Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Загребаев, Смешанная задача для расширения Дирака–Швингера системы Максвелла, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 2, 184–199

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8613>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:34:33

Смешанная задача

для расширения Дирака–Швингера системы Максвелла

И. В. Загребаев

Статья посвящена актуальной, но недостаточно изученной задаче об условиях L_2 -корректной разрешимости начально-краевой задачи для линейной системы 4-х уравнений гиперболического типа (уравнений Максвелла для вектора-потенциала) с диссипацией, нулевым начальным и неоднородным граничным условием.

Библиография: 9 названий.

Введение

Одна из проблем кинетики неравновесных процессов [1] связана с недостаточной информацией о начально-краевых данных большей части неравновесных переменных, которые не имеют интуитивного физического смысла – их нельзя определить из эксперимента. К тому же число неравновесных переменных настолько велико, что количества разумных с физической точки зрения граничных условий не достаточно для постановки смешанной задачи [2]. Тогда что в этом случае начальные данные для задачи Коши и граничные данные для смешанной задачи? По сути начально-краевые данные большей части неравновесных переменных (моменты высших порядков) мы должны рассматривать любыми! Поэтому требуется так поставить математически корректную задачу, чтобы ее решение (в некотором смысле) определялось лишь физически измеримыми функциями. В данной работе этот вопрос рассматривается на примере смешанной задачи для расширения Дирака–Швингера системы Максвелла:

$$\begin{cases} i\alpha \frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{rot} U - \beta \nabla \rho, \\ i\alpha_1 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} U - \gamma_1 \rho. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ρ – дополнительная к $U = (u_1, u_2, u_3)^T$ искомая, но физически неизмеримая функция переменных $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_3 > 0\}$ и $t \in \mathbb{R}$, числа α , α_1 и β – положительные константы и $\gamma_1 = \nu_1 + i\nu_2$, $\nu_{1,2} > 0$.

В рассматриваемой ниже смешанной задаче для матричного уравнения (1) начальные условия для искомой функции $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$, где $\mathcal{U}_1 = (u_1, u_2)$, а $\mathcal{U}_2 =$

(u_3, ρ) , зададим в виде

$$\mathcal{U} = 0 \quad \text{при} \quad t \leq 0. \quad (2)$$

Что же касается граничных условий

$$\mathcal{B}\mathcal{U}|_{x_3=0} = g(x_1, x_2, t), \quad (3)$$

где функция $g = (g_1, g_2)^T \in L_2(\mathbb{R}^3) \times L_2(\mathbb{R}^3)$ обращается в нуль при $t \leq 0$, то мы накладываем такие ограничения на элементы матрицы

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix},$$

при которых справедливы следующие два условия:

- 1) существует, причем единственное обобщенное решение $\mathcal{U} = \mathcal{U}^g \in L^2$ смешанной задачи (1)–(3) и такое число $K_q > 0$, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \|\mathcal{U}^g(x_1, x_2, 0, t)\|_{\mathbb{R}^2}^2 dt + \int_0^\infty \|\mathcal{U}^g(x_1, x_2, x_3, t)\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 dt \\ & \leq K_q \int_0^\infty \|g(x_1, x_2, t)\|_{\mathbb{R}^2}^2 dt; \end{aligned} \quad (4)$$

- 2) существует такой псевдо-дифференциальный оператор $\Pi(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_t)$ нулевого порядка, что для любой граничной функции $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющей некоторому условию невырожденности, существует такое преобразование $\tilde{g} = (F_\Pi(g_1, g_2), 0)^T$, что решение $\mathcal{U}^g = (\mathcal{U}_1^g, \mathcal{U}_2^g)$ задачи (1)–(3) и решение $\mathcal{U}_\Pi^{\tilde{g}} = (\mathcal{U}_1^{\tilde{g}}, \Pi\mathcal{U}_1^{\tilde{g}})$, соответствующее граничной функции $\tilde{g}$, ведут себя одинаково вдали от границы, а именно

$$\int_0^\infty |\mathcal{U}^g(x_1, x_2, x_3, t) - \mathcal{U}_\Pi^{\tilde{g}}(x_1, x_2, x_3, t)| dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_3 \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Преобразование $\Pi(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_t)$, как это видно из структуры притягивающего решения $\mathcal{U}_\Pi^{\tilde{g}} = (\mathcal{U}_1^{\tilde{g}}, \Pi\mathcal{U}_1^{\tilde{g}})$, решает проблему начально-краевых данных для неопределяемых из эксперимента неравновесных переменных. А именно, выражает их через физически измеримую часть неизвестной вектор-функции $\mathcal{U}$.

Условие 1), включая справедливость оценки (4), как показано в работе Крайса [4], выполнено для весьма широкого класса смешанных задач гиперболического типа. Справедливость оценки (4) на полупрямой следует из оценки Крайса в силу того, что мы рассматриваем задачу с начальными данными, но без правой части. Полученные в [4] необходимые и достаточные условия сформулированы в терминах спектральных характеристик рассмотренных там задач. Если для смешанной задачи выполнено условие 1), будем говорить, что данная задача L^2 -корректна (по Крайсу). В данной работе мы конкретизируем условия Крайса, выражая их для задачи (1)–(3) через алгебраические соотношения на параметры задачи: числа α_j , параметр $q \in (0, 1)$ и элементы матрицы $\mathcal{B}$.

Что же касается условия 2), то оно является математической формулировкой предложенной в [5]–[7] концепции [8], согласно которой граничное условие, характеризующее матрицей $\mathcal{B}$, является физически оправданным лишь в том случае, если

для любой достаточно гладкой граничной функции g и соответствующего ей решения $\mathcal{U}^g$ выполнено такое свойство: найдется такая граничная функция $\tilde{g}$, что соответствующее этой функции $\tilde{g}$ решение характеризуется только физически измеримыми функциями и ведет себя вдали от границы так же, как решение $\mathcal{U}^g$.

1. L^2 -корректность

Для исследования смешанной задачи (1)–(3) систему (1) удобно переписать в виде

$$iE_\alpha \partial_t \mathcal{U} = \sum_{j=1}^3 A_j \partial_{x_j} \mathcal{U} + Q \mathcal{U}. \quad (6)$$

Здесь

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что матричное уравнение (6) строго гиперболическое (по определению Крайса, см. [4]), если $\alpha\beta - \alpha_1 \neq 0$. Сделаем замену переменных

$$V = e^{-\gamma t} \mathcal{U}(x, t), \quad V^I = e^{-\gamma t} \mathcal{U}^I(x, t), \quad V^{II} = e^{-\gamma t} \mathcal{U}^{II}(x, t), \quad \gamma > 0. \quad (7)$$

Тогда наша система преобразуется к виду

$$iE_\alpha \partial_t e^{\gamma t} V = \sum_{j=1}^3 e^{\gamma t} A_j \partial_{x_j} V + e^{\gamma t} Q \cdot V$$

