Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Миротин, Свойства функций Бернштейна нескольких комплексных переменных, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 2, 216–226

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8610>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:21:19

Свойства функций Бернштейна нескольких комплексных переменных

А. Р. Миротин

Вводится многомерное обобщение класса функций Бернштейна и исследуются свойства функций введенного класса. В частности, дается новое доказательство интегрального представления функций Бернштейна многих переменных. Рассматриваются примеры.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm8610

1. Введение. Функции Бернштейна одного переменного возникают в математическом анализе, теории потенциала (см. [1; с. 141–142]), теории вероятностей (см. [2; гл. XIII, § 7], [3]), а также теории операторов (см., например, [4]). Класс функций Бернштейна нескольких переменных был введен автором в [5] и использовался в работах [5]–[7] для построения функционального исчисления генераторов многопараметрических полугрупп операторов. Эти функции естественным образом возникают также в теории марковских процессов. В заметке устанавливается ряд свойств функций этого класса, включая их интегральное представление, даны новые способы построения функций Бернштейна одного и двух переменных, а также указана связь этого класса с теорией марковских процессов.

Следует отметить, что в литературе чаще всего встречается класс $\mathcal{B}$ (положительных) функций Бернштейна одного переменного, теория которого тождественна теории введенного ниже класса $\mathcal{T}_1$ отрицательных функций Бернштейна, поскольку элементы последнего класса получаются из функций класса $\mathcal{B}$ отражением относительно начала координат.

Ниже все меры считаются мерами Радона, неравенства между векторами покомпонентные. Для векторов $a, b \in \mathbb{C}^n$ выражение $a \cdot b$ обозначает $\sum_{i=1}^n a_i b_i$.

2. Основные свойства функций класса $\mathcal{T}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [5]. Скажем, что неположительная функция из $C^\infty((-\infty; 0)^n)$ принадлежит классу $\mathcal{T}_n$, если все ее частные производные первого порядка абсолютно монотонны (функция из $C^\infty((-\infty; 0)^n)$ называется *абсолютно монотонной*, если она неотрицательна вместе со своими частными производными всех порядков).

Работа выполнена при поддержке Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь (грант № 20061473).

Последнее условие на функцию $\psi \in \mathcal{T}_n$ равносильно тому, что $\partial^\alpha \psi \geq 0$ для любого мультииндекса $\alpha \neq 0$. Функции класса $\mathcal{T}_n$ будем называть также *отрицательными функциями Бернштейна n переменных*.

Поскольку функция $\psi \in \mathcal{T}_n$ монотонно возрастает по каждому переменному в отдельности, неравенство $x \leq y$, где $x, y \in (-\infty; 0)^n$, влечет $\psi(x) \leq \psi(y)$. Очевидно, что $\mathcal{T}_n$ есть конус относительно поточечного сложения функций и умножения на скаляр. Он также инвариантен относительно сдвигов на векторы из $(0; \infty)^n$. Более того, в силу отмеченной выше монотонности функция $\psi(s - c) - \psi(-c)$ принадлежит $\mathcal{T}_n$ вместе с ψ ($c \in (0; \infty)^n$).

Следующая теорема была анонсирована в [5] и доказана в [7] с использованием одного нетривиального результата из [1] (относительно одномерного случая см., например, [8; с. 256–258]). Ниже мы даем прямое доказательство. Остальные утверждения данной работы являются следствиями этой теоремы (далее запись $s \rightarrow -0$ означает, что $s_1 \rightarrow -0, \dots, s_n \rightarrow -0$).

ТЕОРЕМА 1. Пусть m, n – натуральные числа. Для функции $\psi: (-\infty; 0)^n \rightarrow (-\infty; 0]$ следующие утверждения равносильны:

- 1) $\psi \in \mathcal{T}_n$;
- 2) при $s \in (-\infty; 0)^n$

$$\psi(s) = c_0 + c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} - 1) d\mu(u), \quad (2.1)$$

где

$$c_0 = \psi(-0) := \lim_{s \rightarrow -0} \psi(s), \quad c_1 = \nabla \psi(-\infty) \in \mathbb{R}_+^n,$$

а положительная мера μ на $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ определяется однозначно и обладает свойствами, указанными в [7; лемма 3.1];

- 3) для любой функции f , абсолютно монотонной на $(-\infty; 0)^m$, сложная функция $(s, r) \mapsto f(\psi(s), r)$ абсолютно монотонна на $(-\infty; 0)^{m+n-1}$, $s \in (-\infty; 0)^n$, $r \in (-\infty; 0)^{m-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение $1 \Rightarrow 3$ проверяется непосредственным дифференцированием.

