Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Довгошей, Д. В. Дордовский, Условие ультраметричности предкасательных пространств, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 1, 49–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8620>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 11:06:53

Условие ультраметричности предкасательных пространств

А. А. Довгошей, Д. В. Дордовский

Получен критерий ультраметричности предкасательных пространств к общим метрическим пространствам.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Недавние достижения в теории метрических пространств тесно связаны с обобщениями дифференцирования; важные примеры можно найти в [1]–[8]. Есть несколько подходов к построению таких обобщений. Вкладывая метрическое пространство в подходящее линейное нормированное пространство, получаем линейную структуру и, таким образом, дифференцирование. На основе такого подхода довольно полная теория спрямляемых множеств и потоков на метрических пространствах развита в [4], [5]. Другим путем получения обобщенного дифференцирования является введение некоторых “касательных” пространств к метрическому пространству. Сходимость Громова–Хаусдорфа и ультрасходимость являются, на сегодня, наиболее применяемыми способами изучения инфинитезимальной геометрии (геометрии “касательных”) метрических пространств [9]. Секвенциальный подход к построению “предкасательного” пространства к общему метрическому пространству был предложен в [10]. В недавней работе [11] для предкасательных пространств доказан критерий предкомпактности, а в [12] получено условие их единственности. В [13] найдены условия “совпадения” предкасательных пространств к подпространствам данного метрического пространства в общей точке этих подпространств. В настоящей работе мы описываем инфинитезимальную структуру тех метрических пространств, для которых предкасательные являются ультраметрическими.

Для удобства кратко напомним необходимые определения.

Пусть (X, d) – метрическое пространство и пусть p – точка из X . Зафиксируем некоторую последовательность $\tilde{r}$ положительных вещественных чисел r_n , стремящихся к нулю. Назовем $\tilde{r}$ *нормирующей последовательностью*. Будем обозначать через $\tilde{X}$ множество всех последовательностей точек из X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Две последовательности $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\tilde{y} = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, *взаимостабильны* (относительно нормирующей последовательности $\tilde{r} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$), если существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, y_n)}{r_n} := \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (1.1)$$

Семейство $\tilde{F} \subseteq \tilde{X}$ самостабилиное относительно $\tilde{r}$, если каждые $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{F}$ взаимостабильны, $\tilde{F}$ максимальное самостабилиное, если $\tilde{F}$ самостабилиное и для произвольной $\tilde{z} \in \tilde{X} \setminus \tilde{F}$ существует $\tilde{x} \in \tilde{F}$ такая, что $\tilde{x}$ и $\tilde{z}$ не взаимостабильны. Из леммы Цорна легко следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть (X, d) – метрическое пространство и пусть $p \in X$. Тогда для каждой нормирующей последовательности $\tilde{r} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ существует максимальное самостабилиное семейство $\tilde{X}_{p, \tilde{r}}$ такое, что постоянная последовательность $\tilde{p} = \{p, p, \dots\} \in \tilde{X}_{p, \tilde{r}}$.

Рассмотрим функцию $\tilde{d}: \tilde{X}_{p, \tilde{r}} \times \tilde{X}_{p, \tilde{r}} \rightarrow \mathbb{R}$, где $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ определена через (1.1). Очевидно, $\tilde{d}$ симметрична и неотрицательна. Кроме того, из неравенства треугольника для d имеем

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{z}) + \tilde{d}(\tilde{z}, \tilde{y})$$

для всех $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ из $\tilde{X}_{p, \tilde{r}}$. Следовательно, $(\tilde{X}_{p, \tilde{r}}, \tilde{d})$ – псевдометрическое пространство.

Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\tilde{X}_{p, \tilde{r}}$ как $\tilde{x} \sim \tilde{y}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$. Обозначим через $\Omega_{p, \tilde{r}}^X$ множество всех классов эквивалентности на $\tilde{X}_{p, \tilde{r}}$, порожденных отношением $\sim$. Для $\alpha, \beta \in \Omega_{p, \tilde{r}}^X$ положим

$$\rho(\alpha, \beta) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad (1.2)$$

где $\tilde{x} \in \alpha$ и $\tilde{y} \in \beta$; тогда ρ – метрика на $\Omega_{p, \tilde{r}}^X$ см., например, [14; с. 168]. Переход от псевдометрического пространства $(\tilde{X}_{p, \tilde{r}}, \tilde{d})$ к метрическому пространству $(\Omega_{p, \tilde{r}}^X, \rho)$ будем называть *метрической идентификацией* $(\tilde{X}_{p, \tilde{r}}, \tilde{d})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пространство $(\Omega_{p, \tilde{r}}^X, \rho)$ называется *предкасательным* к X в точке p относительно нормирующей последовательности $\tilde{r}$.

Заметим, что $\Omega_{p, \tilde{r}}^X \neq \emptyset$, так как постоянная последовательность $\tilde{p}$ лежит в $\tilde{X}_{p, \tilde{r}}$, см. утверждение 1.

2. Критерий ультраметричности предкасательных пространств. Пусть (X, d) – метрическое пространство с отмеченной точкой p . Определим функцию $F: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ правилом

$$F(x, y) := \begin{cases} \frac{d(x, y)(d(x, p) \wedge d(y, p))}{(d(x, p) \vee d(y, p))^2}, & \text{если } (x, y) \neq (p, p) \\ 0, & \text{если } (x, y) = (p, p). \end{cases} \quad (2.1)$$

Отметим, что $0 \leq F(x, y) \leq 2$ для всех x и y . Для $x, y, z \in X$ положим

$$\Phi(x, y, z) := F(x, y) \vee F(x, z) \vee F(y, z). \quad (2.2)$$

Для краткости обозначим

$$\begin{aligned} d_1(x, y, z) &:= d(x, y) \vee d(y, z) \vee d(x, z), \\ d_2(x, y, z) &:= (d(x, y) \vee d(y, z)) \wedge (d(x, y) \vee d(x, z)) \wedge (d(x, z) \vee d(y, z)), \\ d_3(x, y, z) &:= d(x, y) \wedge d(y, z) \wedge d(x, z). \end{aligned}$$

То есть, $d_1(x, y, z)$ – длина наибольшей из сторон “треугольника” с вершинами x , y и z , $d_2(x, y, z)$ – длина наибольшей из двух оставшихся, а $d_3(x, y, z)$ – длина наименьшей из сторон.

Напомним следующее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Метрическое пространство (X, d) называется *ультраметрическим*, если $d(x, y) \leq d(x, z) \vee d(y, z)$ для всех $x, y, z \in X$.

Хорошо известно, что в ультраметрических пространствах все “треугольники” равнобедренны, причем основание не больше боковых сторон. Следующий критерий ультраметричности предкасалтельных пространств основывается на данном свойстве.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (X, d) – метрическое пространство с отмеченной точкой p . Все предкасалтельные пространства $\Omega_{p, \tilde{r}}^X$ являются ультраметрическими тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\lim_{x, y, z \rightarrow p} \Phi(x, y, z) \left(\frac{d_1(x, y, z)}{d_2(x, y, z)} - 1 \right) = 0, \quad (2.3)$$

где $d_1(x, y, z)/d_2(x, y, z) := 1$ при $d_2(x, y, z) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем необходимость. Пусть все предкасалтельные пространства к X в точке p ультраметрические, но предел в (2.3) не равен нулю. Так как

$$0 \leq \Phi(x, y, z) \leq 2 \quad \text{и} \quad \frac{d_1(x, y, z)}{d_2(x, y, z)} - 1 \in [0, 1],$$

существуют $\alpha > 0$ и $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\tilde{y} = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\tilde{z} = \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, сходящиеся к p , такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n, y_n, z_n) \left(\frac{d_1(x_n, y_n, z_n)}{d_2(x_n, y_n, z_n)} - 1 \right) = \alpha > 0.$$

Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можем считать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d_1(x_n, y_n, z_n)}{d_2(x_n, y_n, z_n)} - 1 \right) = \alpha_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n, y_n, z_n) = \alpha_2, \quad (2.4)$$