или

$$\partial_{x_3} V = A_3^{-1} \cdot (iE_\alpha \partial_t V + iE_\alpha \gamma V - A_1 \partial_{x_1} V - A_2 \partial_{x_2} V - Q \cdot V).$$

Граничные условия в новых переменных примут вид

$$\mathcal{B}V(x_1, x_2, 0, t) = e^{-\gamma t} g(x_1, x_2, t).$$

Сделаем преобразование Фурье по x_1, x_2 и t . Обозначим через ξ_1, ξ_2, τ двойственные переменные к x_1, x_2 и t и через $\widehat{V}(\xi_1, \xi_2, x_3, \tau)$, $\widehat{g}(\xi_1, \xi_2, \tau)$ — преобразования Фурье $V(x_1, x_2, x_3, t)$ и $e^{-\gamma t} g(x_1, x_2, t)$ соответственно. Тогда $\widehat{V}$ является решением задачи

$$\frac{d\widehat{V}}{dx_3} = \mathcal{M} \widehat{V} \quad \text{при } x_3 > 0, \quad \mathcal{B} \widehat{V} = \widehat{g} \quad \text{при } x_3 = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$\mathcal{M} = A_3^{-1} (i(i\tau + \gamma)E_\alpha - i\xi_1 A_1 - i\xi_2 A_2 - Q)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha(\tau - i\gamma) & i\xi_1 & i\beta\xi_2 \\ \alpha(\tau - i\gamma) & 0 & i\xi_2 & -i\beta\xi_1 \\ -i\xi_1 & -i\xi_2 & 0 & -\alpha_1(\tau - i\gamma) + \gamma_1 \\ -\frac{i\xi_2}{\beta} & \frac{i\xi_1}{\beta} & \frac{\alpha}{\beta}(\tau - i\gamma) & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем важное в дальнейшем обозначение

$$s = i\tau + \gamma.$$

Характеристическое уравнение для матрицы $\mathcal{M}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mu^4 - \left[2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 - \left(\alpha^2 + \frac{\alpha\alpha_1}{\beta} \right) (\tau - i\gamma)^2 + \frac{\alpha}{\beta} (\tau - i\gamma) \gamma_1 \right] \mu^2 \\ + (\xi_1^2 + \xi_2^2 - \alpha^2 (\tau - i\gamma)^2) \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \frac{\alpha\alpha_1}{\beta} (\tau - i\gamma)^2 + \frac{\alpha}{\beta} (\tau - i\gamma) \gamma_1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для собственных значений получаем

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} &= \pm \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 - \alpha^2 (\tau - i\gamma)^2}, \\ \mu_{3,4} &= \pm \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 - \frac{\alpha\alpha_1}{\beta} (\tau - i\gamma)^2 + \frac{\alpha}{\beta} (\tau - i\gamma) \gamma_1}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. При $\gamma > 0$ матрица $\mathcal{M}$ имеет в точности 2 собственных значения μ с $\operatorname{Re} \mu < 0$ и 2 собственных значения μ с $\operatorname{Re} \mu > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что при $\gamma > 0$ собственные значения μ матрицы $\mathcal{M}$ не лежат на мнимой оси, т.е. $\operatorname{Re} \mu \neq 0$. Действительно, для первой пары собственных значений

$$\mu_{1,2} = \pm \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 - \alpha^2 \tau^2 + \alpha^2 \gamma^2 + 2i\tau\gamma\alpha^2}$$

очевидно, что если $\gamma > 0$, то $\operatorname{Re} \mu_{1,2} \neq 0$. При $\gamma > 0$ мнимая часть подкорневого выражения для второй пары собственных значений

$$\mu_{3,4} = \pm \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 - \frac{\alpha\alpha_1}{\beta} \tau^2 + \frac{\alpha\alpha_1}{\beta} \gamma^2 + \frac{\alpha}{\beta} (\tau\nu_1 + \gamma\nu_2) + i\frac{\alpha}{\beta} (\tau(2\alpha_1\gamma + \nu_2) - \gamma\nu_1)}$$

равна нулю при $\tau = \gamma\nu_1/(2\alpha_1\gamma + \nu_2)$. В этом случае для $\mu_{3,4}$ получаем

$$\begin{aligned} \mu_{3,4} &= \pm \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 - \frac{\alpha\alpha_1}{\beta} \left(\frac{\gamma\nu_1}{2\alpha_1\gamma + \nu_2} \right)^2 + \frac{\alpha\alpha_1}{\beta} \gamma^2 + \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\gamma\nu_1^2}{2\alpha_1\gamma + \nu_2} + \gamma\nu_2 \right)} \\ &= \pm \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{(2\alpha_1\gamma + \nu_2)^2 (\alpha_1\gamma^2 + \gamma\nu_2) + \gamma\nu_1^2 (\alpha_1\gamma + \nu_2)}{(2\alpha_1\gamma + \nu_2)^2}}. \end{aligned}$$

Очевидно, подкорневое выражение положительно при $\gamma > 0$ и, следовательно, $\operatorname{Re} \mu_{3,4} \neq 0$.

ЛЕММА 2. Для всех $\gamma > 0$, кроме $\gamma = \nu_2/(\alpha\beta - \alpha_1)$, матрица $\mathcal{M}$ не имеет кратных собственных значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим сначала, что $\mu_1 = \mu_2$. Тогда $|\xi|^2 = \alpha^2(\tau - i\gamma)^2$. При $\gamma > 0$ получаем противоречие: слева стоит действительное число, а справа комплексное.

Если $\mu_3 = \mu_4$, то

$$\frac{\alpha\alpha_1}{\beta}(\tau^2 - 2i\tau\gamma - \gamma^2) = \frac{\alpha}{\beta}(\tau - i\gamma)\gamma_1.$$

Отсюда

$$\alpha_1(\tau - i\gamma) = \gamma_1 = \nu_1 + i\nu_2.$$

Получаем $\gamma = -\nu_2/\alpha_1$, что противоречит условию $\gamma > 0$.

Предположим теперь, что $\mu_{1,2} = \mu_{3,4}$. Тогда

$$\alpha^2(\tau - i\gamma)^2 = \frac{\alpha\alpha_1}{\beta}(\tau - i\gamma^2) - \frac{\alpha}{\beta}(\tau - i\gamma)\gamma_1.$$

Приравнявая мнимые части, получаем

$$-2\alpha^2\tau\gamma = -2\frac{\alpha\alpha_1}{\beta}\tau\gamma + \frac{\alpha}{\beta}\gamma\nu_1 - \frac{\alpha}{\beta}\tau\nu_2.$$

Введем важное в дальнейшем обозначение

$$C = \alpha\beta - \alpha_1. \quad (9)$$

Тогда имеем

$$\gamma = \frac{\tau\nu_2}{\nu_1 + 2C\tau}. \quad (10)$$

Приравнявая действительные части, получаем

$$\alpha^2(\tau^2 - \gamma^2) = \frac{\alpha\alpha_1}{\beta}(\tau^2 - \gamma^2) - \frac{\alpha}{\beta}\tau\nu_1 - \frac{\alpha}{\beta}\gamma\nu_2.$$