Для доказательства импликации $3 \Rightarrow 1$ достаточно рассмотреть случай $f(x) = e^{vx_1}$, $v > 0$.

Утверждение $2 \Rightarrow 1$ доказывается дифференцированием под знаком интеграла в (2.1).

Докажем, что $1 \Rightarrow 2$. В силу многомерного варианта теоремы Бернштейна–Уиддера абсолютно монотонная функция $\partial\psi/\partial s_i$ есть n -мерное преобразование Лапласа положительной меры σ_i , т.е. имеет интегральное представление, $i = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial\psi(s)}{\partial s_i} = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot u} d\sigma_i(u).$$

Введем в рассмотрение множества $U_i = \{u \in \mathbb{R}_+^n \mid u_i > 0\}$ и определим в U_i меру Радона μ_i по правилу

$$\int_{U_i} \varphi d\mu_i = \int_{U_i} \varphi(u) \frac{1}{u_i} d\sigma_i(u),$$

где φ есть непрерывная функция с компактным носителем, содержащимся в U_i . Заметим, что U_i образуют открытое покрытие пространства $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$. Кроме того, меры μ_i согласованы в том смысле, что для любой пары (i, j) имеет место равенство сужений $\mu_i|_{(U_i \cap U_j)} = \mu_j|_{(U_i \cap U_j)}$, т.е.

$$\frac{1}{u_i} d\sigma_i(u) = \frac{1}{u_j} d\sigma_j(u) \quad \text{в } U_i \cap U_j.$$

В самом деле, $u_i d\sigma_j(u) = u_j d\sigma_i(u)$, поскольку обе части являются представляющими мерами для смешанной производной $\partial^2 \psi / (\partial s_i \partial s_j) = \partial^2 \psi / (\partial s_j \partial s_i)$. Следовательно (см., например, [9; гл. 3, § 2, предложение 1]), существует такая положительная мера μ на $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$, что $\mu|_{U_i} = \mu_i$.

Предположим на время, что $\partial \psi(-0)/\partial s_i \neq \infty$ при всех i . Покажем, что тогда функция $u \mapsto e^{s \cdot u} - 1$ μ -интегрируема для любого $s \in (-\infty; 0)^n$. Для $\delta > 0$ рассмотрим множества $E_i = \{u \in \mathbb{R}_+^n \mid u_i \geq \delta\}$. Так как при всех i справедливо неравенство

$$\int_{E_i} e^{s \cdot u} d\mu = \int_{E_i} e^{s \cdot u} \frac{1}{u_i} d\sigma_i(u) \leq \frac{1}{\delta} \int_{E_i} e^{s \cdot u} d\sigma_i(u) \leq \frac{1}{\delta} \frac{\partial \psi(s)}{\partial s_i},$$

то функция $u \mapsto e^{s \cdot u}$ μ -интегрируема на множестве $\bigcup_{j=1}^n E_j = \mathbb{R}_+^n \setminus [0; \delta)^n$. Полагая в этом неравенстве последовательно $s_1 \rightarrow -0, \dots, s_n \rightarrow -0$, получим

$$\int_{E_j} d\mu \leq \delta^{-1} \frac{\partial \psi(-0)}{\partial s_i} \neq \infty \quad \text{при всех } i,$$

а потому и функция $u \mapsto e^{s \cdot u} - 1$ μ -интегрируема на $\mathbb{R}_+^n \setminus [0; \delta)^n$. Далее, функция $u \mapsto (-s) \cdot u$ μ -интегрируема на $[0; \delta)^n \setminus \{0\}$, поскольку меры $u_j d\mu(u) = d\sigma_j(u)$ конечны на этом множестве. Тогда соотношение $1 - e^{s \cdot u} \sim (-s) \cdot u$, $u \rightarrow 0$, показывает, что функция $u \mapsto e^{s \cdot u} - 1$ μ -интегрируема на множестве $[0; \delta)^n \setminus \{0\}$ при достаточно малом $\delta > 0$. Окончательно получаем, что эта функция μ -интегрируема на множестве $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$.

