Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Лернер, О. А. Репин, Существенно нелокальная краевая задача для уравнения с частными производными, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 478–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm861>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:27:14

СУЩЕСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

М. Е. Лернер, О. А. Репин

В отличие от известных нелокальных краевых задач для уравнений с частными производными [1]–[5] в данной работе ставится задача, содержащая только нелокальные краевые условия (что отражено в названии статьи).

Рассмотрим уравнение Геллерстедта

$$G_m u \equiv \operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m > 0, \quad (1)$$

в области D , ограниченной полубесконечными прямыми OO_∞ ($O(0; 0)$, $x = 0$, $y \geq 0$) и AA_∞ ($A(1; 0)$, $x = 1$, $y \geq 0$) и характеристиками уравнения (1) OC и AC , $C(1/2, -(m+2)/4)^{2/(m+2)}$.

Пусть $D_1 = D \cap \{(x, y) : y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{(x, y) : y < 0\}$, $O_h(0, h)$, $A_h(1, h)$, $h > 0$; D_{1h} – открытый прямоугольник с вершинами O , O_h , A_h , A ; $D_h = D_{1h} \cup OA \cup D_2$.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

- 1) $G_m u \equiv 0$ в $D_1 \cup D_2$;
- 2) $u \in C^0(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \setminus \overline{OA}) \cap C^2(D \setminus OA)$;
- 3) $\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0$ равномерно по $x \in [0, 1]$;
- 4) существуют конечные и равные между собой пределы

$$\lim_{y \rightarrow 0-0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+0} u_y(x, y), \quad 0 < x < 1;$$

- 5) $u(0, 0) = 0$;
- 6) $u(0, y) - u(1, y) = \varphi_1(y)$, $y \geq 0$;
- 7) $u_x(0, y) - u_x(1, y) = \varphi_2(y)$, $y > 0$;
- 8) $a(x)(I_{0+}^{\beta-1, 1-\beta, 1-\beta} u[\Theta_0(t)])(x) + b(x)(I_{1-}^{\beta-1, 1-\beta, 1-\beta} u[\Theta_1(t)])(x) = c(x)$, $x \in [0, 1]$, где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – заданные функции такие, что

$$\varphi_1(y) \in C^0[0, +\infty) \cap C'(0, +\infty), \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi_1(y) = 0, \quad \varphi_2(y) \in C^0(0, +\infty),$$

$$a(x), b(x), c(x) \in C^0[0, 1], \quad (1-x)^\beta a(x) + x^\beta b(x) \neq 0 \quad \text{для всех } x \in [0, 1], \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)},$$

$$\Theta_0(x) = \frac{x}{2} - i \left(\frac{m+2}{4} x \right)^{2/(m+2)}, \quad \Theta_1(x) = \frac{1+x}{2} - i \left(\frac{m+2}{4} (1-x) \right)^{2/(m+2)},$$

Θ_0 и Θ_1 – аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0)$, с характеристиками OC и AC соответственно, $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ и $(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ – операторы обобщенного дробного интегродифференцирования, определяемые формулами (см. [6], [7])

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}\right) f(t) dt, & \alpha > 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} (I_{0+}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f)(x), & \alpha \leq 0, \quad n = [1-\alpha], \end{cases} \quad (2)$$

$$(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; \frac{t-x}{1-x}\right) f(t) dt, & \alpha > 0, \\ (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (I_{1-}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f)(x), & \alpha \leq 0, \quad n = [1-\alpha]. \end{cases} \quad (3)$$

Операторы (2), (3) при $\beta = -\alpha$ и $\beta = 0$ сводятся к дробным интегралам и производным Римана–Лиувилля и Кобера [5], [8] соответственно.

Заметим, что нелокальное условие 8) может быть записано с помощью операторов Римана–Лиувилля (см. [5], [9])

$$a(x)D_{0+}^{1-\beta}u[\Theta_0(t)] + b(x)D_{1-}^{1-\beta}u[\Theta_1(t)] = c(x).$$

Однако, прежняя его форма оказалась более удобной для цели данного исследования.