Воспользовавшись (10), получим уравнение на τ :

$$\alpha\beta(\tau(\nu_1 + 2C\tau)^2 - \tau\nu_2^2) = \alpha_1(\tau(\nu_1 + 2C\tau)^2 - \tau\nu_2^2) - \nu_1(\nu_1 + 2C\tau)^2 - \nu_2^2(\nu_1 + 2C\tau)$$

или

$$4C^3\tau^3 + 8C^2\nu_1\tau^2 + C(5\nu_1^2 + \nu_2^2)\tau + \nu_1^3 + \nu_1\nu_2^2 = 0.$$

При $C = 0$ это уравнение не имеет решения, и, следовательно, матрица $\mathcal{M}$ не имеет кратных собственных значений. При $C \neq 0$ последнее уравнение можно переписать в виде

$$\left(\tau + \frac{\nu_1}{C}\right)\left(\tau^2 + \tau\frac{\nu_1}{C} + \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{4C^2}\right) = 0.$$

Это уравнение имеет всего один вещественный корень $\tau = -\nu_1/C$. Подставляя это решение в (10), получаем утверждение леммы. Стоит заметить, что при $C = \alpha\beta - \alpha_1 < 0$ полученное критическое значение γ не удовлетворяет условию $\gamma > 0$. Следовательно, при $C \leq 0$ для любого $\gamma > 0$ матрица $\mathcal{M}$ не имеет кратных собственных значений. При $C > 0$ матрица $\mathcal{M}$ не имеет кратных собственных значений для любых $\gamma > 0$, $\gamma \neq \nu_2/C$.

Пусть $\Gamma = \min(\operatorname{Re}(\mu_3 - \mu_1); \operatorname{Re}(\mu_2 - \mu_4))$.

ЛЕММА 3. Если

$$\gamma > 0, \quad \nu_2 > \nu_1, \quad \frac{1}{2\gamma} \left(\nu_2 - \sqrt{\nu_2^2 - \nu_1^2} \right) < C \stackrel{(9)}{=} \alpha\beta - \alpha_1 < \frac{\nu_2}{2\gamma},$$

то для любого τ имеем $\Gamma > 0$ (условие щели).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вещественные части собственных значений матрицы $\mathcal{M}$ имеют вид

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} \mu_{1,2})^2 &= \frac{1}{2} \left(|\xi|^2 - \alpha^2 \tau^2 + \alpha^2 \gamma^2 + \sqrt{(|\xi|^2 - \alpha^2 \tau^2 + \alpha^2 \gamma^2)^2 + 4\tau^2 \gamma^2 \alpha^4} \right), \\ (\operatorname{Re} \mu_{3,4})^2 &= \frac{1}{2} \left(|\xi|^2 - \frac{\alpha\alpha_1}{\beta} (\tau^2 - \gamma^2) + \frac{\alpha}{\beta} (\tau\nu_1 + \gamma\nu_2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\left(|\xi|^2 - \frac{\alpha\alpha_1}{\beta} (\tau^2 - \gamma^2) + \frac{\alpha}{\beta} (\tau\nu_1 + \gamma\nu_2) \right)^2 + \left(2\frac{\alpha\alpha_1}{\beta} \tau\gamma + \frac{\alpha}{\beta} (\tau\nu_2 - \gamma\nu_1) \right)^2}. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Q_1 &= |\xi|^2 - \alpha^2 \tau^2 + \alpha^2 \gamma^2, & Q_2 &= |\xi|^2 - \frac{\alpha\alpha_1}{\beta} (\tau^2 - \gamma^2) + \frac{\alpha}{\beta} (\tau\nu_1 + \gamma\nu_2), \\ a_1 &= 2\alpha^2 \tau\gamma, & a_2 &= 2\frac{\alpha\alpha_1}{\beta} \tau\gamma + \frac{\alpha}{\beta} (\tau\nu_2 - \gamma\nu_1). \end{aligned}$$

В этих обозначениях имеем

$$2(\operatorname{Re} \mu_1)^2 = Q_1 + \sqrt{Q_1^2 + a_1^2}, \quad 2(\operatorname{Re} \mu_3)^2 = Q_2 + \sqrt{Q_2^2 + a_2^2}.$$

Тогда неравенство $\operatorname{Re} \mu_1 < \operatorname{Re} \mu_3$ эквивалентно неравенству

$$Q_1 - Q_2 < \sqrt{Q_2^2 + a_2^2} - \sqrt{Q_1^2 + a_1^2}$$

или

$$(Q_1 - Q_2) \left(Q_1 + Q_2 + \sqrt{Q_2^2 + a_2^2} + \sqrt{Q_1^2 + a_1^2} \right) < a_2^2 - a_1^2.$$

Очевидно, что для любых ξ , τ и $\gamma > 0$ выполнено

$$Q_1 + Q_2 + \sqrt{Q_2^2 + a_2^2} + \sqrt{Q_1^2 + a_1^2} \geq 0.$$

Имеем

$$Q_1 - Q_2 = -\left(\alpha^2 - \frac{\alpha\alpha_1}{\beta} \right) \tau^2 + \left(\alpha^2 + \frac{\alpha\alpha_1}{\beta} \right) \gamma^2 - \frac{\alpha}{\beta} (\tau\nu_1 + \gamma\nu_2).$$

Несложно проверить, что если $\nu_2 > \nu_1$ и

$$\frac{1}{2\gamma} \left(\nu_2 - \sqrt{\nu_2^2 - \nu_1^2} \right) < C \stackrel{(9)}{=} \alpha\beta - \alpha_1 < \frac{1}{2\gamma} \left(\nu_2 + \sqrt{\nu_2^2 - \nu_1^2} \right),$$

то $Q_1 - Q_2 < 0$ для любых ξ, τ . Далее,

$$a_2^2 - a_1^2 = \frac{\alpha}{\beta}(-2C\tau\gamma + \tau\nu_2 - \gamma\nu_1)(2(\alpha\beta + \alpha_1)\tau\gamma + \tau\nu_2 - \gamma\nu_1).$$

Следовательно, если $0 < C < \nu_2/(2\gamma)$, то

$$a_2^2 - a_1^2 > 0 \quad \text{при} \quad \tau \in \left(-\infty; \frac{\gamma\nu_1}{\nu_2 + 2(\alpha\beta + \alpha_1)\gamma}\right) \cup \left(\frac{\gamma\nu_1}{\nu_2 - 2C\gamma}; +\infty\right).$$

Значит, если $\nu_2 > \nu_1$ и

$$\frac{1}{2\gamma}(\nu_2 - \sqrt{\nu_2^2 - \nu_1^2}) < C = \alpha\beta - \alpha_1 < \frac{\nu_2}{2\gamma},$$

то условие щели выполнено везде кроме

$$\tau \in \left[\frac{\gamma\nu_1}{\nu_2 + 2(\alpha\beta + \alpha_1)\gamma}; \frac{\gamma\nu_1}{\nu_2 - 2C\gamma}\right].$$

