Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Войнов, О компактах с некоторым аффинным инвариантом, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 1, 34–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8618>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:39:54

О компактах с некоторым аффинным инвариантом

А. С. Войнов

В работе полностью охарактеризованы конечномерные компакты, обладающие следующим свойством: все их образы под действием аффинных операторов симметричны, т.е. имеют плоскости симметрии определенных размерностей. Исследован также некомпактный случай: выявлен класс неограниченных замкнутых множеств с указанным свойством и выдвинута гипотеза о полноте данного класса.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Задачи о характеристизации выпуклых компактов в d -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ с различными симметричными свойствами широко изучались в литературе. Так, например в [1], [2; с. 25 задача 47] характеризуются выпуклые компакты с подобными сечениями, в [3] изучаются выпуклые тела с тем свойством, что любые две проекции на произвольные гиперплоскости равны между собой, и другими свойствами; в [4] доказывается, что если любое сечение выпуклого компакта имеет центр симметрии, то он является эллипсоидом. В данной работе полностью охарактеризованы не обязательно выпуклые компакты со следующим свойством: при любом аффинном отображении образ компакта имеет некоторую плоскость симметрии, размерности от 1 до $d - 1$. В теореме 1 доказывается, что среди класса выпуклых компактов лишь эллипсоиды обладают данным свойством. В теореме 2 охарактеризованы все компакты с данным свойством. В последнем разделе рассматриваются неограниченные множества. Находятся множества с описанным свойством, порожденные гиперповерхностями второго порядка. Выдвигается гипотеза о полной классификации рассматриваемых множеств.

2. Классификация аффинно-симметричных компактов. Назовем компакт в $\mathbb{R}^d$ *аффинно-симметричным*, если любой его аффинный образ имеет k -мерную плоскость симметрии, где $1 \leq k \leq d - 1$.

Заметим, что если в определении аффинной симметричности допустить, что k может равняться нулю, то любой центрально-симметричный компакт будет аффинно-симметричным. Кроме того, если размерность компакта (т.е. минимальная размерность гиперплоскости, содержащей его) меньше d , то он аффинно-симметричен, так как он будет симметричен относительно подпространства, в котором будет лежать. Везде далее предполагается, что размерность компакта равна d . *Выпуклыми телами* будем называть выпуклые компакты максимальной размерности, т.е. имеющие непустую внутренность. Сначала рассмотрим случай выпуклого компакта.

ТЕОРЕМА 1. *Аффинно-симметричными выпуклыми компактами являются эллипсоиды и только они.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что эллипсоид аффинно-симметричен. Докажем обратное. Предположим, дано аффинно-симметричное выпуклое тело U . При вырожденном линейном отображении U перейдет в множество меньшей размерности, которое заведомо будет иметь гиперплоскость симметрии, поэтому мы будем рассматривать только невырожденные отображения. Рассмотрим эллипсоид Джона этого тела. Напомним, что эллипсоид Джона – это максимальный по объему эллипсоид, содержащийся в теле. Известно, что для любого выпуклого тела он единственный [5].

ЛЕММА 1. *Любая плоскость симметрии выпуклого тела является плоскостью симметрии эллипсоида Джона.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим плоскость симметрии тела. Отразим относительно нее эллипсоид Джона. Его образ будет содержаться в теле. Значит, в силу единственности, эллипсоид перейдет сам в себя.

Аффинно переведем эллипсоид Джона тела U в шар. Обозначим через U' образ исходного тела; его эллипсоид Джона – некоторый шар B . Выберем произвольный ортонормированный базис с направляющими векторами $e_1, e_2, \dots, e_d$ и началом в центре шара B – точке O .

ЛЕММА 2. *Хотя бы одна гиперплоскость, образованная поднабором векторов $e_1, e_2, \dots, e_d$, является гиперплоскостью симметрии тела U' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим попарно неравные положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$. Для натурального k рассмотрим новый базис ε_k с тем же центром и направляющими векторами

$$\left(1 + \frac{\alpha_1}{k}\right)e_1, \dots, \left(1 + \frac{\alpha_d}{k}\right)e_d.$$

Рассмотрим аффинное преобразование A_k , переводящее исходный репер в ε_k . Тогда B перейдет в эллипсоид с попарно разными по длине главными осями. Любая плоскость симметрии такого эллипсоида будет линейной оболочкой поднабора векторов $e_1, \dots, e_d$. Таким образом, в силу леммы 1 у $A_k(U')$ плоскостью симметрии может быть лишь одна из таких плоскостей. При $k \rightarrow \infty$ можно выделить бесконечную возрастающую последовательность $k_1, k_2, \dots$ такую, что у всех тел $A_{k_i}(U')$ есть общая плоскость симметрии $\text{span}\{e_{j_1}, \dots, e_{j_t}\}$, $0 < t < d$. Если $k \rightarrow \infty$, то $A_k(U') \rightarrow U'$; следовательно, плоскость $\text{span}\{e_{j_1}, \dots, e_{j_t}\}$ является плоскостью симметрии U' .

