Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Азамов, Х. К. Яхшимов, Задача качества для одной дифференциальной игры с критическими свойствами, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 484–488

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm862>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 05:31:29

УДК 517.977.8

ЗАДАЧА КАЧЕСТВА ДЛЯ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ С КРИТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

А. А. Азамов, Х. К. Яхшимов

В работе приводится решение задачи преследования для одной линейной дифференциальной игры, являющейся критической – лежащей на границе разрешимости задач сближения и уклонения. На основе полученного результата дается ответ на два вопроса, связанных с методами Понтрягина.

Библиография: 11 названий.

1. Один из простых, но нетривиальных примеров теории дифференциальных игр задается системой

$$\dot{x} = -y - u_1 + v_1, \quad \dot{y} = x - u_2, \quad (1)$$

терминальным множеством $M = \{0\}$ и областями управлений преследователя $P = H$ и убегающего $Q = [-1, 1]$ соответственно. (Всюду rH обозначает круг $|z| \leq r$, где $z = (x, y)$.) Содержание игры состоит в том, что преследователь, управляющий вектором u , $u \in P$, стремится привести фазовую точку из начального состояния $\xi = (x_0, y_0)$ в точку 0, второй игрок – убегающий, управляющий параметром v , $v \in Q$, имеет противоположную цель. (В дальнейшем $\xi \neq 0$ и $\bar{Q}$ обозначает $Q \times \{0\}$.)

Отметим примечательную особенность примера (1). С одной стороны, $\bar{Q} \subset P$, причем $\bar{Q} \neq P$, так что известные теоремы об убегании ([1] и др.) не применимы. С другой стороны, преследователь не имеет явного преимущества, так как $P^*Q = 0$. Вследствие этого разрешимость задачи преследования непосредственно не вытекает из первого метода Понтрягина и его модификаций [2]–[4]. Что касается метода характеристик (т.е. эвристического метода Айзекса [5]), методов альтернированного интеграла [6] и стохастического максимина [7], то попытки их применения сопряжены с трудностями аналитического характера.

Критичность игры (1) проявляется и в том, что если круг P заменить квадратом $\{u = (u_1, u_2) \mid |u_1| + |u_2| \leq 1\}$, то задача преследования становится неразрешимой.

В настоящей работе с помощью альтернированного интеграла доказывается, что если существует хотя бы одно начальное положение, из которого возможно завершение преследования, то это имеет место для любого начального положения. Затем для точки $\xi = (\sqrt{2}/8, 1/4)$ строится специальная стратегия преследования, позволяющая привести фазовую точку в 0 вдоль “поводыря” – кривой $2y^3 = x^2$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. *Позиционной контрстратегией преследователя* (короче стратегией) U называется функция вида $u(t, z, v)$, отображающая $[0, \theta] \times \mathbb{R}^2 \times Q$ в множество P и являющаяся измеримой функцией t при любых фиксированных z, v и измеримой по Борелю по v при любых фиксированных t и z . *Управлением убегающего* называется произвольная измеримая функция $v(\cdot): [0, \theta] \rightarrow Q$. Каждая тройка, состоящая из начальной точки ξ , стратегии U и управления $v(\cdot)$, порождает пучок траекторий $Z(\xi, U, v(\cdot))$, которые определяются как равномерные пределы ломаных Эйлера [7], [8]. Далее, по определению для начальной точки ξ задача сближения на отрезке $[0, \theta]$ разрешима, если существует стратегия преследователя U^* такая, что при любом управлении убегающего $v(\cdot)$ для каждой траектории $z(\cdot) \in Z(\xi, U^*, v(\cdot))$ имеет место равенство $z(t) = 0$ при некотором $t \in [0, \theta]$.

Игра (1) имеет ряд полезных специфических качеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если для некоторой начальной точки ξ разрешима задача сближения на отрезке $[0, T]$, то она разрешима и для всех точек $\eta \in |\xi|H$ на отрезке $[0, T + \pi]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U_\xi = u_\xi(\cdot, \cdot, \cdot)$ – стратегия, обеспечивающая решение задачи сближения для начальной точки ξ на отрезке $[0, T]$. Тогда ввиду симметричности игры (1) относительно точки 0 стратегия $-u_\xi(t, -z, v)$ гарантирует разрешимость задачи сближения для точки $-\xi$.

Пусть η – произвольная точка окружности радиуса $|\xi|$ с центром 0 и для определенности η получается поворотом ξ вокруг точки 0 на угол $-\varphi$, $0 < \varphi < \pi$. Определим стратегию $U_\eta = u_\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} u_\eta(t, z, v) &= (v, 0) && \text{при } 0 \leq t < \varphi, \\ u_\eta(t, z, v) &= u_\xi(t - \varphi, z, v) && \text{при } \varphi \leq t. \end{aligned}$$

Тогда при любом управлении $v(\cdot)$ сужение пучка $Z(\eta, U_\eta, v(\cdot))$ на отрезок $[0, \varphi]$ состоит из одной функции $z_0(t)$ такой, что $z_0(\varphi) = \xi$. Поэтому для любой траектории $z(\cdot) \in Z(\eta, U_\eta, v(\cdot))$ имеет место $z(t) = 0$ при некотором t , $t \leq T + \varphi < T + \pi$.