Заметим теперь, что

$$Z_1 = 2(\operatorname{Re} \mu_1)^2 = Q_1 + \sqrt{Q_1^2 + a_1^2} \quad \text{и} \quad Z_2 = 2(\operatorname{Re} \mu_2)^2 = Q_2 + \sqrt{Q_2^2 + a_2^2}$$

суть правые корни уравнений $Z_j^2 - 2Q_j Z_j - a_j^2 = 0$, $j = 1, 2$. Покажем, что $Z_1 < Z_2$, если

$$\nu_2 > \nu_1, \quad \frac{1}{2\gamma}(\nu_2 - \sqrt{\nu_2^2 - \nu_1^2}) < C = \alpha\beta - \alpha_1 < \frac{\nu_2}{2\gamma}$$

и

$$\tau \in \left[\frac{\gamma\nu_1}{\nu_2 + 2(\alpha\beta + \alpha_1)\gamma}; \frac{\gamma\nu_1}{\nu_2 - 2C\gamma}\right].$$

Для этого необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$Z_1^2 - 2Q_2 Z_1 - a_2^2 = -2(Q_2 - Q_1)Z_1 - (a_2^2 - a_1^2) < 0.$$

При наложенных выше условиях на τ, C и ν_2, ν_1 имеем $Q_2 - Q_1 > 0$, $a_2^2 - a_1^2 < 0$. Следовательно, достаточно доказать, что

$$Z_1 > Z_* = -\frac{a_2^2 - a_1^2}{2(Q_2 - Q_1)}.$$

Последнее неравенство эквивалентно условию

$$(a_2^2 - a_1^2)^2 + 2(a_2^2 - a_1^2)Q_1(Q_2 - Q_1) - 4a_1^2(Q_2 - Q_1)^2 < 0. \quad (11)$$

Введем обозначение $\lambda = 2C\gamma/\nu_2$. Тогда наложенные выше условия переписутся в виде

$$1 - \sqrt{1 - \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2}} < \lambda < 1, \quad \tau \in \frac{\lambda\nu_1}{2C} \left[\frac{1}{1 + \lambda(\alpha\beta + \alpha_1)/C}; \frac{1}{1 - \lambda} \right].$$

Положим

$$\tau = \frac{\lambda\nu_1}{2C} \kappa, \quad \kappa \in \left[\frac{1}{1 + \lambda(\alpha\beta + \alpha_1)/C}; \frac{1}{1 - \lambda} \right].$$

В новых обозначениях имеем

$$a_1 = \alpha^2 \frac{\nu_1 \nu_2}{2C^2} \lambda^2 \kappa, \quad a_2 = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\lambda \nu_1 \nu_2}{2(C^2)} [\kappa \lambda \alpha_1 + (\kappa - 1)C],$$

$$Q_1 = |\xi|^2 + \alpha^2 \frac{\lambda^2}{4C^2} (\nu_2^2 - \kappa^2 \nu_1^2), \quad Q_2 = |\xi|^2 + \frac{\alpha \alpha_1}{\beta} \frac{\lambda^2}{4C^2} (\nu_2^2 - \kappa^2 \nu_1^2) + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\lambda}{2C} (\nu_1^2 \kappa + \nu_2^2).$$

Доказываемое неравенство (11) примет вид

$$4|\xi|^2 (a_2^2 - a_1^2)(Q_2 - Q_1) + (a_2^2 - a_1^2)^2 + 4\alpha^2 \frac{\lambda^2}{4C^2} (\nu_2^2 - \kappa \nu_1^2)(a_2^2 - a_1^2)(Q_2 - Q_1) - 4 \left(\alpha^2 \frac{\kappa \lambda^2 \nu_1 \nu_2}{2C^2} \right)^2 (Q_2 - Q_1)^2 < 0.$$

Поскольку первое слагаемое отрицательно, достаточно доказать, что

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^4}{\beta^2} \frac{\lambda^4 \nu_1^2 \nu_2^2}{4C^6} \left\{ \frac{1}{\beta^2} \frac{\nu_1^2 \nu_2^2}{4} (\kappa(1 - \lambda) - 1)^2 (\kappa \lambda (\alpha \beta + \alpha_1) + (\kappa - 1)C)^2 \right. \\ & \quad + \frac{\alpha \lambda}{2\beta} (\nu_2^2 - \kappa^2 \nu_1^2) (\kappa(1 - \lambda) - 1) (\kappa \lambda (\alpha \beta + \alpha_1) + (\kappa - 1)C) \\ & \quad \times \left[\kappa \left(1 + \frac{1}{2} \lambda \kappa \right) \nu_1^2 + \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \right) \nu_2^2 \right] \\ & \quad \left. - \alpha^2 \lambda^2 \kappa^2 \left[\kappa \left(1 + \frac{1}{2} \lambda \kappa \right) \nu_1^2 + \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \right) \nu_2^2 \right]^2 \right\} < 0. \end{aligned}$$

Необходимое неравенство можно переписать в виде $J_1 + J_2 < 0$, где

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} (1 - \kappa(1 - \lambda))^2 (\kappa \lambda (\alpha \beta + \alpha_1) + (\kappa - 1)C)^2 \\ & \quad - 2\alpha \beta \lambda (1 - \kappa(1 - \lambda)) (\kappa \lambda (\alpha \beta + \alpha_1) + (\kappa - 1)C) \\ & \quad \times \left[\kappa \left(1 + \frac{1}{2} \lambda \kappa \right) \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} + \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \right) \right], \\ J_2 &= 2 \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} \kappa^2 \alpha \beta \lambda (1 - \kappa(1 - \lambda)) (\kappa \lambda (\alpha \beta + \alpha_1) + (\kappa - 1)C) \\ & \quad \times \left[\kappa \left(1 + \frac{1}{2} \lambda \kappa \right) \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} + \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \right) \right] \\ & \quad - 4\alpha^2 \beta^2 \lambda^2 \kappa^2 \left[\kappa \left(1 + \frac{1}{2} \lambda \kappa \right) \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} + \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \right) \right]^2 < 0. \end{aligned}$$

Покажем, что при наложенных выше условиях $J_1 \leq 0$ и $J_2 < 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} J_1 &= (1 - \kappa(1 - \lambda)) (\kappa \lambda (\alpha \beta + \alpha_1) + (\kappa - 1)C) \\ & \quad \times \left[\frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} (1 - \kappa(1 - \lambda)) (\kappa \lambda (\alpha \beta + \alpha_1) + (\kappa - 1)C) \right. \\ & \quad \left. - 2\alpha \beta \lambda \left[\kappa \left(1 + \frac{1}{2} \lambda \kappa \right) \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} + \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \right) \right] \right] \\ &= (1 - \kappa(1 - \lambda)) (\kappa \lambda (\alpha \beta + \alpha_1) + (\kappa - 1)C) \end{aligned}$$

$$\times \left[\frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} (-(\kappa - 1)^2 C - 2\lambda\kappa C - \lambda\kappa^2 \alpha_1 (2 - \lambda)) - 2\alpha\beta\lambda \left(1 - \frac{1}{2}\lambda \right) \right]. \quad (12)$$

