Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Братусь, М. В. Сафро, Асимптотика собственных значений матрицы Якоби систем полулинейных параболических уравнений, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 2, 204–213

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8611>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:26:50

Асимптотика собственных значений матрицы Якоби систем полулинейных параболических уравнений

А. С. Братусь, М. В. Сафро

Рассматриваются стационарные пространственно однородные решения системы полулинейных параболических уравнений в ограниченной области с краевыми условиями Неймана. Известно, что устойчивость таких решений связана со знаками вещественных частей собственных значений линеаризованного оператора, состоящего из матрицы Якоби динамической системы и дифференциального оператора, порожденного диффузионным процессом. Найдена асимптотика указанных собственных значений. Отдельно исследован случай, когда диффузионный оператор описывается матрицами, содержащими жордановы блоки, что соответствует случаю кросс-диффузии.

Библиография: 8 названий.

1. Постановка задачи. В ряде областей физики, химии, биологии [1]–[3] часто возникает задача об исследовании устойчивости стационарных решений краевых задач системы полулинейных параболических уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D\Delta u. \quad (1.1)$$

Здесь $u = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$ – вектор-функция переменных $t \geq 0$ и $x_1, x_2, \dots, x_n$, определенная при каждом t в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ при $t \geq 0$, $f(u) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_n(u))$ – гладкая дважды дифференцируемая вектор-функция, D – матрица с неотрицательными элементами $d_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \dots, n$ (матрица диффузии); Δ – n -мерный оператор Лапласа $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_n)$.

Заданы начальные условия

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \Omega.$$

На границе $\partial\Omega$ области $\bar{\Omega}$ задано условие Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.2)$$

Задача (1.1)–(1.3) изучается в полном метрическом пространстве вектор функций

$$U = \{u_1(x, t), \dots, u_n(x, t) : u_i(x, t) \in H^1(\Omega), i = 1, \dots, n, x \in \Omega\},$$

где $H^1(\Omega)$ – пространство функций Соболева с нормой

$$\|u\|_{H^1} = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \quad (1.3)$$

Наряду с системой (1.1) рассмотрим динамическую систему в $\mathbb{R}^n$

$$\frac{du}{dt} = f(u). \quad (1.4)$$

Пусть $u^0 = u_0^1, \dots, u_0^n$ – стационарная точка системы (1.4), т.е. $f(u^0) = 0$. Через A обозначим матрицу Якоби вектор функции $f(u)$ в точке u^0

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(u^0) \right), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Неподвижная точка u^0 системы (1.4) является также пространственно-однородным решением системы (1.1), поскольку выполняется равенство

$$f(u^0) + D\Delta u^0 = 0.$$

Рассмотрим линейное приближение системы (1.1) в точке u^0 :

$$\frac{du}{dt} = Au + D\Delta u.$$

Согласно теореме об устойчивости по линейному приближению [1] система полулинейных параболических уравнений (1.1) будет устойчива в окрестности неподвижной точки u^0 , если все собственные значения краевой задачи

$$Au + D\Delta u = \lambda u, \quad x \in \Omega, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.6)$$

отрицательны. Если хотя бы одно собственное значение задачи (1.5), (1.6) положительно, (1.1) будет неустойчивой.

Известно, что даже если система (1.4) устойчива в окрестности решения $u = u^0$, то соответствующая система с диффузией может быть неустойчивой в окрестности этого пространственно-однородного решения [2] и наоборот. Поэтому (особенно в случае систем большой размерности) большую роль играет асимптотика собственных значений системы (1.5), (1.6). Заметим, что хотя знаки вещественных частей первого и последующих приближения собственных значений системы (1.1) не дают ни достаточного, ни необходимого условия устойчивости системы (1.1) в стационарной точке $u = u^0$, они являются важными признаками возможного поведения системы в окрестности этого решения.