Следовательно, при всех i

$$\frac{\partial \psi(s)}{\partial s_i} = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot u} d\sigma_i(u) = \frac{\partial}{\partial s_i} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} - 1) d\mu(u) + c_1^i s_i \right),$$

где $c_1^i = \sigma_i(\{0\}) = \partial \psi(-\infty)/\partial s_i$, откуда и следует (2.1).

Наконец, если $\partial \psi(-0)/\partial s_i = \infty$ при некотором i , то для $\epsilon > 0$ рассмотрим вектор $\bar{\epsilon} := (\epsilon, \dots, \epsilon)$ и функцию $\psi_\epsilon(s) := \psi(s - \bar{\epsilon})$ из $\mathcal{T}_n$, для которой $\partial \psi_\epsilon(-0)/\partial s_i \neq \infty$ при всех i . Поскольку

$$\frac{\partial \psi_\epsilon(s)}{\partial s_i} = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{(s - \bar{\epsilon}) \cdot u} d\sigma_i(u) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot u} e^{-\bar{\epsilon} \cdot u} d\sigma_i(u)$$

есть преобразование Лапласа меры $d\sigma_i^\epsilon(u) = e^{-\bar{\epsilon} \cdot u} d\sigma_i(u)$ и $\psi_\epsilon(0) = \psi(-\bar{\epsilon})$, $\sigma_i^\epsilon(\{0\}) = \sigma_i(\{0\})$, интегральное представление (2.1) для ψ_ϵ имеет вид

$$\psi(s - \bar{\epsilon}) = \psi(-\bar{\epsilon}) + c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} - 1) e^{-\bar{\epsilon} \cdot u} d\mu(u).$$

Для завершения доказательства формулы (2.1) осталось положить тут $\epsilon \rightarrow +0$ и сослаться на теорему Б. Леви.

Наконец, единственность меры μ следует из теоремы единственности для преобразования Лапласа, поскольку дифференцирование (2.1) под знаком интеграла показывает, что $\partial\psi/\partial s_i$ есть преобразование Лапласа меры $u_i d\mu(u)$.

Композиция функций сохраняет принадлежность к классу $\mathcal{T} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$. Точнее, имеет место такое следствие, показывающее, что $\mathcal{T}$ есть операда в смысле [10].

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\psi_1(s) \in \mathcal{T}_n$ и $\psi_2(r) \in \mathcal{T}_m$, то функция $\psi(r, 's) := \psi_1(\psi_2(r), 's)$ принадлежит $\mathcal{T}_{m+n-1}$ (мы полагаем $'s = (s_2, \dots, s_n)$). В частности, класс $\mathcal{T}_1$ устойчив относительно композиции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 для любой абсолютно монотонной на $(-\infty; 0)$ функции f функция $f_1(s) := f(\psi_1(s))$ абсолютно монотонна. Аналогично, функция $f(\psi(r, 's)) = f_1(\psi_2(r), 's)$ также абсолютно монотонна, и снова в силу теоремы 1 функция $\psi(r, 's)$ принадлежит классу $\mathcal{T}_{m+n-1}$.

Свойства представляющей меры μ выражает

ЛЕММА 1 [7]. Для меры μ из интегрального представления (2.1) и достаточно малого $\delta > 0$ функции $u \mapsto u_j$ μ -интегрируемы на $[0; \delta)^n \setminus \{0\}$, $j = 1, \dots, n$, и $\mu(\mathbb{R}_+^n \setminus [0; \delta)^n) < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Каждая функция $\psi \in \mathcal{T}_n$ по формуле

$$\psi(z) = c_0 + c_1 \cdot z + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{z \cdot u} - 1) d\mu(u) \quad (2.2)$$

продолжается до функции, голоморфной в области

$$\{\operatorname{Re} z < 0\} := \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_j < 0, j = 1, \dots, n\}$$

и непрерывной в ее замыкании (абсолютная сходимость интеграла в (2.2) была доказана в [7]). Класс функций, возникающий в результате такого аналитического продолжения, будем по-прежнему обозначать $\mathcal{T}_n$.