В силу того, что

$$1 - \sqrt{1 - \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2}} < \lambda < 1, \quad \kappa \in \left[\frac{1}{1 + \lambda(\alpha\beta + \alpha_1)/C}, \frac{1}{1 - \lambda} \right],$$

$$(1 - \lambda)\kappa \in \left[\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda(\alpha\beta + \alpha_1)/C}, 1 \right], \quad C = \alpha\beta - \alpha_1 > 0,$$

получаем

$$1 - \kappa(1 - \lambda) \geq 0,$$

$$\kappa\lambda(\alpha\beta + \alpha_1) + (\kappa - 1)C$$

$$\geq \frac{1}{1 + \lambda(\alpha\beta + \alpha_1)/C} \lambda(\alpha\beta + \alpha_1) + \left(\frac{1}{1 + \lambda(\alpha\beta + \alpha_1)/C} - 1 \right) C \geq 0.$$

Множитель в квадратных скобках в (12), очевидно, отрицателен. Следовательно, $J_1 \leq 0$. Далее,

$$J_2 = 2 \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} \kappa^2 \alpha\beta\lambda(1 - \kappa(1 - \lambda))(\kappa\lambda(\alpha\beta + \alpha_1) + (\kappa - 1)C) \left[\kappa \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\kappa \right) \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} + \left(1 - \frac{1}{2}\lambda \right) \right]$$

$$- 4\alpha^2\beta^2\lambda^2\kappa^2 \left[\kappa \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\kappa \right) \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} + \left(1 - \frac{1}{2}\lambda \right) \right]^2$$

$$= 2\alpha\beta\lambda\kappa^2 \left[\kappa \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\kappa \right) \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} + \left(1 - \frac{1}{2}\lambda \right) \right]$$

$$\times \left[\frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} (-(\kappa - 1)^2 C - 2\lambda\kappa C - \lambda\kappa^2 \alpha_1 (2 - \lambda)) - 2\alpha\beta\lambda \left(1 - \frac{1}{2}\lambda \right) \right] < 0.$$

Таким образом, утверждение леммы полностью доказано.

В работе [4] получены достаточные условия L^2 -корректности для широкого класса смешанных задач. Следовательно, если мы приведем задачу (1)–(3) к виду, изучаемому в работе [4], и конкретизируем полученные в [4] условия, то гарантируем тем самым L^2 -корректность рассматриваемой задачи.

Введем матрицу $A'_3 = -iE_\alpha^{-1}A_3$ и матрицу

$$J_{A'_3} = \begin{pmatrix} i & 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & -\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1\beta}} & 0 & \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1\beta}} \end{pmatrix},$$

столбцами которой являются собственные векторы матрицы A'_3 . Собственные векторы матрицы $\mathcal{M}$ имеют вид

$$R_{1,2} = \begin{pmatrix} \xi_1^2 - \alpha^2(\tau - i\gamma)^2 \\ \pm \alpha(\tau - i\gamma) \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 - \alpha^2(\tau - i\gamma)^2} + \xi_1\xi_2 \\ \mp i\xi_1 \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 - \alpha^2(\tau - i\gamma)^2} - i\xi_2\alpha(\tau - i\gamma) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$R_{3,4} = \begin{pmatrix} i\beta\xi_1 \\ i\beta\xi_2 \\ \pm\beta\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 - \frac{\alpha\alpha_1}{\beta}(\tau - i\gamma)^2 + \frac{\alpha}{\beta}(\tau - i\gamma)\gamma_1} \\ \alpha(\tau - i\gamma) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathcal{R}$ матрицу размера 4×2 , столбцами которой являются собственные векторы R_2 и R_4 . Введем в рассмотрение матрицу $L(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma) = \mathcal{B} \cdot \mathcal{R}$.

ТЕОРЕМА. *Рассматриваемая смешанная задача (1)–(3) L^2 -корректна (по Крайсу), если при $\gamma \geq 0$ выполнены следующие условия:*

$$\begin{aligned} 1) \quad \mathcal{B}J_{A'_3} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_{11} & -s_{12} \\ 0 & 1 & -s_{21} & -s_{22} \end{pmatrix}, \\ 2) \quad \text{Det } L(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma) &\neq 0 \quad \text{для всех } \xi_1, \xi_2, \tau. \end{aligned} \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы привести систему (1) к виду, рассматриваемому в [4], сделаем замену переменных $U(x, t) = J_{A'_3}W(x, t)$. В этом случае систему (1) можно переписать в виде

$$\partial_t W = \sum_{j=1}^3 \tilde{A}_j \partial_{x_j} W + \tilde{Q}W, \quad \text{где } \tilde{A}_3 = J_{A'_3}^{-1} A'_3 J_{A'_3} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Здесь λ_i , $i = 1, \dots, 4$, – собственные значения матрицы A'_3 : $\lambda_{1,2} = \pm 1/\alpha$, $\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\beta/(\alpha\alpha_1)}$. Таким образом, система примет вид, исследуемый в [4]. Первое условие теоремы (13) позволяет привести граничные условия (3) к изучаемому в работе [4] виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_{11} & -s_{12} \\ 0 & 1 & -s_{21} & -s_{22} \end{pmatrix} W = g \quad \text{при } x_3 = 0. \quad (15)$$

После замены переменных $U(x, t) = J_{A'_3}W(x, t)$, замены переменных (7) и преобразования Фурье по x_1 , x_2 и t задача (16) примет вид

$$\frac{d\widehat{W}}{dx_3} = J_{A'_3}^{-1} \mathcal{M} J_{A'_3} \widehat{W} \quad \text{при } x_3 > 0, \quad \mathcal{B}J_{A'_3} \widehat{W} = \widehat{g} \quad \text{при } x_3 = 0. \quad (16)$$

Согласно [4] смешанная задача (14), (15) L^2 -корректна, если задача (16) не имеет собственных функций при $\gamma > 0$ и обобщенных собственных функций при $\gamma = 0$.

