной отрицательной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве [2] и был впервые получен Ефимовым в [4] и [2] для случая явно заданных поверхностей (альтернативное доказательство приведено в [5]) и в [6] для общего случая (также см. доказательство в [7]).

С теоремой 1 тесно связаны также общие результаты о свойствах гомеоморфизмов двумерных областей, полученные в [6].

Введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – отображение класса C^1 , заданное координатными функциями $p(x, y)$ и $q(x, y)$. Обозначим через Δ якобиан ϕ , через J – ротор векторного поля (p, q) : $J = \partial p / \partial y - \partial q / \partial x$. Пусть на $\mathbb{R}^2$ выполняется условие

$$|\Delta| \geq a|J| + a^2 \quad (1.1)$$

для некоторой положительной на плоскости функции a . Будем говорить, что обратная величина $b = 1/a$ функции a имеет изменение с линейной оценкой, если существуют такие c_1 и c_2 из $\mathbb{R}$, что для любых p_1 и p_2 из $\mathbb{R}^2$ выполняется

$$|b(p_2) - b(p_1)| \leq c_1 \rho(p_1, p_2) + c_2,$$

где $\rho(\cdot, \cdot)$ – евклидова метрика на $\mathbb{R}^2$.

ТЕОРЕМА 2 [8; теорема II]. *Если существует положительная на всей плоскости функция a , удовлетворяющая условию (1.1), обратная величина которой имеет изменение с линейной оценкой, то образом плоскости при отображении ϕ является выпуклая область плоскости и отображение ϕ является гомеоморфизмом на свой образ.*

2. Группа Гейзенберга. Рассмотрим вопрос обобщения теоремы 1 на поверхности в трехмерной группе Гейзенберга Nil (см., например, [9]). Эта группа представляет собой трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с глобальными координатами (x, y, z) и метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(dz + \frac{1}{2}(y dx - x dy) \right)^2.$$

Подобная метрика использована, например, в [10]. В качестве ортонормированного базиса левоинвариантных векторных полей будем рассматривать

$$K = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z}, \quad L = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

В группе Гейзенберга существуют поверхности с ограниченной сверху отрицательной константой внешней кривизны: например, можно рассмотреть цилиндрические поверхности постоянной средней кривизны, параметризованные в виде

$$r(s, t) = (f_1(s), f_2(s), t),$$

где $(f_1(s), f_2(s))$ – прямая либо окружность в плоскости (x, y) (см. [11]). Внешние кривизны таких поверхностей постоянны и не превосходят $-1/4$. Оказывается, однако, что аналог теоремы 1 для группы Nil удастся дать в случае явно заданных над (x, y) поверхностей и с заменой кривизны на якобиан гауссова отображения (в случае трехмерного евклидова пространства внешняя кривизна совпадает с внутренней и с якобианом гауссова отображения). Гауссово отображение мы здесь понимаем как гауссово отображение в группе Ли: пусть M – поверхность в трехмерной группе Ли N с левоинвариантной римановой метрикой, η – поле единичных нормалей к M . Тогда *гауссовым отображением* M называется отображение, ставящее в соответствие произвольной точке p поверхности M результат переноса $\eta(p)$ в единицу группы N дифференциалом левого сдвига. Очевидно, это будет отображение из M в единичную сферу алгебры Ли группы N .

ТЕОРЕМА 3. *В Nil на всякой регулярной явно заданной над всей плоскостью (x, y) поверхности $z = f(x, y)$ точная нижняя грань модуля якобиана гауссова отображения равна нулю.*

Здесь регулярность означает принадлежность классу C^2 . Для доказательства воспользуемся теоремой 2. В качестве локальных координат на поверхности выберем $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Касательные векторные поля имеют следующий вид:

$$v_1 = (1, 0, f_x) = K + \left(f_x + \frac{1}{2}y\right)Z, \quad v_2 = (0, 1, f_y) = L + \left(f_y - \frac{1}{2}x\right)Z,$$

а в качестве единичного нормального векторного поля выберем

$$\eta = \frac{1}{\delta} \left(- \left(f_x + \frac{1}{2}y \right) K - \left(f_y - \frac{1}{2}x \right) L + Z \right),$$