1. Рассмотрим уравнение (1) в области D_2 . Пусть $u(x, y)$ – решение задачи 1, $u(x, 0) = \tau(x)$, $u_y(x, 0) = \nu(x)$. Установим связь между $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Если $\tau(x) \in C^0[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ и $\nu(x) \in C^1(0, 1)$, то в области D_2 функцию $u(x, y)$ можно представить по формуле решения задачи Коши (в переменных ξ, η) [9]:

$$u(\xi, \eta) = \gamma_1 \int_{\xi}^{\eta} (\eta - \xi)^{1-2\beta} (\eta - t)^{\beta-1} (t - \xi)^{\beta-1} \tau(t) dt - \gamma_2 \int_{\xi}^{\eta} (\eta - t)^{-\beta} (t - \xi)^{-\beta} \nu(t) dt, \quad (4)$$

где

$$\xi, \eta = x \mp \frac{2}{2+m}(-y)^{(2+m)/2}, \quad \gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{2+m} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Из (4), используя (2) и (3), имеем

$$u[\Theta_0(x)] = \gamma_1 \Gamma(\beta) (I_{0+}^{\beta, \beta-1, 0} t^{\beta-1} \tau)(x) - \gamma_2 \Gamma(1-\beta) (I_{0+}^{1-\beta, \beta-1, 0} t^{-\beta} \nu)(x), \quad (5)$$

$$u[\Theta_1(x)] = \gamma_1 \Gamma(\beta) (I_{1-}^{\beta, \beta-1, 0} (1-t)^{\beta-1} \tau)(x) - \gamma_2 \Gamma(1-\beta) (I_{1-}^{1-\beta, \beta-1, 0} (1-t)^{-\beta} \nu)(x). \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в краевое условие 8), на основании соотношений [7]

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} (I_{0+}^{\gamma, \delta, \alpha+\eta} f)(t))(x) = (I_{0+}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta} f)(x), \quad \gamma > 0,$$

$$(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} (I_{1-}^{\gamma, \delta, \alpha+\eta} f)(t))(x) = (I_{1-}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta} f)(x), \quad \gamma > 0,$$

получим связь между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$a(x)\gamma_1 \Gamma(\beta) (I_{0+}^{2\beta-1, 0, 1-\beta} t^{\beta-1} \tau)(x) - a(x)\gamma_2 \Gamma(1-\beta) x^{-\beta} \nu(x) + b(x)\gamma_1 \Gamma(\beta) (I_{1-}^{2\beta-1, 0, 1-\beta} (1-t)^{\beta-1} \tau)(x) - b(x)\gamma_2 \Gamma(1-\beta) (1-x)^{-\beta} \nu(x) = c(x). \quad (7)$$

Из (7) при $c(x) \equiv 0$ следует, что

$$[(1-x)^{\beta} a(x) + x^{\beta} b(x)] \nu(x) = \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} [(1-x)^{\beta} a(x) (D_{0+}^{1-2\beta} \tau)(x) + x^{\beta} b(x) (D_{1-}^{1-2\beta} \tau)(x)], \quad (8)$$

где $(D_{0+}^{\alpha} f)(x)$ и $(D_{1-}^{\alpha} f)(x)$ – операторы дробного интегродифференцирования в смысле Римана–Лиувилля [8]. Из (8) непосредственно вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Если $c(x) \equiv \tau(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$, то $\nu(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$.

ЛЕММА 2. Пусть

$$\max_{[0,1]} \tau(x) = \tau(x_0) > 0 \quad \left(\min_{[0,1]} \tau(x) = \tau(x_0) < 0 \right),$$

$x_0 \in (0, 1)$, $a(x)b(x) \geq 0$, $c(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$. Тогда $\nu(x_0) > 0$ ($\nu(x_0) < 0$).