2. Случай матрицы диффузии простой структуры. Пусть матрица D имеет простую структуру, т.е. кратность любого собственного значения матрицы D равна числу линейно независимых собственных векторов, отвечающих этому собственному значению. Предполагается, что все собственные значения матрицы D

неотрицательны. В этом случае существует невырожденная матрица T такая, что $\Lambda = T^{-1}DT$, где Λ – диагональная матрица, элементы которой – собственные числа матрицы D .

Положим в (1.5), (1.6)

$$u(x) = Tv(x), \quad v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x)),$$

тогда имеем

$$Bv + \Lambda \Delta v = \lambda v, \quad (2.1)$$

$$(v)_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.2)$$

где $B = T^{-1}AT$, $x \in \Omega$. Рассмотрим решение краевой задачи на собственные значения для функции $Z(x)$, $x \in \Omega$,

$$\Delta Z = -\mu Z, \quad x \in \Omega, \quad \mu > 0, \quad \left. \frac{\partial Z}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.3)$$

Известно, что эта задача имеет счетное число решений – собственных значений

$$0 = \mu_0 < \mu_1 \leq \dots \leq \mu_k \leq \dots, \quad \mu_k \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow +\infty,$$

и соответствующее число собственных функций $\{Z_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, которые образуют полную ортогональную систему в $H^1(\Omega)$ [4].

Положим

$$v(x) = yZ_k(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – вектор в $\mathbb{C}^n$. Подставляя это равенство в (2.1), придем к матричной задаче на собственные значения

$$(B - \mu_k \Lambda)y = \lambda y, \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим $\varepsilon_k = (\mu_k)^{-1}$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, тогда последнее равенство можно записать в виде

$$(-\Lambda + \varepsilon_k B)y = \lambda(\varepsilon_k)y. \quad (2.4)$$

Здесь $\lambda(\varepsilon_k) = \lambda\varepsilon_k$.

Задача (2.4) может быть интерпретирована как задача об отыскании n собственных значений $\lambda^i(\varepsilon_k)$ возмущенной посредством добавки матрицы $\varepsilon_k B$ к диагональной матрице $-\Lambda$.

Пусть $d_1, \dots, d_n$ – элементы диагональной матрицы Λ , т.е. собственные числа исходной матрицы D и $d_i \neq d_j$, а b_{ij} – элементы матрицы B . Согласно результатам [5] собственные значения $\lambda^i(\varepsilon_k)$ и собственные векторы $y^i(\varepsilon_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, могут быть представлены в виде регулярного аналитического разложения по степеням ε_k с некоторыми коэффициентами:

$$\lambda(\varepsilon_k) = -d_i + \varepsilon_k \eta_1^i + \varepsilon_k^2 \eta_2^i + o(\varepsilon_k^2), \quad y^i(\varepsilon_k) = y^{i,0} + \varepsilon_k y^{i,1} + \varepsilon_k^2 y^{i,2} + o(\varepsilon_k^2), \quad (2.5)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots$$

Легко заметить, что $y^{i,0}$ является вектором, у которого все компоненты нули, кроме i -й, равной единице.

Подставляя разложения (2.5) в (2.4) и собирая члены одного и того же порядка по ε_k , имеем

$$\begin{aligned} -\Lambda y^{i,0} &= -d_i y^{i,0}, \\ -\Lambda y^{i,1} + B y^{i,0} &= \eta_1^i y^{i,0} - d_i y^{i,1}, \\ -\Lambda y^{i,2} + B y^{i,1} &= \eta_2^i y^{i,0} + \eta_1^i y^{i,1} - d_i y^{i,2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Умножим скалярно обе части второго равенства из (2.6) на $y^{i,0}$, получим

$$\eta_1^i = (B y^{1,0}, y^{i,0}) = b_{ii}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для отыскания следующего члена разложения η_2^i представим вектор $y^{i,1}$ в виде линейной комбинации базисных векторов $y^{i,0}$:

$$y^{i,1} = \sum_{j=1}^n y^{j,1} c_j^i, \quad c_j^i = \text{const.}$$

Подставляя это разложение во второе из равенств (2.6) и умножая последовательно обе части на векторы $y^{1,0}, y^{2,0}, \dots, y^{n,0}$, получим

$$c_j^i = \frac{(B y^{i,0}, y^{i,0})}{d_i - d_j} = -\frac{b_{ji}}{d_i - d_j}, \quad i \neq j.$$