Пусть теперь $|\eta| < |\xi|$. Чтобы убедиться в том, что для точки η разрешима задача сближения на отрезке $[0, T + \pi]$, достаточно заметить следующее свойство. Пусть $v(\cdot)$ – фиксированное управление убегающего, $z(\cdot)$ – траектория из пучка $Z(\xi, U_\xi, v(\cdot))$, так что $z(t^*) = 0$, где $t^* \in [0, T]$. Тогда для каждой точки $\eta = z(t)$, $0 < t \leq t^*$ (как начальной), задача сближения разрешима на отрезке $[0, T - t^*]$. Если точка η не лежит на дуге $z(t)$, $0 < t \leq \pi$, то учитывая, что при $u = (v, 0)$ фазовая точка движется по окружности, легко построить стратегию, обеспечивающую разрешимость задачи сближения из начального состояния η на отрезке $[0, T + \pi]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если для каждой начальной точки из круга l_0H заданного радиуса l_0 , $l_0 > 0$, разрешима задача сближения на фиксированном отрезке $[0, T]$, то она разрешима и для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^2$ на некотором отрезке.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно проводить непосредственно – построением в явном виде стратегии преследователя, приводящей пучок траекторий на круг l_0H . Однако это сопряжено с громоздкими вычислениями. Один элемент такой стратегии использован ниже – при доказательстве предложения 3. Здесь предложение 2 доказывается применением альтернативного интеграла [6]. При этом без потери общности считается $l_0 \leq 2$.

Рассмотрим дифференциальную игру (1) с новым терминальным множеством $M = lH$. Альтернативный интеграл $W^\tau(lH)$ также не удастся вычислить в явном виде. Выведем оценку снизу. Известно [6], что $W^\tau(M) \supset (M - B) + A$, где

$$A = \int_0^\tau e^{rC} P dr, \quad B = \int_0^\tau e^{rC} Q dr, \quad (2)$$

$C - (2 \times 2)$ -матрица коэффициентов системы (1). Поскольку e^{rC} – матрица поворота, то $A = \tau H$. При $\tau \leq \pi$ имеет место соотношение $B \subset 2 \sin(\tau/2) H$ [9]. Поэтому

$$W^\tau(lH) \supset \left(l + \tau - 2 \sin\left(\frac{\tau}{2}\right) \right) H \quad \text{для } \tau \in [0, l].$$

В частности,

$$W^l(lH) \supset \left(l + \frac{l^3}{32} \right) H \quad (l \leq \pi). \quad (3)$$

Пусть последовательность l_n задана формулой $l_{n+1} = l_n + l_n^3/32$. Положим $\sigma_n = l_0 + l_1 + \dots + l_n$. Тогда в силу полугруппового свойства альтернативного интеграла [6] и соотношения (3):

$$W^{\sigma_1}(l_0 H) = W^{l_1}(W^{l_0}(l_0 H)) \supset W^{l_1}(l_1 H) \supset l_2 H.$$

Аналогично,

$$W^{\sigma_n}(l_0 H) \supset l_{n+1} H.$$

Поскольку последовательность l_n возрастает, то $l_n \geq l_0 + l_0^3/32$ пока $l_n \leq \pi$. Очевидно, существует k такое, что $2 \leq l_{k+1} < \pi$. Если k наименьшее среди них, то положим $m = \sigma_k$. Тогда

$$W^m(l_0 H) \supset 2H. \quad (4)$$

Далее, пользуясь оценкой (4) и формулой

$$\int_0^{n\pi} e^{rC} \overline{Q} dr = 2nH$$

(см. [9]), легко вывести соотношение

$$W^{n\pi+m}(l_0 H) \supset W^{n\pi}(2H) \supset 2(n+1)H.$$

Из него вытекает, что при $\tau \rightarrow \infty$ альтернированный интеграл $W^\tau(l_0 H)$ покрывает всю плоскость $\mathbb{R}^2$.

Для завершения доказательства остается заметить, что точки (τ, z) , для которых $e^{\tau C} z \in W^\tau(l_0 H)$, образуют u -стабильный мост [8]. Поэтому для любой начальной точки ξ задача сближения (с терминальным множеством $l_0 H$) разрешима на отрезке $[0, T]$, где $T \leq \pi[|\xi|/2] + m$.