ЛЕММА 3. *Дано выпуклое тело U' и точка O внутри него с тем свойством, что из любого ортонормированного базиса с центром в ней можно выбрать несколько векторов, линейная оболочка которых является плоскостью симметрии U' . Тогда U' – шар.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по d . Докажем базу для 2-мерной плоскости. Рассмотрим два базиса: $(1; 0)$, $(0; 1)$ и $(\cos 1; \sin 1)$, $(\sin 1; -\cos 1)$. Один из векторов каждой из пар является осью симметрии плоского выпуклого тела. Рассмотрим произвольную граничную точку. Без ограничения общности она лежит на единичной окружности. Предположим, задан набор преобразований пространства. Рассмотрим орбиту выбранной граничной точки под действием этих симметрий. В силу

иррациональности угла между осями симметрий ее орбита, порожденная отражениями относительно этих осей симметрий, – всюду плотное множество на единичной окружности. Значит, в силу компактности плоское тело является кругом. База доказана.

Индукционный переход от $d-1$ к d . Рассмотрим единичный вектор v , выходящий из O . Рассмотрим произвольные вектора $w_1, \dots, w_{d-1} \subset v^\perp$, дополняющие v до ортонормированного базиса. По предположению, некоторые вектора этого базиса образуют плоскость симметрии U' . В силу произвольности $w_1, \dots, w_{d-1}$, считаем, что выполнено одно из условий

- 1) $\text{span}\{w_1, \dots, w_{d-1}\}$ – плоскость симметрии U' ;
- 2) v – ось симметрии U' ;
- 3) из любого ортонормированного базиса подпространства $v^\perp$ можно выбрать несколько векторов, линейная оболочка которых является плоскостью симметрии $U' \cap v^\perp$.

В третьем случае по предположению индукции сечение тела гиперплоскостью $v^\perp$ является шаром. Пусть Ω_i – множество векторов v единичной сферы S , для которых выполнено условие i), где $i = 1, 2, 3$. Отметим, что все три множества очевидным образом замкнуты и могут пересекаться. Рассмотрим стандартную меру Лебега μ на единичной сфере S , считая, что $\mu(S) = 1$. Очевидно, $\mu(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3) = 1$.

Предположим, $\mu(\Omega_1 \cup \Omega_2) = 0$. Тогда $\mu(\Omega_3) = 1$; следовательно, в силу выпуклости любое $(d-1)$ -мерное сечение тела U' , проходящее через O , – шар, тем самым, U' – шар [1], [2; с. 25 задача 47].

Если $\mu(\Omega_1 \cup \Omega_2) > 0$, то мера одного из двух множеств положительна. Пусть x – произвольная граничная точка U' . Не уменьшая общности, $|Ox| = 1$. Рассмотрим произвольную точку $y \in S$. В силу компактности сферы, доказав, что преобразованиями 1 или 2 типа (отражениями относительно гиперплоскости или осевыми симметриями, сохраняющими U') точку x можно перевести в точку x' : $|yx'| < |yx|$, мы докажем, что этими преобразованиями точку x можно перевести сколь угодно близко к y . Тем самым, в силу выпуклости $y \in U'$; значит, тело – шар. Перед доказательством возможности сокращения расстояния сформулируем и докажем три утверждения.

ЛЕММА 4. *Орбита любой точки, порожденная симметриями относительно двух гиперплоскостей коразмерностей 1, угол между которыми иррационален, за исключением точек пересечения этих гиперплоскостей, есть всюду плотное множество на окружности, перпендикулярной пересечению этих гиперплоскостей.*

ЛЕММА 5. *Орбита любой точки, порожденная симметриями относительно двух прямых, имеющих общую точку, угол между которыми иррационален, за исключением точек, лежащих в ортогональном дополнении к линейной оболочке этих двух прямых, есть всюду плотное множество на паре окружностей, параллельных линейной оболочке этих прямых и симметричных относительно нее.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба эти утверждения являются тривиальными следствиями известного плоского случая. В первом случае достаточно профакторизовать пространство по пересечению двух гиперплоскостей. Во втором случае последовательное применение двух симметрий является поворотом точки на удвоенный угол между прямыми вокруг ортогонального дополнения к ним. Из теоремы Кроннекера [6] получаем утверждение.

Под словами “вектор принадлежит S ” будем подразумевать, что O – начало вектора и он имеет длину 1. Доказательство следующей леммы элементарно, и мы его опускаем.