Коэффициенты c_j^i , $i = 1, \dots, n$, остаются неизвестными, однако непосредственно проверяется, что на дальнейшие выкладки это обстоятельство никак не влияет. С учетом последнего равенства имеем

$$y^{i,1} = -\sum_{j \neq i} \frac{b_{ji}}{d_i - d_j} y^{i,0} + \sum_{i=1}^n c_i^i y^{1,0}.$$

Подставляя теперь это равенство в третье уравнение (2.6) и умножая обе части скалярно на $y^{i,0}$, получим

$$\eta_2^i = -\sum_{i \neq j} \frac{b_{ji}}{d_i - d_j} (B y^{j,0}, y^{i,0}) = -\sum_{j \neq i} \frac{b_{ji} b_{ij}}{d_i - d_j}.$$

В итоге доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть матрица диффузии D в (1.1) имеет простую структуру, и пусть d_i , $i = 1, \dots, n$, – собственные значения матрицы D , причем $d_i \neq d_j$, $i \neq j$. Пусть μ_k , $k = 1, 2, \dots$, – собственные значения краевой задачи (2.3), $\mu_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, а b_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, – элементы матрицы B . Тогда собственные значения задачи (1.5), (1.6) могут быть представлены в виде асимптотического разложения

$$\begin{aligned} \lambda_k^i &= -d_i \mu_k + b_{ii} - \mu_k^{-1} \sum_{i \neq j} \frac{b_{ij} b_{ji}}{d_i - d_j} + O(\mu_k^{-2}), \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \mu_k &\rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Формула (2.7) показывает, что первые члены разложения (2.7) будут положительны, если $d_i < b_{ii}/\mu_k$, $b_{ii} > 0$, т.е. если коэффициенты диффузии достаточно малы. Факт потери устойчивости пространственно-однородных решений¹ и возникновение пространственно-неоднородных состояний диссипативных структур равновесия при малых коэффициентах диффузии описан в [7]. Причем при последовательном уменьшении коэффициентов диффузии возникают бифуркации (перестройки) структуры диссипативных членов.

В связи с этим возникает гипотеза, что достаточным условием возникновения диссипативных структур является условие $d_i < c/\mu_1$, $i = 1, \dots, n$, здесь μ_1 – первое ненулевое значение, $c - \text{const} > 0$, а появление бифуркационных решений определяется неравенством $d_i < c_i/\mu_k$, $k = 2, 3, \dots$, $c_i - \text{const} > 0$. Отметим, что в частных случаях это условие является верным [8].

3. Случай, когда матрица диффузии имеет кратные собственные значения. Пусть среди собственных значений матрицы D имеются кратные. Например, d_1 – значение кратности $s \geq 2$. Поскольку D – матрица простой структуры, то этому кратному собственному значению отвечают s линейно-независимых собственных векторов. Не умаляя общности, можно сказать, что матрица Λ имеет по диагонали s раз повторяющееся собственное значение d_1 в левом верхнем углу. Остальные собственные значения $d_2, \dots, d_r$ ($r = n - s$) будем считать простыми и не равными d_1 . Собственные векторы, отвечающие кратному значению d_1 , имеют вид

$$\omega^1 = (1, 0, \dots), \quad \omega^2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \omega^s = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad (3.1)$$

(в ω^s единица стоит на s -м месте). Собственные векторы, отвечающие остальным собственным значениям, обозначим, как и ранее, через $y^{0,i}$, $i = s + 1, \dots, n - s$ (единица – на s -м месте). Возмущенное собственное значение $\eta^1(\xi_k)$ задачи (2.4) можно [5] искать в виде первого равенства (2.5) с $i = 1$. Представим собственный вектор $y^1(\xi_k)$ в виде

$$y^1(\xi_k) = \sum_{j=1}^s k_j \omega^j + \varepsilon_k y^{1,1} + \varepsilon_k^2 y^{1,2} + o(\varepsilon_k^2). \quad (3.2)$$