Функция $\varphi \in L_2$ ($0 < x_3 < \infty$) называется *собственной функцией* задачи (16), отвечающей собственному значению $s = i\tau + \gamma$, если

$$\mathcal{L}\varphi = J_{A'_3}^{-1}(-iE_\alpha^{-1}(A_3\partial_{x_3} + i\xi_1 A_1 + i\xi_2 A_2 + Q))J_{A'_3}\varphi = s\varphi,$$

или, что то же самое,

$$\frac{d\varphi}{dx_3} = J_{A'_3}^{-1}A_3^{-1}(isE_\alpha - i\xi_1 A_1 - i\xi_2 A_2 - Q)J_{A'_3}\varphi$$

и при $x_3 = 0$

$$\mathcal{B}J_{A'_3}\varphi = 0.$$

При $\gamma > 0$ (в силу лемм 1 и 2) общее решение задачи $J_{A'_3}^{-1}\mathcal{M}J_{A'_3}\varphi = d\varphi/dx_3$, принадлежащее L_2 ($0 < x_3 < \infty$), может быть представлено как линейная комбинация двух линейно независимых решений:

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, x_3, s) = \sigma_1 \tilde{R}(\mu_4(\xi_1, \xi_2, s))e^{\mu_4 x_3} + \sigma_2 \tilde{R}(\mu_2(\xi_1, \xi_2, s))e^{\mu_2 x_3}.$$

Здесь $\tilde{R}(\mu(\xi_1, \xi_2, s)) = J_{A'_3}^{-1}R(\mu(\xi_1, \xi_2, s))$, $R(\mu(\xi_1, \xi_2, s))$ – собственные векторы матрицы $\mathcal{M}$. Подставляя это решение в граничные условия $\mathcal{B}J_{A'_3}\varphi = 0$, мы получим систему линейных уравнений $L(\xi_1, \xi_2, s)(\sigma_1, \sigma_2)^T = 0$, где $L(\xi_1, \xi_2, s) = \mathcal{B} \cdot \mathcal{R}$. В работе [4] показано, что задача (8) не имеет собственных функций при $\gamma > 0$ и обобщенных собственных функций при $\gamma = 0$, если и только если $\text{Det } L(\xi_1, \xi_2, s) \neq 0$.

2. Условия для выполнения условия (5)

Доказанная теорема позволила выделить класс граничных условий, гарантирующих L^2 -корректность рассматриваемой смешанной задачи. Теперь перейдем к выделению подкласса граничных условий, обеспечивающих выполнение условия (5).

2.1. Построение проектора. Согласно [7] решение задачи (1)–(3) при $x_3 \rightarrow \infty$ должно в смысле условия (5) притягиваться к решению специального вида

$$\mathcal{U}_{\Pi}^{\tilde{g}} = (u_1, u_2, \Pi(u_1, u_2)^T) = (\mathcal{U}_1^{\tilde{g}}, \Pi\mathcal{U}_1^{\tilde{g}}),$$

соответствующего некоторой граничной функции $\tilde{g}$. Здесь $\Pi(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_t)$ – псевдодифференциальный матричный оператор нулевого порядка. Решение такого вида называют *проекцией Чепмена–Энскога в пространство консервативных переменных* $(u_1, u_2)^T$ (см. [5]–[7]). Матрицу

$$\mathcal{M} = A_3^{-1}(isE_\alpha - i\xi_1 A_1 - i\xi_2 A_2 - Q)$$

разобьем на блоки размера 2×2 :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $P(\xi_1, \xi_2, \tau)$ образ Фурье по x_1 , x_2 и t от оператора Π . Согласно [9] справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Существование проекции Чепмена–Энскога в пространство консервативных переменных $(u_1, u_2)^T$ эквивалентно разрешимости матричного уравнения*

$$PM_{12}P - M_{22}P + PM_{11} - M_{21} = 0, \quad (17)$$

где

$$P(\xi_1, \xi_2, \tau) = \begin{pmatrix} p_{11}(\xi_1, \xi_2, \tau) & p_{12}(\xi_1, \xi_2, \tau) \\ p_{21}(\xi_1, \xi_2, \tau) & p_{22}(\xi_1, \xi_2, \tau) \end{pmatrix}.$$

Матричное уравнение (17) имеет несколько различных решений, соответствующих проекциям в различные собственные подпространства $\mathcal{V} = \text{Lin}\{R_i, R_j\}$ матрицы $\mathcal{M}$. Тем не менее, справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Существует только одна проекция в пространство консервативных переменных $(u_1, u_2)^T$, определяемая оператором*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\xi_2}{\alpha(\tau - i\gamma)} & -\frac{i\xi_1}{\alpha(\tau - i\gamma)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, проекция в пространство консервативных переменных $(u_1, u_2)^T$ есть проекция в собственное подпространство $\mathcal{V} = \text{Lin}\{R_i, R_j\}$ матрицы $\mathcal{M}$ такое, что векторы R_i, R_j, e_3, e_4 образуют базис в пространстве $\mathbb{C}^4$ для всех ξ_1, ξ_2, τ и для всех $\gamma > 0$.

Несложно видеть, что при $|\xi| \rightarrow 0$ пара собственных векторов (R_1, R_2) переходит в пару собственных векторов, линейная комбинация которых совпадает с $\langle e_1, e_2 \rangle$. Таким образом, среди решений матричного уравнения (17) следует выбрать решение, отвечающее проекции в собственное подпространство $\mathcal{V} = \text{Lin}\{R(\mu_1), R(\mu_2)\}$.

Заметим теперь, что с помощью замены переменных

$$\bar{V} = S^{-1}\hat{V}, \quad \text{где} \quad S = \begin{pmatrix} E & 0 \\ P & E \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = 2E - S = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -P & E \end{pmatrix}, \quad (18)$$

система (8) может быть приведена к виду $\partial_{x_3}\bar{V} = S^{-1}\mathcal{M}S\bar{V}$, где

$$S^{-1}\mathcal{M}S = \begin{pmatrix} M_{11} + M_{12}P & M_{12} \\ -PM_{11} + M_{21} - PM_{12}P + M_{22}P & -PM_{12} + M_{22} \end{pmatrix}.$$

Поскольку левый нижний блок нулевой в силу (17), следовательно, мы приводим исходную систему к блочно-верхнетреугольному виду $\partial_{x_3}\bar{V} = M_b\bar{V}$. В нашем случае

$$M_b = S^{-1}\mathcal{M}S = \begin{pmatrix} M_{11}^b & M_{12}^b \\ 0 & M_{22}^b \end{pmatrix},$$

$$M_{11}^b = \begin{pmatrix} i\xi_1 p_{11} + i\beta\xi_2 p_{21} & -\alpha(\tau - i\gamma) + i\xi_1 p_{12} + i\beta\xi_2 p_{22} \\ \alpha(\tau - i\gamma) + i\xi_2 p_{11} - i\beta\xi_1 p_{21} & i\xi_2 p_{12} - i\beta\xi_1 p_{22} \end{pmatrix},$$

$$M_{12}^b = \begin{pmatrix} i\xi_1 & i\beta\xi_2 \\ i\xi_2 & -i\beta\xi_1 \end{pmatrix},$$

$$M_{22}^b = \begin{pmatrix} -i\xi_1 p_{11} - i\xi_2 p_{12} & -i\beta\xi_2 p_{11} + i\beta\xi_1 p_{12} - \alpha_1(\tau - i\gamma) + \gamma_1 \\ -i\xi_1 p_{21} - i\xi_2 p_{22} + \frac{\alpha}{\beta}(\tau - i\gamma) & -i\beta\xi_2 p_{21} + i\beta\xi_1 p_{22} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mu_{1,2}^b$ собственные значения матрицы M_b , соответствующие верхнему левому блоку, и через $\mu_{3,4}^b$ – правому нижнему. Поскольку проекция в пространство консервативных переменных есть проекция в пространство собственных векторов $(R(\mu_1), R(\mu_2))$, следовательно, среди матриц P – решений уравнения