где $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha$ и $\alpha_1 \neq 0 \neq \alpha_2$. Заметим, что по крайней мере одно из равенств

$$F(x_n, y_n) = \Phi(x_n, y_n, z_n), \quad F(y_n, z_n) = \Phi(x_n, y_n, z_n), \quad F(z_n, x_n) = \Phi(x_n, y_n, z_n)$$

имеет место бесконечное число раз. Предположим, этим свойством обладает равенство

$$F(x_n, y_n) = \Phi(x_n, y_n, z_n), \quad (2.5)$$

чего всегда можно добиться переименовав переменные. Еще раз переходя к подпоследовательности, считаем, что (2.5) выполнено при всех $n \in \mathbb{N}$. Теперь второе равенство в (2.4) и (2.5) дают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, y_n)(d(x_n, p) \wedge d(y_n, p))}{(d(x_n, p) \vee d(y_n, p))^2} = \alpha_2 \in (0, 2]. \quad (2.6)$$

Выберем из пары x_n, y_n ту переменную (допустим x_n), для которой бесконечное число раз достигается максимум из $d(x_n, p)$ и $d(y_n, p)$,

$$d(x_n, p) = d(x_n, p) \vee d(y_n, p). \quad (2.7)$$

Как и раньше считаем, что последнее равенство верно для всех $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что (2.6) и условие $\alpha_2 \in (0, 2]$ приводят к $d(x_n, p) \neq 0$ при достаточно больших n . Положим

$$r_n := d(x_n, p) \vee d(z_n, p) \quad (2.8)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Еще раз переходя к подпоследовательности, считаем $r_n > 0$ для всех n . Величины

$$\frac{d(x_n, p)}{r_n}, \quad \frac{d(y_n, p)}{r_n}, \quad \frac{d(z_n, p)}{r_n}, \quad \frac{d(x_n, y_n)}{r_n}, \quad \frac{d(x_n, z_n)}{r_n}, \quad \frac{d(y_n, z_n)}{r_n} \quad (2.9)$$

равномерно ограничены в силу неравенства треугольника и (2.8).

Из ограниченности величин в (2.9) следует ограниченность $d_1(x_n, y_n, z_n)/r_n$ и $d_2(x_n, y_n, z_n)/r_n$, а значит, существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, для которой пределы

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(x_{n_k}, p)}{r_{n_k}}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(y_{n_k}, p)}{r_{n_k}}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(z_{n_k}, p)}{r_{n_k}}, \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(x_{n_k}, y_{n_k})}{r_{n_k}}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(x_{n_k}, z_{n_k})}{r_{n_k}}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(y_{n_k}, z_{n_k})}{r_{n_k}}, \\ & \tilde{d}_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_1(x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k})}{r_{n_k}}, \quad \tilde{d}_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_2(x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k})}{r_{n_k}} \end{aligned}$$

существуют и конечны. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что $\tilde{r} := \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{r_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Покажем, что $\tilde{d}_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ не равно нулю. Если это не так, то из неравенства треугольника следует, что $\tilde{d}_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0$. Последнее означает равенство нулю всех сторон “треугольника” с вершинами $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$. Далее предположим, что в формуле (2.8) $r_n = d(x_n, p)$ на бесконечном подмножестве из $\mathbb{N}$. Тогда из (2.6) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, y_n)(d(x_n, p) \wedge d(y_n, p))}{(d(x_n, p) \vee d(y_n, p))^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, y_n)d(y_n, p)}{(d(x_n, p))^2} = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}) = \alpha_2 \neq 0,$$