ЛЕММА 6. *Мера векторов, принадлежащих S , образующих с некоторым фиксированным вектором $v \in S$ рациональный угол, равна нулю.*

Рассмотрим два вектора $a_1, a_2 \in \Omega_i, i \in \{1, 2\}$, образующих иррациональный угол друг с другом. Из лемм 4, 5 следует, что орбита x , порожденная симметриями относительно $a_1^\perp, a_2^\perp$, если $i = 1$, и симметриями относительно a_1, a_2 , если $i = 2$, содержит всюду плотное множество на окружности $S \cap (x + \text{span}\{a_1, a_2\})$. Таким образом, случаи $i = 1$ и $i = 2$ не имеют принципиальных различий. Докажем возможность приближения x к y для случая $\mu(\Omega_1) > 0$. Для случая $\mu(\Omega_2) > 0$ доказательство дословно совпадает.

Рассмотрим произвольный вектор $v \in \Omega_1, v \neq x, y$. Рассмотрим множество $\Omega'_1 \subseteq \Omega_1$ векторов, образующих с v иррациональный угол и таких, что x не лежит в их ортогональном дополнении. В силу леммы 6 $\mu(\Omega'_1) > 0$. Пусть w – некоторый вектор из Ω'_1 . Рассмотрим орбиту x , порожденную симметриями относительно $v^\perp, w^\perp$. Это всюду плотное множество ξ на окружности $S \cap (x + \text{span}\{v, w\})$. Из того, что не существует $x' \in \xi: |x'y| < |xy|$, следует, что касательная прямая l к замыканию ξ в точке x в плоскости $\text{span}\{v, w\}$ перпендикулярна xy . По вектору w , прямая $l = l(w)$ восстанавливается однозначно; с другой стороны, $w \in \text{span}\{v, l\}$. В терминах прямой l сформулируем необходимые условия на w такие, что $\sup_{x' \in \xi} |x'y| = |xy|$:

- 1) $l \in \{xy\}^\perp$;
- 2) l лежит в гиперплоскости, касающейся S в x .

Таким образом, l лежит в пересечении двух несовпадающих гиперплоскостей – некоторой гиперплоскости L размерности $d - 2$. Значит, если $\sup_{x' \in \xi} |x'y| = |xy|$, то $w \in S \cap \text{span}\{L, v\}$. Рассмотрим множество $\Omega''_1 = \Omega'_1 \setminus \text{span}\{L, v\}$. Отметим, что $\mu(\Omega''_1) = \mu(\Omega'_1) - \mu(S \cap \text{span}\{L, v\}) > 0$. Любой вектор из Ω''_1 в паре с v порождает орбиту, приближающую x к y . Тем самым, лемма 3 доказана.

Из лемм 1–3 следует теорема 1.

Перейдем к случаю произвольных компактов. Среди невыпуклых компактов уже не только эллипсоиды являются аффинно-симметричными. Другими примерами могут служить граница эллипсоида, граница эллипсоида и его центр, пара гомотетичных границ эллипсоидов. *Обобщенным эллипсоидом* назовем множество вида $\{\lambda AS, \lambda \in I\}$, где S – единичная сфера, $I \subset \mathbb{R}$ – компакт, A – невырожденный линейный оператор.

ТЕОРЕМА 2. *Аффинно-симметричными компактами являются обобщенные эллипсоиды и только они.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону теорема 2, как и теорема 1, очевидна. Докажем в другую сторону. Предположим, дан аффинно-симметричный компакт U . В силу теоремы 1 выпуклое замыкание $\text{conv}(U)$ является эллипсоидом. Любая гиперплоскость симметрии U так же является гиперплоскостью симметрии эллипсоида $\text{conv}(U)$. Аффинно переведем компакт U в U' такой, что $\text{conv}(U')$ – шар. Отметим, что $\partial(\text{conv}(U')) \subset U'$, так как все точки границы шара – крайние. Рассмотрим произвольную точку x множества U' . Из леммы 2 следует, что из любого ортогонального базиса с центром в центре шара $\text{conv}(U')$ – точке O , можно выбрать поднабор

векторов, линейная оболочка которых является плоскостью симметрии U' . Если $x \neq O$, то замыкание выпуклой оболочки орбиты точки x относительно множества всех симметрий U' является выпуклым телом. Из леммы 3 следует, что это тело – шар. Следовательно, U' содержит сферу радиуса $|Ox|$ с центром в O .