$$PM_{12}P - M_{22}P + PM_{11} - M_{21} = 0$$

следует выбрать такое, что $\mu_{1,2}^b = \mu_{1,2}$. То есть должно иметь место следующее равенство:

$$\begin{aligned} \mu_{1,2}^2 - (i\xi_1 p_{11} + i\beta\xi_2 p_{21} + i\xi_2 p_{12} - i\beta\xi_1 p_{22})\mu_{1,2} \\ + (\alpha(\tau - i\gamma) + i\xi_2 p_{11} - i\beta\xi_1 p_{21})(\alpha(\tau - i\gamma) - i\xi_1 p_{12} - i\beta\xi_2 p_{22}) \\ + (i\xi_1 p_{11} - i\beta\xi_2 p_{21})(i\xi_2 p_{12} - i\beta\xi_1 p_{22}) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\mu_1 = -\mu_2$, имеем $i\xi_1 p_{11} + i\beta\xi_2 p_{21} + i\xi_2 p_{12} - i\beta\xi_1 p_{22} = 0$. Таким образом, для p_{ij} получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -i\beta\xi_2 p_{11} p_{22} + i\beta\xi_1 p_{12} p_{21} - \alpha(\tau - i\gamma)p_{12} - \alpha_1(\tau - i\gamma)p_{21} + \gamma_1 p_{21} = i\xi_1, \\ i\beta\xi_2 p_{12} p_{21} - i\beta\xi_2 p_{11} p_{22} + \alpha(\tau - i\gamma)p_{11} - \alpha_1(\tau - i\gamma)p_{22} + \gamma_1 p_{22} = i\xi_2, \\ i\beta\xi_2 p_{12} p_{21} - i\beta\xi_2 p_{11} p_{22} - \alpha\beta(\tau - i\gamma)p_{22} + \alpha(\tau - i\gamma)p_{11} = i\xi_2, \\ i\beta\xi_1 p_{11} p_{22} - i\beta\xi_1 p_{12} p_{21} + \alpha(\tau - i\gamma)p_{12} + \alpha\beta(\tau - i\gamma)p_{21} = -i\xi_1. \end{cases}$$

Вычитая из второго третье уравнение системы, получаем

$$((\alpha\beta - \alpha_1)(\tau - i\gamma) + \gamma_1)p_{22} = 0.$$

Поскольку это должно выполняться для всех τ , получаем $p_{22} = 0$. Сложив оставшиеся уравнения

$$\begin{aligned} i\beta\xi_1 p_{12} p_{21} - \alpha(\tau - i\gamma)p_{12} - \alpha_1(\tau - i\gamma)p_{21} + \gamma_1 p_{21} &= i\xi_1, \\ -i\beta\xi_1 p_{12} p_{21} + \alpha(\tau - i\gamma)p_{12} + \alpha\beta(\tau - i\gamma)p_{21} &= -i\xi_1, \end{aligned}$$

получим

$$((\alpha\beta - \alpha_1)(\tau - i\gamma) + \gamma_1)p_{21} = 0.$$

Следовательно, $p_{21} = 0$. Окончательно получаем

$$p_{11} = \frac{i\xi_2}{\alpha(\tau - i\gamma)}, \quad p_{12} = -\frac{i\xi_1}{\alpha(\tau - i\gamma)}, \quad p_{21} = p_{22} = 0.$$

2.2. Граничные условия. Дело в том, что не для любых граничных условий (3) можно построить граничные условия

$$\mathcal{B}\mathcal{U}|_{x_3=0} = \tilde{g}(x_1, x_2, t) \quad (19)$$

такие, что проекция Чепмена–Энскога в пространство консервативных переменных $(u_1, u_2)^T$, т.е. решение задачи (1), (2), (19) вида

$$\mathcal{U}_{\Pi}^{\tilde{g}} = (u_1, u_2, \Pi(u_1, u_2^T)),$$

является притягивающим при $x_3 \rightarrow \infty$ для U^g – решения задачи (1)–(3). Ниже мы сформулируем достаточные требования на матрицу граничных условий $\mathcal{B}$ и функцию $g(x_1, x_2, t)$, гарантирующие выполнение условия (5). С помощью замены переменных (18), где матрица P из утверждения 2, мы привели исходную систему

к блочно-верхнетреугольному виду: $\partial_{x_3}\widehat{V} = M_b\widehat{V}$. Собственные значения матрицы M_b имеют вид $\mu_i^b = \mu_i$, $i = 1, \dots, 4$. Соответствующие им собственные векторы можно записать в виде

$$\overline{R}_{1,2} = \begin{pmatrix} \xi_1^2 - \alpha^2(\tau - i\gamma)^2 \\ \xi_1\xi_2 + \alpha(\tau - i\gamma)\mu_{1,2}^b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{R}_{3,4} = \begin{pmatrix} i\beta\xi_1 \\ i\beta\xi_2 \\ \beta\mu_{3,4}^b \\ \alpha(\tau - i\gamma) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение, принадлежащее L_2 ($0 < x_3 < \infty$), может быть представлено в виде

$$\overline{V} = C_2\overline{R}_2e^{\mu_2x} + C_4\overline{R}_4e^{\mu_4x}.$$

После замены переменных $V = e^{-\gamma t}U(x, t)$ и преобразования Фурье по x_1 , x_2 и t граничные условия примут вид $\mathcal{B} \cdot \widehat{V} = \widehat{g}$. После замены переменных $\overline{V} = S^{-1}\widehat{V}$, получаем $\overline{\mathcal{B}}\overline{V} = \widehat{g}$, где

$$\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cdot S = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{13}p_{11} & b_{12} + b_{13}p_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} + b_{23}p_{11} & b_{22} + b_{23}p_{12} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть так же, как в лемме 3, выполнено

$$\gamma > 0, \quad \nu_2 > \nu_1, \quad \frac{1}{2C}(\nu_2 - \sqrt{\nu_2^2 - \nu_1^2}) < \gamma < \frac{\nu_2}{2C}, \quad C \stackrel{(9)}{=} \alpha\beta - \alpha_1.$$

Дополнительно, если выполнены следующие условия:

1) имеют место равенства

$$b_{21} + b_{23}p_{11} = 0, \quad b_{22} + b_{23}p_{12} = 0;$$

2) имеют место соотношения

$$\begin{aligned} k_1(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma) &= (b_{11} + b_{13}p_{11})(\xi_1^2 - \alpha^2(\tau - i\gamma)^2) + (b_{12} + b_{13}p_{12})(\alpha(\tau - i\gamma)\mu_2 + \xi_1\xi_2) \neq 0, \\ k_2(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma) &= b_{23}\beta\mu_4 + b_{24}\alpha(\tau - i\gamma) \neq 0, \\ \widehat{g}_1 &\neq \frac{\widehat{g}_2}{k_2(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma)} \\ &\quad \times ((b_{11} + b_{13}p_{11})i\beta\xi_1 + (b_{12} + b_{13}p_{12})i\beta\xi_2 + b_{13}\beta\mu_4 + b_{14}\alpha(\tau - i\gamma)), \end{aligned}$$