Здесь k_j – некоторые постоянные, вообще говоря, комплексные, а ω^j определены в (3.1). Подставляя (3.2) в (2.4) и собирая члены с одинаковыми степенями ε_k , получим

$$\begin{aligned} (-\Lambda + d_1)y^{1,1} + \sum_{j=1}^s k_j B \omega^j &= \eta_1^1 \sum_{j=1}^s k_j \omega^j + \eta_1^1 y^{1,1}, \\ s(-\Lambda + d_1)y^{1,2} + B y^{1,1} &= \eta_2^1 \sum_{j=1}^s k_j \omega^j + \eta_1^1 y^{1,1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Умножая последовательно обе части первого равенства (3.3) скалярно на векторы ω^r , $r = 1, \dots, n$, получим систему линейных однородных уравнений относительно постоянных k_j :

$$\sum_{j=1}^s b_{rj} k_j = k_r \eta_1^1, \quad r = 1, \dots, s.$$

¹Пространственно-однородным решением системы называется решение $\bar{u}(x)$ уравнения $\Delta \bar{u} + f(\bar{u}) = 0$, $\bar{u}(x) \neq \text{const}$.

Эта система имеет решение тогда и только тогда, когда

$$|B_s - \eta_1^1 E| = 0. \quad (3.4)$$

Здесь $B_s - (s \times s)$ -матрица с элементами b_{ij} , $i, j = 1, \dots, s$. Следовательно, величины η_1^1 – собственные значения матрицы B_s . Обозначим эти значения через $(\eta_1^1)_p$, $p = 1, \dots, s$. Вектор $y^{1,1}$ будем искать в виде

$$y^{1,1} = \sum_{j=1}^s c_j \omega^j + \sum_{j=s+1}^n c_j y^{0,j}, \quad c_j = \text{const.}$$

Если это равенство подставить в первое уравнение (3.3), а затем умножить обе его части скалярно на векторы $y^{0,j}$, $j = s+1, \dots, n$, то получим

$$c_j = -\frac{\sum_{j=1}^s k_j b_{ij}}{d_1 - d_i}, \quad i = s+1, \dots, n.$$

Постоянные c_j , $j = 1, \dots, s$, при этом не определяются. В итоге имеет место разложение

$$y^{1,1} = \sum_{j=1}^s c_j \omega^j - \sum_{j=s+1}^n \frac{\sum_{j=1}^s k_j b_{ij}}{d_1 - d_i} y^{0,j}.$$

Подставим это равенство во второе уравнение (3.3) и умножим его скалярно на вектор

$$\bar{y}^{1,0} = \sum_{j=1}^s \bar{k}_j \omega^j.$$

Окончательно получим

$$\sum_{j=1}^s \sum_{i=s+1}^n \frac{(\sum_{r=1}^s k_r b_{ri}) \bar{k}_j b_{ji}}{d_1 - d_i} + \sum_{i,r=1}^s b_{jr} c_r \bar{k}_j = \eta_1^1 \sum_{j=1}^s c_j \bar{k}_j + \eta_1^2 \sum_{r=1}^s |k_r^p|^2.$$

Следовательно, для величин $(\eta_2^1)_p$ имеет место разложение

$$(\eta_2^1)_p = -\sum_{j=1}^s \sum_{i=s+1}^n \frac{(\sum_{r=1}^s k_r^p b_{ri}) \bar{k}_j^p b_{ji}}{(d_1 - d_i) \sum_{r=1}^s |k_r^p|^2}, \quad p = 1, \dots, s.$$

Здесь k_j^p – координаты p -го собственного вектора задачи $B_s k = \eta_1^1 k$, отвечающего собственному значению $(\eta_1^1)_p$, $p = 1, \dots, s$.