3. Некомпактный случай. Примеры и формулировка гипотез. Мы охарактеризовали все аффинно-симметричные компакты. Возникает вопрос, можно ли перенести идеи, использованные при доказательстве теорем 1 и 2, на более общий случай без условия компактности. В данном разделе мы опишем некоторый класс аффинно-симметричных множеств и выдвинем гипотезу, что этим классом исчерпываются все аффинно-симметричные множества. Рассмотрим гиперповерхность Γ второго порядка, заданную в каноническом базисе матричным уравнением

$$X^T Q X + (L, X) + C = 0, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix},$$

где $Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$, $L = (0, \dots, 0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_d)$. Дадим определение *обобщенной гиперповерхности второго порядка, порожденной Γ* . Предположим, $L = 0$. Тогда Γ имеет центр. В этом случае обобщенной гиперповерхностью назовем класс множеств вида

$$M_I = \bigcup_{\lambda \in I} \lambda \Gamma, \quad I \subseteq \mathbb{R}. \quad (1)$$

Предположим, $L \neq 0$; тогда существует базис, в котором уравнение гиперповерхности имеет вид

$$X^T \begin{pmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + \sum_{i=k+1}^d \lambda_i (e_i, X) + C = 0, \quad (2)$$

где Q_k – невырожденная диагональная матрица $k \times k$, $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ – базисный вектор. В этом случае обобщенной гиперповерхностью назовем класс множеств вида

$$N_{I, L'} = \bigcup_{v \in L', \lambda \in I} (\lambda v + \Gamma), \quad I \subseteq \mathbb{R}, \quad (3)$$

где L' – подмножество подпространства, натянутого в данном базисе на вектора $e_{k+1}, \dots, e_d$. Отметим, что данное подпространство не зависит от выбора базиса и инвариантно с точностью до параллельных переносов относительно невырожденных линейных преобразований.

ТЕОРЕМА 3. *Любая обобщенная гиперповерхность второго порядка является аффинно-симметричным множеством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему, опуская некоторые технические детали, которые можно найти, например, в [7]. Рассмотрим обобщенную гиперповерхность M_I типа (1), порожденную Γ . Применим к Γ невырожденное линейное преобразование A . Тогда $A(\lambda \Gamma) = \lambda A(\Gamma)$. Приведем $A(\Gamma)$ к главным осям. Любая гиперплоскость, натянутая на главные оси будет гиперплоскостью симметрии $A(\lambda \Gamma)$, а следовательно, и множества $A(M_I)$.

Рассмотрим обобщенную гиперповерхность $N_{I,L'}$ типа (3), порожденную Γ . Применим невырожденное линейное преобразование A . Тогда существует базис, в котором $A(\Gamma)$ имеет вид (2). Рассмотрим подпространство, натянутое в таком базисе на базисные вектора $e'_{k+1}, \dots, e'_d$. В силу того, что $A(L')$ параллельна $\text{span}\{e'_{k+1}, \dots, e'_d\}$, гиперплоскость $\text{span}\{e'_{k+1}, \dots, e'_d\}$ является плоскостью симметрии $A(\Gamma)$ и параллельных переносов этого множества на вектора-образы векторов множества L' . Таким образом, это гиперплоскость симметрии множества $A(N_I)$.

Перейдем к формулировке гипотез.

ГИПОТЕЗА 1. *Любое аффинно-симметричное замкнутое множество является замыканием обобщенной гиперповерхности второго порядка.*

Теперь сформулируем общую гипотезу, предположительно описывающую весь класс аффинно-симметричных множеств.

ГИПОТЕЗА 2. *Любое аффинно-симметричное множество является обобщенной гиперповерхностью второго порядка.*

В случае ограниченных множеств, возникает желание провести доказательство, аналогичное доказательству леммы 3, но не сокращая расстояние, а переводя некоторую точку точно в заданную. Возможно, прояснить случай неограниченного замкнутого множества, может помочь исследование аффинно-инвариантных конусов, а общий случай – исследование орбит точек множества относительно конечного набора косых симметрий.

Автор благодарен своему научному руководителю В. Ю. Протасову за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Montejano, “Convex bodies with homothetic sections”, *Bull. London Math. Soc.*, **23**:4 (1991), 381–386.
- [2] Г. Штейнгауз, *Сто задач*, Мир, М., 1976.
- [3] G. R. Burton, “Congruent sections of a convex body”, *Pacific J. Math.*, **81**:2 (1979), 303–316.
- [4] G. R. Burton, “Some characterisations of the ellipsoid”, *Israel J. Math.*, **28**:4 (1977), 339–349.
- [5] F. John, “Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions”, *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday*, Interscience Publ., New York, 1948, 187–204.
- [6] К. Чандрасекхаран, *Введение в аналитическую теорию чисел*, Мир, М., 1974.
- [7] П. С. Александров, *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*, Мир, М., 1979.

А. С. Войнов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: an.voynov@gmail.com

Поступило
09.11.2009