Далее, S_θ есть замыкание сектора

$$\left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} < \arg \zeta < \frac{3\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right\}, \quad \theta \in [0; \pi].$$

ТЕОРЕМА 2. Любая функция из $\mathcal{T}_n$, отличная от тождественно нулевой, отображает область $\{\operatorname{Re} z < 0\}$ в полуплоскость $\{\operatorname{Re} \zeta < 0\}$, а конус S_θ^n – в сектор S_θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в (2.2) $z = s + iy$, получаем, что

$$\operatorname{Re} \psi(z) = c_0 + c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} \cos(y \cdot u) - 1) d\mu(u). \quad (2.3)$$

Поскольку каждое слагаемое в правой части (2.3) неположительно, то $\operatorname{Re} \psi(z) \leq 0$ при всех z с $\operatorname{Re} z < 0$, причем равенство достигается лишь когда каждое слагаемое

в правой части (2.3) равно нулю. Интерес представляет случай $\mu \neq 0$. В этом случае из равенства $\operatorname{Re} \psi(z) = 0$ следует, что $c_0 = c_1 = 0$, $e^{s \cdot u_0} \cos(y \cdot u_0) = 1$ при некотором $u_0 \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$. Последнее равенство невозможно, поскольку $s < 0$, что и доказывает первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения возьмем $z = s + iy \in S_\theta^n$, $z \neq 0$, т.е. $s_j < 0$ и $|y_j|/(-s_j) \leq \operatorname{ctg}(\theta/2)$, $j = 1, \dots, n$. Тогда

$$\frac{|e^{u \cdot s} \sin(u \cdot y)|}{1 - e^{u \cdot s} \cos(u \cdot y)} = \frac{|\sin(u \cdot y)|}{e^{-u \cdot s} - \cos(u \cdot y)} \leq \frac{|u \cdot y|}{(1 - u \cdot s) - 1} \leq \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Теперь равенство (2.3) вместе с равенством

$$\operatorname{Im} \psi(z) = c_1 \cdot y + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} e^{s \cdot u} \sin(y \cdot u) d\mu(u),$$

которое также следует из (2.2), показывают, что $|\operatorname{Im} \psi(z)| \leq \operatorname{ctg}(\theta/2)(-\operatorname{Re} \psi(z))$, т.е. $\psi(z) \in S_\theta$, что и требовалось доказать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что последовательность ψ_k функций из $\mathcal{T}_n$ сходится в $\mathcal{T}_n$ к некоторой функции ψ , если ψ определена на множестве $(-\infty; 0)^n$ и ψ_k сходятся к ψ поточечно на этом множестве.

Следующий результат показывает, что описанная сходимость для класса $\mathcal{T}_n$ является естественной.

ТЕОРЕМА 3. Пусть последовательность ψ_k сходится в $\mathcal{T}_n$ к функции ψ . Тогда

- 1) $\psi \in \mathcal{T}_n$;
- 2) последовательность ψ_k сходится к ψ равномерно на компактных подмножествах области $\{\operatorname{Re} z < 0\}$;
- 3) последовательность ψ_k равномерно ограничена на компактных подмножествах конуса S_θ^n , $\theta \in (0; \pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечено в доказательстве теоремы 2, $\operatorname{Re} \psi_k(z) \leq 0$ при $k = 1, 2, \dots$, $\operatorname{Re} z \leq 0$, т.е. ψ_k выпускают значения из полуплоскости $\{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$. Следовательно, в силу многомерного варианта теоремы Монтеля семейство (ψ_k) нормально, т.е. любая его подпоследовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся равномерно внутри области $\{\operatorname{Re} z < 0\}$ к аналитической функции или к бесконечности. Однако последнее невозможно ввиду поточечной сходимости ψ_k . Пределы всех сходящихся равномерно внутри $\{\operatorname{Re} z < 0\}$ подпоследовательностей последовательности ψ_k совпадают с ψ на $(-\infty; 0)^n$, а потому по одной из форм теоремы единственности совпадают между собой на $\{\operatorname{Re} z < 0\}$ (см., например, [11; с. 32]). Но тогда и сама последовательность ψ_k сходится равномерно внутри $\{\operatorname{Re} z < 0\}$ к функции, являющейся аналитическим продолжением ψ . Это продолжение мы также обозначим ψ . Теперь по теореме Вейерштрасса для любого мультииндекса α при $k \rightarrow \infty$ имеет место сходимость $\partial^\alpha \psi_k(s) \rightarrow \partial^\alpha \psi(s)$, $s \in (-\infty; 0)^n$, а потому $\psi \in \mathcal{T}_n$, что доказывает первые два утверждения теоремы.