Полученный результат можно сформулировать в следующем виде.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть матрица D в (1.1) имеет простую структуру и d_1 – собственное значение кратности s . Тогда отвечающие этому собственному значению s собственных значений задачи (1.5), (1.6) представляются в виде асимптотического разложения

$$\lambda_k^p = -d_1 \mu_k + (\eta_1^1)_p - \mu_k^{-1} \sum_{j=1}^s \sum_{i=s+1}^n \frac{(\sum_{r=1}^s k_r^p b_{ri}) \bar{k}_j^p b_{ji}}{(d_1 - d_i) \sum_{r=1}^s |k_r^p|^2} + O(\mu_k^{-2}).$$

Здесь $(\eta_1^1)_p$ – p -е собственное значение задачи (3.3), k_j^p – координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $(\eta_1^1)_p$, $p = 1, \dots, s$. Остальные собственные значения выражаются формулой (2.7) при $s = 1, \dots, n$, где $d_j = d_1$ для $j = 1, \dots, s$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если d_1 – собственное число кратности n , то формула (3.3) приобретает вид точного равенства:

$$\lambda_k^p = -d_1 \mu_k + (\eta_1^1)_p, \quad p = 1, \dots, n,$$

где $(\eta_1^1)_p$ – собственное значение матрицы B .

4. Случай, когда матрица диффузии имеет жордановы блоки. Рассмотрим случай, когда матрица Λ содержит жорданов блок, что соответствует наличию кросс-диффузионных членов в системе

$$J_m = \begin{pmatrix} d_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $d_{m+1}, d_{m+2}, \dots, d_n$ – остальные собственные значения матрицы D ; m -кратному собственному значению d_1 отвечает единственный собственный вектор $y^{1,0}$, а остальным собственным значениям – собственные векторы $y^{i,0}$, $i = m+1, \dots, n$. Известно, что в этом случае собственное значение $\lambda_k^1(\varepsilon_k)$ и собственные векторы $y^1(\varepsilon_k)$ возмущенной задачи представляются по степеням $\varepsilon_k^{1/m}$ [5], [6]:

$$\begin{aligned} \lambda^1(\varepsilon_k) &= -d_1 + \varepsilon_k^{1/m} \eta_1^1 + \varepsilon_k^{2/m} + \varepsilon_k^{2/m} \varepsilon_k^{3/m} \eta_3^1 + o(\varepsilon_k^{3/m}), \\ y^1(\varepsilon_k) &= -y^{1,0} + \varepsilon_k^{1/m} y^{1,1} + \varepsilon_k^{2/m} y^{1,2} + \varepsilon_k^{3/m} y^{1,3} + o(\varepsilon_k^{3/m}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Остальные собственные векторы и собственные значения представляются в виде разложения (2.5) по целым степеням ε_k .

Рассмотрим случай жорданова блока

$$J_2 = \begin{pmatrix} d_1 & 1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае разложение (4.1) реализуется по степеням $\varepsilon_k^{1/2}$.

Если подставить (4.1) в (2.4) и собрать члены одного порядка по ε_k , то получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} (-\Lambda + d_1)y^{1,0} &= 0, \\ (-\Lambda + d_1)y^{1,1} &= \eta_1^1 y^{1,0}, \\ (-\Lambda + d_1)y^{1,2} + B y^{1,0} &= \eta_1^1 y^{1,1} + \eta_2^1 y^{1,0}, \\ (-\Lambda + d_1)y^{1,2} + B y^{1,1} &= \eta_1^1 y^{1,2} + \eta_2^1 y^{1,1} + \eta_3^1 y^{1,0}, \\ (-\Lambda + d_1)y^{1,3} + B y^{1,1} &= \eta_1^1 y^{1,3} + \eta_2^1 y^{1,2} + \eta_3^1 y^{1,1} + \eta_4^1 y^{1,0}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $y^{1,0} = (1, 0, \dots, 0)$ и $y^{i,0} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (1 стоит на i -м месте), $i = 3, \dots, n$. Второе уравнение системы (4.2) разрешимо, если и только если его правая часть ортогональна к решениям сопряженного уравнения