3. Из предложений 1 и 2 вытекает, что для игры (1) альтернатива имеет место в усиленной форме: если существует хотя бы одна начальная точка, для которой разрешима задача сближения на некотором отрезке, то это имеет место для любой начальной точки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для начальной точки $x_0 = \sqrt{2}/8$, $y_0 = 1/4$ задача сближения разрешима на отрезке $[0, 10]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим стратегию преследователя $u^*(z, v) = (u_1^*, u_2^*)$, заданную в достаточно малой окрестности дуги $\Delta = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq x_0, 2y^3 = x^2\}$ формулами:

$$u_1^* = \frac{Ax + 3By^2}{R}, \quad u_2^* = \frac{Bx - 3Ay^2}{R},$$

где $A = vx - 3xy^2 - xy$, $B = (9y^4 + x^2 - A^2)^{1/2}$, $R = A^2 + B^2$. (Значения функции u^* вне малой окрестности Δ здесь не играют роли.)

Задача Коши $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ для системы (1), в которой положено $u = u^*(z, y(t))$, $v = v(t)$ – произвольное управление убегающего, удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности и имеет первый интеграл $2y^3 = x^2$. Таким образом, точка $z(t)$ скользит по дуге Δ . Остается показать существование момента времени $t^* \in [0, 10]$ такого, что $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t^*$.

Выражение $x - u_2^*(z, v)$ для производной $\dot{y}$ (см. (1)) достигает максимум по $v \in Q$ при $v = 1$. Учитывая это обстоятельство и наличие первого интеграла, пользуясь неравенством $1 - 3y^2 - y \geq (1 - 3y^2 - y)^2$, имеющим место при $0 \leq y \leq y_0$, можно вывести оценку

$$\dot{y} \leq \frac{\sqrt{2y}}{9y + 2} (3 - y - \sqrt{6y + 11}) \leq \frac{\sqrt{2y}(3 - \sqrt{11})}{9y + 2}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что $\dot{y} \leq 0$ пока $y \geq 0$, и следовательно, $y \leq y_0 = 1/4$. Далее, неравенство (5) влечет соотношение

$$\dot{y} \leq -4(\sqrt{11} - 3) \frac{\sqrt{2y}}{17} \leq -0.1\sqrt{y},$$

откуда вытекает требуемое.

СЛЕДСТВИЕ 1. В игре (1) для каждой начальной точки $\xi \in \mathbb{R}^2$ разрешима задача сближения на конечном отрезке времени.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для дифференциальной игры (1) при $\tau > 0$ альтернированный интеграл $W^\tau(\{0\})$ содержит круг положительного радиуса r , причем $r \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$.

4. Следствие 2 дает ответ на два вопроса об альтернированном интеграле Понтрягина. Один из них относится к сравнению двух методов преследования [6]. Было предложено несколько усиленных первого метода. Последнее из них [4] во всех известных примерах давало тот же результат, что и второй метод. Если интеграл, введенный в работе [4], обозначить через $W_4^\tau(M)$, то из общей теории вытекает, что $W_4^\tau(M) \subset W^\tau(M)$. В связи с этим возник вопрос о том, имеет ли место равенство $W_4^\tau(M) = W^\tau(M)$. Для дифференциальной игры (1) $W_4^\tau(M) = 0$. Следовательно, метод альтернированного интеграла сильнее всех известных вариантов первого (прямого) метода.

Второй вопрос связан с работой [10]. В ней построен интеграл $\widetilde{W}^\tau(M)$, отличающийся от интеграла $W^\tau(M)$ тем, что при образовании альтернированных сумм $\widetilde{S}^\omega(M)$ интегралы (2) заменяются их средними значениями. В работе [10] доказано, что

$$\widetilde{W}^\tau(M) \subset W^\tau(M) \bigcap_{\omega} \widetilde{S}^\omega(M + \gamma(|\omega|)H), \quad (6)$$

где $\gamma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Следствие 2 показывает, что наделение “шапок Никольского” $\gamma(|\omega|)H$ на терминальное множество M является существенным для того, чтобы имело место правое равенство (6), потому что для игры (1) выполняется условие $\widetilde{W}^\tau(M) = 0$. Это заключение сохраняет силу и для других аналогичных упрощенных интегралов, введенных в работе [11].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Понтрягин Л. С. Линейная дифференциальная игра убежения // Тр. МИАН. 1971. Т. 112. С. 30–63.
- [2] Никольский М. С. Об одном прямом методе решения линейных дифференциальных игр преследования–убегания // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 6. С. 885–891.
- [3] Азамов А. А., Саматов Б. Т. О модифицированном третьем методе в задачах преследования // Неклассические задачи математической физики. Ташкент: Фан, 1985. С. 174–184.
- [4] Сатимов Н., Карабаев Э. О. Об одном методе решения задачи преследования // Докл. АН УзССР. 1986. № 3. С. 7–9.
- [5] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Наука, 1967.
- [6] Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307–330.
- [7] Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
- [8] Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
- [9] Абдуганиев А. А., Исканджиев И. М. О задаче вычисления альтернированного интеграла Понтрягина // Докл. АН УзССР. 1985. № 7. С. 5–6.
- [10] Никольский М. С. Об альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина // Матем. сб. 1981. Т. 116. № 4. С. 136–144.
- [11] Азамов А. А. Двойственность и полустойчивость альтернированного интеграла // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 265–268.

Наманганский государственный университет

Поступило
07.07.1998