Для доказательства третьего утверждения нам понадобится

ЛЕММА 2. Для любой функции $\psi \in \mathcal{T}_n$ с интегральным представлением (2.2) справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \psi(s + iy) - \psi(s) \geq 2(\operatorname{Re} \psi(r + iy) - c_0 - c_1 \cdot r), \quad (2.4)$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, $r, s \in (-\infty; 0)^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы (2.3)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \psi(s + iy) &= c_0 + c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} \cos(y \cdot u) - 1) d\mu(u) \\ &= c_0 + c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} - 1) \cos(y \cdot u) d\mu(u) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (\cos(y \cdot u) - 1) d\mu(u) \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} \psi(s + iy)| &= |c_0| + |c_1 \cdot s| + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (1 - e^{s \cdot u}) |\cos(y \cdot u)| d\mu(u) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (1 - \cos(y \cdot u)) d\mu(u) \\ &\leq -c_0 - c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (1 - e^{s \cdot u}) d\mu(u) + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (1 - \cos(y \cdot u)) d\mu(u) \\ &= -\psi(s) + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (1 - \cos(y \cdot u)) d\mu(u). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Так как все слагаемые в правой части и подынтегральная функция в (2.3) неположительны, то

$$|\operatorname{Re} \psi(r + iy)| = -c_0 - c_1 \cdot r + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (1 - e^{r \cdot u} \cos(y \cdot u)) d\mu(u). \quad (2.6)$$

Заметим, что при $t \in (0; 1]$, $z \in [-1; 1]$ справедливо неравенство $1 - z \leq 2(1 - tz)$. Следовательно, $1 - \cos(y \cdot u) \leq 2(1 - e^{r \cdot u} \cos(y \cdot u))$, и в силу (2.6) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (1 - \cos(y \cdot u)) d\mu(u) &\leq 2 \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (1 - e^{r \cdot u} \cos(y \cdot u)) d\mu(u) \\ &= 2(|\operatorname{Re} \psi(r + iy)| + c_0 + c_1 \cdot r). \end{aligned}$$

С учетом этого неравенства (2.5) дает

$$|\operatorname{Re} \psi(s + iy)| \leq -\psi(s) + 2(|\operatorname{Re} \psi(r + iy)| + c_0 + c_1 \cdot r),$$

т.е.

$$-\operatorname{Re} \psi(s + iy) \leq -\psi(s) + 2(-\operatorname{Re} \psi(r + iy) + c_0 + c_1 \cdot r),$$

что и завершает доказательство леммы.

Доказательство утверждения 3). Любое ограниченное множество M из S_θ^n при некотором $a < 0$ содержится в множестве Δ^n , где $\Delta = \{\zeta \in S_\theta : \operatorname{Re} \zeta \geq a\}$. В силу неравенства (2.4) при $r = (a, \dots, a)$ имеем

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} \psi_k(s + iy)| &\leq |\psi_k(s)| + 2|\operatorname{Re} \psi_k(r + iy)| + \nabla \psi_k(-\infty) \cdot r + 2\psi_k(0) \\ &\leq |\psi_k(s)| + 2|\operatorname{Re} \psi_k(r + iy)| + 2\psi_k(0). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Далее, последовательность $\psi_k(a, \dots, a)$, будучи сходящейся, ограничена. А так как функция $s \mapsto \psi_k(s_1, \dots, s_n)$ возрастает по каждому переменному в отдельности, то для всех $s \geq (a, \dots, a)$ выполняется неравенство $\psi_k(a, \dots, a) \leq \psi_k(s) \leq 0$, т.е. последовательность ψ_k равномерно ограничена на $[a; 0]^n$. Из утверждения 2) следует, что последовательность ψ_k равномерно ограничена на компакте $K = \{z \in \Delta^n : \operatorname{Re} z_j = a, j = 1, \dots, n\}$. По доказанному выше первое и третье слагаемые в правой части (2.7) ограничены, когда $s + iy \in \Delta^n$, так как тогда $s \in [a; 0]^n$. Второе же слагаемое равномерно ограничено, поскольку $r + iy \in K$. Теперь утверждение 3) сразу следует из неравенства $|\operatorname{Im} \psi(z)| \leq \operatorname{ctg}(\theta/2)(-\operatorname{Re} \psi(z))$, установленного при доказательстве теоремы 2.