то достаточно далеко от границы (т.е. при больших x_3) поведение решения исходной смешанной задачи определяется в смысле условия (5) только переменными u_1 , u_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Существенное отличие этого утверждения от теоремы Крайса состоит в том, что

$$\frac{\nu_2 - \sqrt{\nu_2^2 - \nu_1^2}}{2C} < \gamma < \frac{\nu_2}{2C}.$$

В противном случае условие щели не выполнено и нет проектора для гладких решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3. Действительно, в силу первого условия матрица $\overline{\mathcal{B}}$ имеет вид

$$\overline{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{13}p_{11} & b_{12} + b_{13}p_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}.$$

В этом случае для общего решения $\overline{V} = C_2 \overline{R}_2 e^{\mu_2 x} + C_4 \overline{R}_4 e^{\mu_4 x}$ из второго граничного условия и условий теоремы получаем $C_4 = \widehat{g}_2 / k_2(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma)$. Далее, в силу первого граничного условия имеем

$$\begin{aligned} C_2 k_1(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma) + C_4 ((b_{11} + b_{13}p_{11})i\beta\xi_1 + (b_{12} + b_{13}p_{12})i\beta\xi_2 + (b_{13}\beta\mu_4 + b_{14})\alpha(\tau - i\gamma)) \\ = C_2 k_1(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma) + C_4 K(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma) = \widehat{g}_1. \end{aligned}$$

Таким образом, если выполнены условия теоремы, из последнего равенства мы находим константу

$$C_2 = \frac{\widehat{g}_1 k_2(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma) - \widehat{g}_2 K(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma)}{k_1(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma) k_2(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma)}.$$

И для решения полученной после замены переменных смешанной задачи имеем

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \frac{\widehat{g}_1}{k_1(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma)} \overline{R}_2 e^{\mu_2 x_3} - \frac{\widehat{g}_2 K(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma)}{k_1(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma) k_2(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma)} \overline{R}_2 e^{\mu_2 x_3} \\ &\quad + \frac{\widehat{g}_2}{k_2(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma)} \overline{R}_4 e^{\mu_4 x_3} \\ &= \overline{V}_P + \overline{V}_{\text{Cor}} + \overline{V}_H. \end{aligned}$$

решение $\mathcal{U}_{\Pi}^{\tilde{g}}$ – проекцию Чепмена–Энскога в пространство консервативных переменных $(u_1, u_2)^T$ можно получить, сделав обратные замены переменных:

$$\mathcal{U}_{\Pi}^{\tilde{g}} = e^{\gamma t} \mathcal{F}^{-1}(S \cdot \overline{V}_{\Pi}).$$

Здесь $\overline{V}_{\Pi} = \overline{V}_P + \overline{V}_{\text{Cor}}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ – обратное преобразование Фурье.

Граничная функция $\tilde{g}$, определяющая решение $\mathcal{U}_{\Pi}^{\tilde{g}}$, имеет вид

$$\tilde{g} = e^{\gamma t} \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{g}_1 - \widehat{g}_2 \frac{K(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma)}{k_2(\xi_1, \xi_2, \tau, \gamma)}, 0 \right)^T.$$

Согласно [5]–[7] условие (5) эквивалентно условию $\|\overline{V}_H\| / \|\overline{V}_{\Pi}\| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, где под знаком $\|\cdot\|$ понимается норма в пространстве $L_{2,\gamma}$ ($0 < \gamma < \infty$). В нашем случае это следует из леммы 3 (условия щели): $\text{Re } \mu_4 < \text{Re } \mu_2 < 0$ (см. [7]). Таким образом, утверждение полностью доказано.

2.3. Примеры. Приведем пример такой матрицы граничных условий

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix},$$

которая удовлетворяла бы и требованиям теоремы из п. 1, и требованиям утверждения 3. Прямой проверкой можно убедиться, что если матрица $\mathcal{B}$ имеет, например, вид

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\alpha_1\beta}{\alpha}} \end{pmatrix},$$

то она удовлетворяет всем наложенным ограничениям.

Если при этом $\hat{g}_1 = \hat{g}_2(i\beta\xi_2)/(\sqrt{(\alpha_1\beta)/\alpha}\alpha(\tau - i\gamma))$, то $C_1 = 0$. В этом случае решение имеет вид

$$\bar{V} = -\hat{g}_2 \frac{1}{\sqrt{(\alpha_1\beta)/\alpha}\alpha(\tau - i\gamma)} \bar{R}_4 e^{\mu_4 x_3}$$

и вклад переменных $(u_3, \rho)^T$ существенен при $x_3 \rightarrow \infty$.

Если же $\hat{g}_1 \neq \hat{g}_2(i\beta\xi_2)/(\sqrt{(\alpha_1\beta)/\alpha}\alpha(\tau - i\gamma))$, то при больших x_3 поведение решения исходной смешанной задачи определяется в смысле условия (5) только переменными u_1, u_2 .

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю проф. Е. В. Радкевичу за постановку задачи и проверку работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. Müller, T. Ruggeri, *Extended Thermodynamics*, Springer Tracts Nat. Philos., **37**, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [2] H. Struchtrup, W. Weiss, “Temperature jump and velocity slip in the moment method”, *Contin. Mech. Thermodyn.*, **12**:1 (2000), 1–18.
- [3] R. Peierls, “Zur kinetischen Theorie der Wärmeleitung in Kristallen”, *Ann. Phys.*, **395**:8 (1929), 1055–1101.
- [4] H.-O. Kreiss, “Initial boundary value problems for hyperbolic systems”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **23** (1970), 277–298; *Математика*, **14**:4 (1970), 98–115.
- [5] E. V. Radkevich, “Irreducible Chapman–Enskog projections and Navier–Stokes approximations”, *Instability in Models Connected with Fluid Flows. II*, Int. Math. Ser. (N. Y.), **7**, Springer-Verlag, New York, 2008, 85–153.
- [6] Е. В. Радкевич, “Кинетические уравнения и проблемы проекции Чепмена–Энскога”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **250**, Наука, М., 2005, 219–225.
- [7] Е. В. Радкевич, *Математические вопросы неравновесных процессов*, Белая серия, **4**, Изд-во “Тамара Рожковская”, Новосибирск, 2007.
- [8] S. Chapman, T. Cowling, *Mathematical Theory on Non-Uniform Gases. An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1970.
- [9] В. В. Палин, “О разрешимости квадратных матричных уравнений”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2008, № 6, 36–41.

И. В. Загребяев

Business Intelligence Group, Москва

E-mail: ivan_shabash@mail.ru

Поступило

01.09.2009