а значит $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$, что противоречит предположению $\tilde{d}_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0$. Теперь рассмотрим случай $r_n = d(z_n, p)$. Так как $d(z_n, p) \leq d(z_n, x_n) + d(x_n, p)$, можем считать, что либо $\tilde{d}(\tilde{z}, \tilde{x}) \neq 0$, либо $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) \neq 0$. В первом случае $\tilde{d}_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \neq 0$, поэтому считаем $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) \neq 0$. Из неравенства треугольника $d(x_n, p) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, p)$ следует $\tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}) > 0$ или $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$. Если верно последнее неравенство, то все доказано. Поэтому предполагаем $\tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}) > 0$. То есть, верно неравенство

$$0 < \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}) \leq \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) \leq \tilde{d}(\tilde{z}, \tilde{p}).$$

Далее, так как $\tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{z}) \geq \tilde{d}(\tilde{z}, \tilde{p}) - \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p})$, можем считать

$$0 < \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) = \tilde{d}(\tilde{z}, \tilde{p}) = 1.$$

Теперь, в силу (2.6) выполняется $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \alpha_2 > 0$, а значит и $\tilde{d}_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) > 0$.

Пусть $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ – максимальное самостабильное семейство, содержащее $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, и пусть $\Omega_{p,\tilde{r}}^X$ – метрическая идентификация пространства $(\tilde{X}_{p,\tilde{r}}, \tilde{d})$. Так как $\Omega_{p,\tilde{r}}^X$ – ультраметрическое пространство, то

$$\frac{\tilde{d}_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\tilde{d}_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} = 1. \quad (2.10)$$

Но в силу (2.4) и определения функций d_1, d_2 имеет место

$$\frac{\tilde{d}_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\tilde{d}_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_1(x_n, y_n, z_n)/r_n}{d_2(x_n, y_n, z_n)/r_n} = 1 + \alpha_1 > 1,$$

что противоречит (2.10). Нетрудно проверить, что необходимость (2.3) может быть совершенно аналогично установлена и тогда, когда в левой части (2.7) вместо $d(x_n, p)$ стоит $d(y_n, p)$.

Предположим теперь, что (2.3) выполняется и докажем ультраметричность всех пространств, предкасательных к X в точке p . Для этого достаточно проверить справедливость неравенства

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{z}) \vee \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{z}, \tilde{y}) \quad (2.11)$$

для любых трех $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{X}$, взаимностабильных относительно произвольной фиксированной нормирующей последовательности $\tilde{r}$ и таких, что имеют место неравенства

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{z}) \geq \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{z}, \tilde{y}) > 0. \quad (2.12)$$

Отметим, что в этом случае по определению существуют конечные пределы

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{p}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, p)}{r_n}, \quad \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{y}, \tilde{p}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(y_n, p)}{r_n}, \quad \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{z}, \tilde{p}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(z_n, p)}{r_n}, \quad (2.13)$$

где $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \tilde{x}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \tilde{y}$, $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \tilde{z}$.

Из определения функций d_1 и d_2 следует, что $\tilde{d}_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $\tilde{d}_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{z})$. Предельное соотношение (2.3) дает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n, y_n, z_n) \left(\frac{d_1(x_n, y_n, z_n)}{d_2(x_n, y_n, z_n)} - 1 \right) = 0. \quad (2.14)$$

Если

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d_1(x_n, y_n, z_n)}{d_2(x_n, y_n, z_n)} - 1 \right), \quad (2.15)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_1(x_n, y_n, z_n)}{d_2(x_n, y_n, z_n)} = \frac{\tilde{d}_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\tilde{d}_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} = \frac{\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{z})} = 1,$$

а значит $\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{z})$ и выполняется (2.11). Если (2.15) не выполняется, то найдется строго возрастающая, бесконечная последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $c \in (0, 1]$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{d_1(x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k})}{d_2(x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k})} - 1 \right) = c.$$

Последнее соотношение и (2.14) дают равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k}) = 0. \quad (2.16)$$

Отсюда, учитывая (2.1) и (2.2), находим

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(d(x_{n_k}, p) \wedge d(y_{n_k}, p))d(x_{n_k}, y_{n_k})}{(d(x_{n_k}, p) \vee d(y_{n_k}, p))^2} \\ &= \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(d(x_{n_k}, p)/r_{n_k}) \wedge (d(y_{n_k}, p)/r_{n_k})}{((d(x_{n_k}, p)/r_{n_k}) \vee (d(y_{n_k}, p)/r_{n_k}))^2} \end{aligned}$$