3. Примеры. Функции

$$c^\alpha - (c - s)^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad c \geq 0, \quad \log b - \log(b - s), \quad \operatorname{arch} b - \operatorname{arch}(b - s), \quad b \geq 1,$$

принадлежат классу $\mathcal{T}_1$ (см., например, [7] для случаев $c = 0, b = 1$; общий случай следует из замечания после определения 1). Приведем теорему, которая позволяет строить новые примеры функций из этого класса.

ТЕОРЕМА 4. Если функция $w(-p)$ есть изображение по Лапласу неотрицательного неубывающего оригинала, а $\psi \in \mathcal{T}_1$, причем $\psi'(-\infty) = 0$, то и функция

$$\varphi(s) = \int_s^0 \psi(t)w(t) dt, \quad s < 0, \quad (3.1)$$

также принадлежит $\mathcal{T}_1$ (при условии, что интеграл существует).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\varphi(s) \leq 0$ при $s < 0$, так как $\psi(t) \leq 0, w(t) \geq 0, t < 0$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\psi(s) = e^{us} - 1, u \geq 0$. Соответствующую ей по формуле (3.1) функцию обозначим φ_u . Проверим, что функция $\varphi'_u(s) = -\psi(s)w(s)$ абсолютно монотонна. Если $w(-p) = (\mathcal{L}f)(p)$, где $f \geq 0$ – неубывающий оригинал (здесь и ниже $\mathcal{L}$ – преобразование Лапласа), то

$$\begin{aligned} \varphi'_u(s) &= -e^{us}w(s) + w(s) = \int_0^\infty e^{rs}f(r) dr - \int_0^\infty e^{(u+r)s}f(r) dr = \int_0^\infty e^{rs}f(r) dr \\ &\quad - \int_u^\infty e^{rs}f(r - u) dr = \int_0^u e^{rs}f(r) dr + \int_u^\infty e^{rs}(f(r) - f(r - u)) dr \\ &= \int_0^\infty e^{rs}g(r) dr, \end{aligned}$$

где $g(r) = f(r) - f(r - u) \geq 0, r \in \mathbb{R}$ (у нас $f(s) = 0$ при $s < 0$). Таким образом, $\varphi'_u(s) = (\mathcal{L}g)(-s), s < 0$, есть абсолютно монотонная функция.

2) Функция $\psi \in \mathcal{T}_1$ имеет интегральное представление (2.1), в котором $c_1 = 0$. Тогда в силу теоремы Фубини

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= c_0 \int_s^0 w(t) dt + \int_0^\infty \left(\int_s^0 (e^{ut} - 1) w(t) dt \right) d\mu(u) \\ &= c_0 \int_s^0 w(t) dt + \int_0^\infty \varphi_u(s) d\mu(u)\end{aligned}\quad (3.2)$$

(теорема Фубини применима, так как подынтегральная функция сохраняет знак в области интегрирования).

Первое слагаемое в правой части (3.2) принадлежит $\mathcal{T}_1$, поскольку оно неположительно, и функция $(c_0 \int_s^0 w(t) dt)' = (-c_0)w(s)$ абсолютно монотонна.

Представляя интеграл как предел интегральных сумм, получаем, что второе слагаемое в (3.2) есть предел в $\mathcal{T}_1$ последовательности функций вида $(\alpha_j > 0)$

$$\sigma(s) = \sum_{j=1}^m \varphi_{u_j}(s) \alpha_j,$$

которые принадлежат $\mathcal{T}_1$ по доказанному в случае 1. По теореме 3 получаем теперь, что и второе слагаемое в (3.2) принадлежит $\mathcal{T}_1$, что и завершает доказательство.

ПРИМЕР 1. Полилогарифмическая функция порядка $p \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$\text{Li}_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}, \quad |z| < 1,$$

и может быть аналитически продолжена в полуплоскость $\{\text{Re } z < 0\}$, причем справедливо рекуррентное соотношение

$$\text{Li}_p(s) = \int_s^0 \text{Li}_{p-1}(t)(-t^{-1}) dt$$

(см., например, [12]). Как легко проверить, $\text{Li}_1(s) = -\log(1-s) \in \mathcal{T}_1$. Кроме того, $-t^{-1} = (\mathcal{L}\theta)(-t)$, где θ – функция Хевисайда. Следовательно, теорема 4 и отмеченное рекуррентное соотношение показывают, что $\text{Li}_p \in \mathcal{T}_1$, лишь только $\text{Li}_{p-1} \in \mathcal{T}_1$. В силу принципа индукции это означает, что $\text{Li}_p \in \mathcal{T}_1$ при всех p .