$$(-\Lambda^* + d_1)z^0 = 0. \quad (4.3)$$

Это условие выполняется, когда $z^0 = (0, 1, 0, \dots, 0)$. Решением второго уравнения системы (4.2) является $y^{1,1} = (\alpha_1, \eta_1^1, 0, \dots, 0)$, где α_1 – произвольная константа. Умножая третье уравнение системы (4.2) на z^0 и используя уравнение (4.3), получаем

$$((- \Lambda + d)y^{1,2}, z^0) = (y^{1,2}, (-\Lambda^* + \bar{d})z^0) = 0, \quad (4.4)$$

$$-b_{21} - (\eta_1^1)^2 = 0, \quad \eta_1^1 = \pm \sqrt{-b_{21}}. \quad (4.5)$$

Положим $y^{1,2} = (\alpha_1, \beta_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n)$. Первая компонента третьего уравнения системы (4.2) дает $-\beta_2 + b_{11} = \eta_2^1 + \alpha_1 \eta_1^1$, и i -я компонента дает $\gamma_i = -b_{i1}/(d_i - d_1)$, $i = 3, \dots, n$, где $d_i \neq d_1$. Умножая четвертое уравнение системы (4.2) на z^0 получаем соотношения к уравнению (4.4) для вектора $y^{1,3}$ и формулу $(y^{1,0}, z^0) = 0$, $-b_{21}\alpha_1 + \eta_1^1 b_{22} - 2\eta_2^1 \eta_1^1 + \eta_1^1 b_{11} - \alpha_1 \eta_1^2 = 0$.

Подставив $(\eta_1^1)^2 = -b_{21}$, получим

$$\eta_2^1 = \frac{b_{11} + b_{22}}{2}.$$

Вернемся к четвертому уравнению системы (4.2) и положим $y^{1,3} = (\alpha_3, \beta_3, \gamma'_3, \dots, \gamma'_n)$. Тогда первая компонента этого уравнения дает

$$\beta_3 = b_{11}\alpha_1 + b_{12}\eta_1^1 - \eta_3^1 - \alpha_1\eta_2^1 - \alpha_2\eta_1^1.$$

Умножая пятое уравнение системы (4.2) на z^0 и используя формулу (4.4) для вектора $y^{1,4}$, получим

$$\begin{aligned} & -b_{21}\alpha_2 - b_{22}(b_{11} - \eta_2^1 - \alpha_1\eta_1^1) - \eta_1^1\eta_3^1 + b_{11}\eta_2^1 - (\eta_1^1)^2 \\ & - 2\alpha_1\eta_1^1\eta_2^1 + \eta_1^1 b_{11}\alpha_1 + b_{12}(\eta_1^1)^2 - \eta_1^1\eta_3^1 - (\eta_1^1)^2\alpha_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из (4.5), (4.6) следует

$$\alpha_1(b_{22} + b_{11} - 2\eta_2^1)\eta_1^1 = 0, \quad \alpha_2(-b_{21} - (\eta_1^1)^2) = 0.$$

Поэтому

$$2\eta_1^1\eta_3^1 = \frac{(b_{11} + b_{22})^2}{4} - b_{22}b_{11} + b_{12}b_{21} = \frac{(b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21}}{4}.$$

Так же, как в предыдущем случае, можно единственным образом определить γ'_i , $3, \dots, n$, рассматривая i -ю компоненту пятого уравнения системы (4.2).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Предположим, что у канонической формы матрицы D имеется простой жордановый блок*

$$\begin{pmatrix} d_1 & 1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Если $b_{21} \neq 0$, то соответствующие собственные значения задач (1.5), (1.6) имеют форму

$$\begin{aligned} \lambda_k^{1,2} &= -d_1\mu_k \pm (\mu_k)^{1/2}\sqrt{-b_{21}} + \frac{b_{11} + b_{22}}{2} \\ &\pm \frac{(\mu_k)^{-1/2}}{8(-b_{21})^{1/2}}[(b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21}] + o(\mu_k^{-1/2}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где знаки “+” и “−” определяются для значений λ_k^1 и λ_k^2 соответственно.