и, значит,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(d(x_{n_k}, p)/r_{n_k}) \wedge (d(y_{n_k}, p)/r_{n_k})}{((d(x_{n_k}, p)/r_{n_k}) \vee (d(y_{n_k}, p)/r_{n_k}))^2} = 0.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(d(x_{n_k}, p)/r_{n_k}) \wedge (d(z_{n_k}, p)/r_{n_k})}{((d(x_{n_k}, p)/r_{n_k}) \vee (d(z_{n_k}, p)/r_{n_k}))^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(d(y_{n_k}, p)/r_{n_k}) \wedge (d(z_{n_k}, p)/r_{n_k})}{((d(y_{n_k}, p)/r_{n_k}) \vee (d(z_{n_k}, p)/r_{n_k}))^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Заметим, что

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{p}) \vee \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{y}, \tilde{p}) \vee \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{z}, \tilde{p}) > 0,$$

так как в противном случае из неравенства треугольника следует

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{z}, \tilde{y}) = 0,$$

что противоречит (2.12). Допустим

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{p}) \vee \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{y}, \tilde{p}) \vee \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{z}, \tilde{p}) = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{z}, \tilde{p}). \quad (2.18)$$

Отсюда и из (2.17) находим

$$0 = \frac{1}{(\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{z}, \tilde{p}))^2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{d(x_{n_k}, p)}{r_{n_k}} \wedge \frac{d(z_{n_k}, p)}{r_{n_k}} \right) = \frac{\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{p})}{(\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{z}, \tilde{p}))^2},$$

т.е. $\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{p}) = 0$. Точно также получаем $\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{y}, \tilde{p}) = 0$. Таким образом, в “треугольнике с вершинами $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ ” имеем $\tilde{x} = \tilde{y} = \tilde{p}$, что дает (2.11). Осталось заметить, что аналогичные рассуждения справедливы и в том случае, если в правой части (2.18) стоит $\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{p})$ или $\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{y}, \tilde{p})$. Таким образом, (2.3) влечет (2.11). Доказательство закончено.

Теорема 1 была анонсирована в [15], а в работе [16] доказан критерий ультраметричности предкасательных пространств, основанный на так называемом “показателе промежуточности” (betweenness exponent) метрического пространства.

Следующая теорема проясняет “геометрический смысл” множителя $\Phi(x, y, z)$ в предельном соотношении (2.3).

ТЕОРЕМА 2. Пусть (X, d) – метрическое пространство с отмеченной точкой p . Неравенство $\text{card } \Omega_{p, \tilde{r}}^X \leq 2$ выполняется для каждого предкасательного пространства $\Omega_{p, \tilde{r}}^X$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x, y, z \rightarrow p} \Phi(x, y, z) = 0. \quad (2.19)$$

Сформулированная теорема является модификацией соответствующего результата из [10] и имеет аналогичное доказательство, приводимое ниже для удобства читателя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из определения функции Φ следует, что

$$F(x, y) + F(x, z) + F(y, z) \geq \Phi(x, y, z) \geq F(x, y).$$

Тогда

$$\begin{aligned} 3 \limsup_{x, y \rightarrow p} F(x, y) &\geq \limsup_{x, y, z \rightarrow p} (F(x, y) + F(x, z) + F(y, z)) \\ &\geq \limsup_{x, y, z \rightarrow p} \Phi(x, y, z) \geq \limsup_{x, y \rightarrow p} F(x, y). \end{aligned}$$

Последняя цепочка неравенств показывает, что (2.19) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x, y \rightarrow p} F(x, y) = 0. \quad (2.20)$$

Покажем, что последнее равенство эквивалентно выполнению неравенства

$$\text{card } \Omega_{p, \tilde{r}}^X \leq 2$$

для всех предкасательных пространств $\Omega_{p, \tilde{r}}^X$.