Функции из $\mathcal{T}_n$ можно строить, используя суммы функций из $\mathcal{T}_1$ (от различных аргументов), а также операцию композиции. Укажем еще один способ построения функций из $\mathcal{T}_2$, обобщающий первое утверждение теоремы 11.1 из [7].

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $\psi_1 \in \mathcal{T}_1$ имеет интегральное представление

$$\psi_1(s) = c_0 + \int_0^\infty (e^{su} - 1) d\mu_1(u),$$

причем $\omega := \int_0^\infty u d\mu_1(u) \neq \infty$. Тогда функция

$$\psi(s_1, s_2) := \frac{\psi_1(s_1) - \psi_1(s_2)}{s_1 - s_2} - \omega$$

принадлежит $\mathcal{T}_2$ и имеет интегральное представление

$$\psi(s_1, s_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{s_1 u_1 + s_2 u_2} - 1) d\mu(u_1, u_2),$$

где $d\mu(u_1, u_2)$ – образ меры $d\mu_1(v) dw$ при отображении

$$u_1 = \frac{v+w}{2}, \quad u_2 = \frac{v-w}{2}.$$

Под значением функции ψ при $s_1 = s_2$ мы, как обычно, понимаем ее предел при $s_2 \rightarrow s_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Δ есть угол в (v, w) -плоскости, ограниченный биссектрисами первого и четвертого координатных углов. Рассмотрим двойной интеграл

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint_{\Delta} (e^{s_1(v+w)/2 + s_2(v-w)/2} - 1) d\mu_1(v) dw \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\mu_1(v) \int_{-v}^v (e^{s_1(v+w)/2 + s_2(v-w)/2} - 1) dw. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В случае $s_1 \neq s_2$, вычисляя внутренний интеграл, получаем для правой части (3.3) значение

$$\frac{1}{s_1 - s_2} \int_0^\infty (e^{s_1 v} - e^{s_2 v}) d\mu_1(v) - \omega = \psi(s_1, s_2).$$

В случае $s_1 = s_2$ аналогичные вычисления дают для этой части значение

$$\int_0^\infty (e^{s_1 v} - 1) v d\mu_1(v) = \psi'_1(s_1) - \omega = \psi(s_1, s_1).$$

С другой стороны, сделав в интеграле, стоящем в левой части (3.3), замену переменных по формулам $v = u_1 + u_2$, $w = u_1 - u_2$, получим, что он равен

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (e^{s_1 u_1 + s_2 u_2} - 1) d\mu(u_1, u_2),$$

что и завершает доказательство.

ПРИМЕР 2. Как отмечено выше, функция $\psi_1(s) = \log b - \log(b - s)$, $b \geq 1$, принадлежит классу $\mathcal{T}_1$. Нетрудно подсчитать, что в этом случае $\omega = 1/b$. Следовательно, функция

$$\frac{1}{s_1 - s_2} \log \frac{b - s_2}{b - s_1} - \frac{1}{b}$$

принадлежит $\mathcal{T}_2$.

В заключение покажем, как функции класса $\mathcal{T}_n$ возникают в теории марковских процессов (при $n = 1$ это было установлено Филлипсом [13; теорема 23.15.1]; см. также [3; с. 1339–1340]). Рассмотрим однородный во времени и пространстве (см., например, [13; п. 23.13]) марковский процесс ξ в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+^n$. Соответствующее ему семейство вероятностей перехода $P(t, x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, порождает в силу уравнения Чепмена–Колмогорова сверточную полугруппу вероятностных

мер P_t , $t > 0$, на $\mathbb{R}_+^n$. Пусть $g_t(s) := (\mathcal{L}P_t)(-s)$, где $\mathcal{L}$ обозначает n -мерное преобразование Лапласа, $s < 0$, — односторонняя характеристическая функция функции распределения $P(t, \cdot)$. Ясно, что g_t абсолютно монотонна. Кроме того, для любого $m \in \mathbb{N}$

$$g_{mt}(s) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot u} dP_{mt}(u) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot u} dP_t^{*m}(u) = (g_t(s))^m,$$