Случай $b_{21} = 0$ является вырожденным. Нетрудно показать, что в этом случае $\lambda_k^i = -d_1\mu_k + b_{ii}$, $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2$. Аналогично доказываются формулы для жордановых матриц третьего и четвертого порядков.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если матрица Λ содержит жорданов блок третьего или четвертого порядка, то имеют место соответственно следующие представления:

$$(\lambda_k^1)_i = -d_1\mu_k + (\mu_k)^{2/3}(b_{31})_i^{1/3} - (\mu_k)^{1/3} \frac{b_{21} + b_{32}}{3(b_{31})_i^{1/3}} + \left(\frac{b_{11} + b_{22} + b_{33}}{3} \right) + o((\mu_k)^{-1/3}),$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $(b_{31})_i^{1/3}$ – кубический корень элемента $b_{31} \neq 0$ матрицы B ,

$$(\lambda_k^1)_i = -d_1\mu_k + (\mu_k)^{3/4}(-b_{41})_i^{1/4} - (\mu_k)^{1/2} \frac{b_{42} + b_{31}}{(-b_{41})_i^{1/4}} + o((\mu_k)^{-1/4}),$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $(-b_{41})_i^{1/4}$ – корни четвертой степени элемента $b_{41} \neq 0$ матрицы B .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Случаи $b_{31} = 0$ и $b_{41} = 0$ являются вырожденными. В этих случаях разложение (4.1) содержит целое число ε_k , причем

$$\lambda_k^1 = -\mu_k d_1 + \frac{b_{11}b_{32} + b_{21}b_{33}}{b_{21}} + O(\mu_k^{-1}), \quad n = 3,$$

$$\lambda_k^1 = -\mu_k d_1 + \frac{b_{42} + b_{43}b_{21} + b_{23}b_{44}}{b_{23}} + O(\mu_k^{-1}), \quad n = 4.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Можно показать, что для случаев $n = 5, 6, \dots$ главная часть асимптотического разложения имеет вид $(-b_{n1})^{1/n}$, если $n = 2k$ или $(b_{n1})^{1/n}$, если $n = 2k - 1$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому имеет место следующее представление:

$$\lambda_k^i = -d_1\mu_k + (\pm b_{n1})^{1/n} \mu_k^{1-1/n} + O(\mu_k^{1-2/n}).$$

В соответствии с выдвинутой ранее гипотезой можно предположить, что в этом случае достаточное условие возникновения стационарных пространственно неоднородных решений будет иметь вид

$$d_1 < c \frac{\operatorname{Re}(\pm b_{n1})^{1/n}}{\mu_1^{1-1/n}}, \quad c = \operatorname{const} > 0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.
- [2] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Biomathematics, **19**, Springer, Berlin, 1993.
- [3] Дж. Марсен, М. Мак-Кракен, *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*, Мир, М., 1980.
- [4] С. Г. Михлин, *Вариационные методы в математической физике*, Наука, М., 1970.
- [5] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

- [6] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, “Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. Г”, *УМН*, **15**:3 (1960), 3–80.
- [7] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “О существовании асимптотически большого числа устойчивых диссипативных структур в параболических системах с малой диффузией”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **20**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1997, 3–26.
- [8] А. С. Братусь, В. П. Посвянский, “Стационарные решения в замкнутой распределенной системе эволюции Эйгена–Шустера”, *Дифференц. уравнения*, **42**:12 (2006), 1686–1698.

А. С. Братусь

Московский государственный университет путей сообщения
(МИИТ)

E-mail: applmath1miit@yandex.ru

Поступило

05.06.2009

Исправленный вариант

25.03.2010

М. В. Сафро

Московский государственный университет путей сообщения
(МИИТ)

E-mail: safromisha@rambler.ru