Предположим, что равенство (2.20) не выполняется. Тогда существуют последовательности $\tilde{x}' = \{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\tilde{y}' = \{y'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, сходящиеся к точке p и такие, что

$$0 < \limsup_{x, y \rightarrow p} F(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x'_n, y'_n), \quad (2.21)$$

где $X \ni x'_n \neq p \neq y'_n \in X$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В качестве нормирующей последовательности возьмем $\tilde{r} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ с $r_n := d(x'_n, p) \vee d(y'_n, p)$. Положим

$$(x_n, y_n) := \begin{cases} (x'_n, y'_n), & \text{если } d(x'_n, p) \geq d(y'_n, p), \\ (y'_n, x'_n), & \text{если } d(y'_n, p) > d(x'_n, p). \end{cases}$$

Тогда при всех n имеем

$$\frac{d(x_n, p)}{r_n} = 1, \quad \frac{d(y_n, p)}{r_n} \leq 1, \quad \text{а} \quad \frac{d(x_n, y_n)}{r_n} \leq \frac{d(x_n, p)}{r_n} + \frac{d(y_n, p)}{r_n} \leq 2.$$

Отсюда получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, p)}{r_n} = 1,$$

а переходя к подпоследовательности можем считать, что существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, y_n)}{r_n} \leq 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(y_n, p)}{r_n} \leq 1.$$

Таким образом выполнены соотношения $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) = 1$, $0 \leq \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}) \leq 1$, $0 \leq \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 2$. Прямые вычисления показывают, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, y_n) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}).$$

Отсюда, используя (2.21), получаем

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0 \neq \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}).$$

Если $\tilde{X}_{p, \tilde{r}}$ – максимальное самостабилизирующее семейство, содержащее $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и $\tilde{p}$, то при метрической идентификации $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и $\tilde{p}$ переходят в различные точки предкасательного пространства $\Omega_{p, \tilde{r}}^X$, что противоречит неравенству $\text{card } \Omega_{p, \tilde{r}}^X \leq 2$.

Докажем обратное. Предположим, что $\text{card } \Omega_{p, \tilde{r}}^X \geq 3$ для некоторого $\Omega_{p, \tilde{r}}^X$. Тогда существуют последовательности $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\tilde{y} = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такие, что величины

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, p)}{r_n}, \quad \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(y_n, p)}{r_n}, \quad \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, y_n)}{r_n}$$

конечны и положительны. Рассмотрим последовательность $\{F(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, где F определена правилом (2.1). Так как

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, p) \vee d(y_n, p)}{r_n} = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) \vee \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}) < \infty,$$

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, p) \wedge d(y_n, p)}{r_n} = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) \wedge \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}) < \infty,$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(d(x_n, y_n)/r_n)((d(x_n, p) \wedge d(y_n, p))/r_n)}{((d(x_n, p) \vee d(y_n, p))/r_n)^2} \\ &= \frac{\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})(\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) \wedge \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}))}{(\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) \vee \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}))^2} > 0, \end{aligned}$$

что противоречит равенству (2.20). Теорема доказана.

Для некоторых метрических пространств предельные соотношения (2.19) и (2.3) эквивалентны.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$, $p \in X$, метрика определена как $d(x, y) = |x - y|$ и $\Omega_{p, \tilde{r}}^X$ – предкасательное пространство к X в точке p . Следующие утверждения являются эквивалентными.

- (i) $\Omega_{p, \tilde{r}}^X$ – ультраметрическое;
- (ii) $\text{card } \Omega_{p, \tilde{r}}^X \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) тривиальна. Предположим, что $\text{card } \Omega_{p, \tilde{r}}^X \geq 3$, но (i) выполняется. Покажем, что сделанные предположения ведут к противоречию. Так как $X \subseteq \mathbb{R}$ и $d(x, y) = |x - y|$, для любых x, y, z выполняется равенство

$$d_1(x, y, z) = d_2(x, y, z) + d_3(x, y, z). \quad (2.22)$$

Пусть α, β, γ точки $\Omega_{p, \tilde{r}}^X$, для которых $\rho_3(\alpha, \beta, \gamma) > 0$. Из (2.22) легко получается равенство

$$\rho_1(\alpha, \beta, \gamma) = \rho_2(\alpha, \beta, \gamma) + \rho_3(\alpha, \beta, \gamma).$$