где P_t^{*m} обозначает m -ю сверточную степень меры P_t . Заменяя в последнем равенстве t на $(k/m)t$, получаем $g_{rt}(s) = (g_t(s))^r$ для любого положительного рационального $r = k/m$, $k, m \in \mathbb{N}$. Если дополнительно предположить, что отображение $t \mapsto P_t$ узко непрерывно, то при любом $a > 0$ справедливо равенство $g_{at}(s) = (g_t(s))^a$. В самом деле, если последовательность положительных рациональных чисел r_k сходится к a , то в силу нашего условия непрерывности $g_{at}(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{r_k t}(s) = (g_t(s))^a$ (см., например, [9; с. 529, предложение 14]). В частности, $g_t(s) = (g_1(s))^t$. Далее, вполне монотонная функция $g_1(-r) = (\mathcal{L}P_1)(r)$, как было показано выше, удовлетворяет равенству $g_1(-r)^{1/m} = g_{1/m}(-r)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in (0; \infty)^n$, и, значит, ее представляющая мера является безгранично делимым распределением (т.е. $g_1(-r)$ безгранично делима в смысле [14]). Поэтому $g_1(-r) = e^{\psi(-r)}$, где $\psi \in \mathcal{T}_n$ (в одномерном случае это хорошо известно, см., например, [2; гл. XIII, § 7]; в общем случае это следует, например, из теоремы 3 в [14]). По аналогии с одномерным случаем функцию ψ естественно называть лапласовским показателем процесса ξ . Таким образом, лапласовский показатель рассматриваемого марковского процесса принадлежит $\mathcal{T}_n$.

Следует отметить, что роль лапласовского показателя в теории марковских процессов весьма велика. Например, рассуждая как в [13; теорема 23.15.2], где рассмотрен случай $n = 1$, можно показать, что генератор марковской полугруппы, отвечающей ξ , имеет вид $\psi(-\nabla)$, где значение лапласовского показателя ψ от оператора $-\nabla = (-\partial/\partial s_1, \dots, -\partial/\partial s_n)$ понимается в смысле исчисления, построенного в [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. Berg, J. P. R. Christensen, P. Ressel, *Harmonic Analysis on Semigroups. Theory of Positive Definite and Related Functions*, Grad. Texts in Math., **100**, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [2] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Т. 2, Мир, М., 1984.
- [3] D. Applebaum, “Lévy processes – from probability to finance and quantum groups”, *Notices Amer. Math. Soc.*, **51**:11 (2004), 1336–1347.
- [4] C. Berg, K. Boyadzhiev, R. deLaubenfelse, “Generation of generators of holomorphic semigroups”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **55**:2 (1993), 246–269.
- [5] А. Р. Миротин, “Действие функций класса Шенберга $\mathcal{T}$ на конусе диссипативных элементов банаховой алгебры”, *Матем. заметки*, **61**:4 (1997), 630–633.
- [6] А. Р. Миротин, “Функции класса Шенберга $\mathcal{T}$ действуют в конусе диссипативных элементов банаховой алгебры. II”, *Матем. заметки*, **64**:3 (1998), 423–430.
- [7] А. Р. Миротин, “Многомерное $\mathcal{T}$ -исчисление от генераторов C_0 -полугрупп”, *Алгебра и анализ*, **11**:2 (1999), 142–169.
- [8] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматгиз, М., 1961.
- [9] Н. Бурбаки, *Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах*, Элементы математики, Наука, М., 1977.

- [10] M. Markl, S. Shnider, J. Stasheff, *Operads in Algebra, Topology and Physics*, Math. Surveys Monogr., **96**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [11] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных*, Наука, М., 1976.
- [12] A. B. Goncharov, “The classical trilogarithm, algebraic K -theory of fields and Dedekind zeta functions”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **24**:1 (1991), 155–162.
- [13] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
- [14] А. Р. Миротин, “Вполне монотонные функции на полугруппах Ли”, *Укр. матем. журн.*, **52**:6 (2000), 841–845.

А. Р. Миротин

Гомельский государственный университет

им. Ф. Скорины

E-mail: amirotin@yandex.ru

Поступило

20.08.2009

Исправленный вариант

25.05.2012