Доказательство леммы следует из (8) и принципа максимума для производных дробного порядка [9], [10].

2. Рассмотрим теперь уравнение (1) в области D .

ТЕОРЕМА 1. Решение задачи 1 единственно в классе функций $u(x, y) \in C^0(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \setminus \overline{OA}) \cap C^2(D \setminus OA)$ и представимого в области D_2 по формуле (4) решения задачи Коши, если $a(x), b(x), c(x) \in C^0[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x, y)$ – решение однородной задачи 1 и, в частности,

$$u(0, y) = u(1, y), \quad y \geq 0, \quad (9)$$

$$u_x(0, y) = u_x(1, y), \quad y > 0. \quad (10)$$

Покажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в области D_1 . Предположим противное. Тогда найдется область D_{1h} , в которой $u(x, y) \not\equiv 0$ и, следовательно,

$$\max_{\overline{D_{1h}}} |u| > 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\max_{\overline{D_{1h}}} |u| = \max_{\overline{D_{1h}}} u > 0.$$

Убедимся, что

$$\max_{\overline{D_{1h}}} u \quad (11)$$

достигается на $\overline{O_h A_h}$. Допустим, что это не так. Следовательно, он должен достигаться на $\overline{O_h O} \cup O A \cup \overline{A_h A}$. Пусть (11) достигается на OO_h в некоторой точке $(0, y_0)$. Тогда ввиду (9) он должен достигаться на AA_h в точке $(1, y_0)$. В силу хорошо известного свойства эллиптических уравнений $u_x(0, y_0) < 0$ и $u_x(1, y_0) > 0$, что противоречит (10). Так же (11) не может достигаться в точках O и A ввиду условия 7) задачи 1.

Таким образом, (11) с учетом сделанного предположения не может достигаться на $\overline{OO_h} \cup O_h A_h \cup \overline{A_h A}$ и, следовательно, должен достигаться в некоторой внутренней точке $(x_0, 0)$ отрезка OA . Но тогда по лемме типа леммы К. И. Бабенко [11], [12] должно быть $u_y(x_0, 0+0) < 0$, что противоречит лемме 2. Следовательно, (11) должен достигаться на $\overline{O_h A_h}$. Точно так же можно убедиться, что

$$\max_{\overline{D_{1h}}} u = \max_{\overline{O_h^* A_h^*}} |u|$$

при любом $h^* > h$.

Так как $\overline{D_{1h}} \subset \overline{D_{1h^*}}$, имеем

$$\max_{\overline{D_{1h^*}}} |u| \geq \max_{\overline{D_{1h}}} |u| > 0.$$

Отсюда

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) \neq 0,$$

что противоречит условию 3) задачи 1. Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D_1}$; в частности, $u(x, 0) = \tau(x) \equiv 0$ на $\overline{OA}$. Но тогда $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D_2}$ на основании леммы 1. Таким образом, $u(x, y) \equiv 0$ в области D . Тем самым, теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Франкль Ф. И. // ПММ. 1956. Т. 20. № 2. С. 196–202.
2. Жегалов В. И. // Ученые записки Казанского ун-та. 1962. Т. 122. Кн. 3. С. 3–16.
3. Ионкин Н. И., Моисеев Е. И. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1284–1295.
4. Лернер М. Е. // Дифференц. уравнения и матем. физика. Республ. сб. Т. 239. Вып. 1. Куйбышев, 1979. С. 50–61.
5. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
6. Saigo M. // Math. Japon. 1979. V. 24. № 4. Р. 377–385.
7. Репин О. А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов: Изд-во Саратовского ун-та (Самарский филиал), 1992.
8. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
9. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985.
10. Нахушев А. М. // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 1. С. 100–111.
11. Бабенко К. И. К проблеме уравнений смешанного типа. Дисс. ... д. ф.-м. н. М., 1951.
12. Лернер М. Е., Репин О. А. // Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. седьмой межвуз. конф. Ч. 3. Самара, 1977. С. 50–54.