Так как $\Omega_{p,\tilde{r}}^X$ ультраметрическое, то $\rho_1(\alpha, \beta, \gamma) = \rho_2(\alpha, \beta, \gamma)$ и, значит, $\rho_3(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$, $p \in X$ и $d(x, y) = |x - y|$. Каждое предкасательное пространство $\Omega_{p,\tilde{r}}^X$ является ультраметрическим тогда и только тогда, когда функция F , определенная равенством (2.1), непрерывна в точке (p, p) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с (2.1) функция F непрерывна в (p, p) тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x,y \rightarrow p} F(x, y) = 0.$$

Как отмечалось в доказательстве теоремы 2, последнее эквивалентно тому, что

$$\lim_{x,y,z \rightarrow p} \Phi(x, y, z) = 0.$$

Это равенство, по теореме 2, равносильно выполнению неравенства $\text{card } \Omega_{p,\tilde{r}}^X \leq 2$ для любого предкасательного пространства $\Omega_{p,\tilde{r}}^X$. Применив теорему 3, завершаем доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что касательные пространства, построенные с помощью техники ультрафильтров [9], являются индуктивными пределами предкасательных пространств, изучаемых в данной работе. Это позволяет распространить полученные результаты на случай этих касательных.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [2] L. Ambrosio, “Metric space valued functions of bounded variation”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **17**:3 (1990), 439–478.
- [3] L. Ambrosio, “Fine properties of sets of finite perimeter in doubling metric measure spaces”, *Set-Valued Anal.*, **10**:2-3 (2002), 111–128.
- [4] L. Ambrosio, B. Kirchheim, “Currents in metric spaces”, *Acta Math.*, **185**:1 (2000), 1–80.
- [5] L. Ambrosio, B. Kirchheim, “Rectifiable sets in metric and Banach spaces”, *Math. Ann.*, **318**:3 (2000), 527–555.
- [6] P. Hajlasz, “Sobolev spaces on an arbitrary metric space”, *Potential Anal.*, **5**:4 (1996), 403–415.
- [7] J. Cheeger, “Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces”, *Geom. Funct. Anal.*, **9**:3 (1999), 428–517.
- [8] N. Shanmugalingam, “Newtonian space: an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **16**:2 (2000), 243–279.
- [9] M. Bridson, A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren Math. Wiss., **319**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [10] O. Dovgoshey, O. Martio, *Tangent Spaces to Metric Spaces*, Reports in Mathematics, Preprint 480, University of Helsinki, 2008.
- [11] O. Dovgoshey, F. Abdullayev, M. Küçükaslan, “Compactness and boundedness of tangent spaces to metric spaces”, *Beiträge Algebra Geom.*, **51**:2 (2010), 547–576.
- [12] F. Abdullayev, O. Dovgoshey, M. Küçükaslan, “Metric spaces with unique pretangent spaces. Conditions of the uniqueness”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **36**:2 (2011), 353–392.
- [13] O. A. Dovgoshey, “Tangent spaces to metric spaces and to their subspaces”, *Ukr. Math. Bull.*, **5**:4 (2008), 459–477.

- [14] Дж. Л. Келли, *Общая топология*, Наука, М., 1981.
- [15] А. А. Довгошей, Д. В. Дордовский, “Ультраметричность касательных пространств к метрическим пространствам”, *Доп. НАН України*, 2010, № 3, 19–23.
- [16] O. Dovgoshey, D. Dordovskiy, “Ultrametricity and metric betweenness in tangent spaces to metric spaces”, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **2**:2 (2010), 100–113.

А. А. Довгошей

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,

г. Донецк

E-mail: aleksdov@mail.ru

Поступило

25.05.2009

Исправленный вариант

20.01.2010

Д. В. Дордовский

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,

г. Донецк

E-mail: dordovskymitry@gmail.com