где $\delta = \sqrt{1 + (f_x + (1/2)y)^2 + (f_y - (1/2)x)^2}$. Поля K , L и Z левоинвариантны, поэтому для произвольной точки $p \in M$ перенос вектора $\eta(p)$ в единицу группы $e = (0, 0, 0)$ дифференциалом левого сдвига дает

$$\frac{1}{\delta} \left(- \left(f_x + \frac{1}{2}y \right) K(e) - \left(f_y - \frac{1}{2}x \right) L(e) + Z(e) \right) = \left(- \frac{f_x + (1/2)y}{\delta}, - \frac{f_y - (1/2)x}{\delta}, \frac{1}{\delta} \right).$$

Отметим, что образ поверхности под действием гауссова отображения лежит в верхней полусфере единичной сферы S^2 . Рассмотрим в качестве локальных координат на этой полусфере коэффициенты при полях K и L . Тогда гауссово отображение G задается как

$$(x, y) \mapsto \left(- \frac{f_x + (1/2)y}{\delta}, - \frac{f_y - (1/2)x}{\delta} \right).$$

Матрица Якоби G имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\delta^3} \left(-f_{xx} \left(1 + \left(f_y - \frac{1}{2} x \right)^2 \right) + \left(f_x + \frac{1}{2} y \right) \left(f_y - \frac{1}{2} x \right) \left(f_{xy} - \frac{1}{2} \right) - \left(f_{xy} - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \left(f_x + \frac{1}{2} y \right)^2 \right) + \left(f_x + \frac{1}{2} y \right) \left(f_y - \frac{1}{2} x \right) f_{xx} - \left(f_{xy} + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \left(f_y - \frac{1}{2} x \right)^2 \right) + \left(f_x + \frac{1}{2} y \right) \left(f_y - \frac{1}{2} x \right) f_{yy} - f_{yy} \left(1 + \left(f_x + \frac{1}{2} y \right)^2 \right) + \left(f_x + \frac{1}{2} y \right) \left(f_y - \frac{1}{2} x \right) \left(f_{xy} + \frac{1}{2} \right) \right).$$

Следовательно, якобиан Δ_G отображения G равен $(1/\delta)(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + 1/4)$. Предположим, что модуль этого выражения ограничен снизу положительной константой c , т.е.

$$\left| f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4} \right| \geq c\delta \geq c.$$

Рассмотрим отображение $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, представляющее собой композицию гауссова отображения G и проекции сферы из начала координат на касательную плоскость к S^2 в точке $(0, 0, 1)$. Несложно видеть, что F отображает каждую точку (x, y) в точку $(-f_x - (1/2)y, -f_y + (1/2)x)$, и якобиан Δ_F отображения F равен $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + 1/4$. Кроме того,

$$J_F = \frac{\partial F^1}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial x} = -1,$$

поэтому выполняются все условия теоремы 2 (a и b постоянны). Таким образом, F — гомеоморфизм $\mathbb{R}^2$ на некоторую выпуклую область $\mathbb{R}^2$; тогда G — гомеоморфизм $\mathbb{R}^2$ на выпуклую область S^2 . Площадь этой области конечна и равна

$$S = \iint_{\mathbb{R}^2} \Delta_G dx dy,$$

однако интеграл в правой части этого равенства бесконечен в силу неравенства $|\Delta_G| \geq c$. Получили противоречие, которое доказывает требуемое утверждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. В. Ефимов, *Матем. сб.*, **64**:2 (1964), 286–320. [2] Д. Гильберт, *Основания геометрии*, Гостехиздат, М.-Л., 1948. [3] Н. В. Ефимов, *Докл. АН СССР*, **93**:4 (1953), 609–611. [4] Н. В. Ефимов, *Докл. АН СССР*, **93**:3 (1953), 393–395. [5] E. Heinz, *Math. Ann.*, **129**:1 (1955), 451–454. [6] Н. В. Ефимов, *Докл. АН СССР*, **150**:6 (1963), 1206–1209. [7] T. Klotz Milnor, *Adv. in Math.*, **8**:3 (1972), 474–543. [8] Н. В. Ефимов, *Матем. сб.*, **76**:4 (1968), 499–512. [9] П. Скотт, *Геометрии на трехмерных многообразиях*, Математика. Новое в зарубежной науке, **39**, Мир, М., 1986. [10] P. Tomter, “Constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group”, *Differential Geometry. Partial Differential Equations on Manifolds*, Proc. Sympos. Pure Math., **54**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 485–495. [11] A. Sanini, *Boll. Un. Mat. Ital. B* (7), **11**:2, Suppl. (1997), 79–93.

А. А. Борисенко

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина, Украина
E-mail: borisenk@univer.kharkov.ua

Поступило

27.04.2009

Е. В. Петров

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина, Украина
E-mail: petrov@univer.kharkov.ua