Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов, А. А. Шихаб, Геометрия тензора конгармонической кривизны почти эрмитовых многообразий, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 1, 87–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8625>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:18:40

Геометрия тензора конгармонической кривизны почти эрмитовых многообразий

В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов, А. Шихаб

Получен критерий конгармонической паракелеровости многообразий размерности 4 и выше и условие того, что многообразие является конгармонически плоским.

Библиография: 15 названий.

Конформные преобразования римановой структуры являются важным объектом изучения в дифференциальной геометрии. Значительный интерес представляет специальный тип конформных преобразований – конгармонические преобразования, т.е. конформные преобразования, сохраняющие свойство гармоничности гладких функций. Этот тип преобразований был введен в рассмотрение Иши [1] в 1957 г. и в настоящее время изучается с различных точек зрения. Известно, что такие преобразования имеют тензорный инвариант – так называемый тензор конгармонической кривизны. Легко проверить, что этот тензор является алгебраическим тензором кривизны, т.е. он обладает классическими свойствами симметрии тензора римановой кривизны. Пополнение римановой структуры до почти эрмитовой структуры позволяет выделить еще несколько конгармонических инвариантов – элементов спектра тензора конгармонической кривизны, а также дополнительные свойства симметрии тензора конгармонической кривизны.

В настоящей работе изучаются связи между этими инвариантами и дополнительными свойствами симметрии тензора конгармонической кривизны, а также геометрический смысл обращения в нуль этих инвариантов.

Пусть M – гладкое многообразие размерности $2n$, $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций на M , $\mathfrak{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на многообразии M , $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика, ∇ – риманова связность метрики g на M , d – оператор внешнего дифференцирования. В дальнейшем все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [2; с.326]. *Почти эрмитовой* (короче, $A\mathcal{H}$ -) *структурой* на многообразии M называется пара (J, g) , где J – почти комплексная структура ($J^2 = -\text{id}$) на M , $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – (псевдо) риманова метрика на M . При этом $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$; $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Эндоморфизм J называется *структурным эндоморфизмом*. Многообразие, на котором фиксирована почти эрмитова структура, называется *почти эрмитовым* (короче, $A\mathcal{H}$ -) *многообразием* и обозначается $\{M, J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$

или просто M . Задание почти эрмитовой структуры на многообразии M равносильно заданию G -структуры над M со структурной группой $U(n)$, элементы пространства которой называются *A-реперами* [2; с. 327]. Эта G -структура называется *присоединенной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [2; с. 339]. Почти эрмитова структура (J, g) на многообразии M называется *приближенно (nearly) келеровой* (короче, $N\mathcal{K}$ -)структурой, если на M выполняется тождество

$$\nabla_X(J)Y + \nabla_Y(J)(X) = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Интегрируемая приближенно келерова структура называется *келеровой* (короче, $\mathcal{K}$ -)структурой. Хорошо известно [3], что келерова структура характеризуется тождеством

$$\nabla_X(J)Y = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Приближенно келерова структура, отличная от келеровой, называется *собственной*. Примером собственной $N\mathcal{K}$ -структуры является каноническая $N\mathcal{K}$ -структура, индуцированная 3-векторным произведением на 6-мерной сфере, естественно вложенной в алгебру октав Гревса–Кэли [4].

Пусть (M, J, g) – $2n$ -мерное $A\mathcal{K}$ -многообразие. Обозначим Θ форму римановой связности ∇ на M , а ω – форму смещения. Условимся, что индексы $i, j, k, \dots$ пробегают значения от 1 до $2n$, а индексы $a, b, c, d, \dots$ – значения от 1 до n . Положим $\hat{a} = a + n$.

На пространстве присоединенной G -структуры имеют место следующие соотношения [2; с. 328]:

$$\begin{aligned} 1) \quad \Theta_{\hat{b}}^a &= \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},c}^a \omega^c + \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},\hat{c}}^a \omega_c; & 2) \quad \Theta_{\hat{b}}^{\hat{a}} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},c}^{\hat{a}} \omega^c - \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}} \omega_c; \\ 3) \quad J_{\hat{b},k}^a &= 0; & 4) \quad J_{\hat{b},k}^{\hat{a}} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Поскольку ∇ – риманова связность метрики g , то $\nabla g = 0$, т.е.

$$dg_{ij} - g_{kj} \Theta_i^k - g_{ik} \Theta_j^k = 0.$$

На пространстве присоединенной G -структуры эти соотношения примут вид [2; с. 329]:

$$1) \quad \Theta_{\hat{a}}^b + \Theta_{\hat{b}}^{\hat{a}} = 0; \quad 2) \quad \Theta_{\hat{a}}^b + \Theta_b^{\hat{a}} = 0; \quad 3) \quad \Theta_{\hat{a}}^{\hat{b}} + \Theta_b^{\hat{a}} = 0. \quad (2)$$

С учетом (1) и (2) первая группа структурных уравнений римановой связности на пространстве присоединенной G -структуры запишется в форме

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= -\Theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \\ 2) \quad d\omega_a &= \Theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c \end{aligned} \quad (3)$$

(см. [2; с. 329]), где

$$\begin{aligned} \omega_a &= \omega_{\hat{a}}, & B^{ab}{}_c &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},c}^a, & B_{ab}{}^c &= \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}}, & \overline{B^{ab}{}_c} &= B_{ab}{}^c, \\ B^{abc} &= \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{[\hat{b},\hat{c}]}^a, & B_{abc} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} J_{[\hat{b},\hat{c}]}^{\hat{a}}, & \overline{B^{abc}} &= B_{abc}. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (3) называются *первой группой структурных уравнений АН-структуры*. Если ввести обозначения [2; с. 329]

$$C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{b,\bar{c}}^a, \quad C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J_{b,c}^{\bar{a}}, \quad (5)$$

то первые два соотношения (1), 1) и (1), 2) примут вид

$$\Theta_b^a = -B^{ab}{}_c \omega^c + C^{abc} \omega_c, \quad \Theta_b^{\bar{a}} = C_{abc} \omega^c - B_{ab}{}^c \omega_c. \quad (6)$$

Легко показать [2; с. 330, 331], что системы функций $\tilde{B} = \{B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c\}$ и $\tilde{C} = \{C^{abc}, C_{abc}\}$ на пространстве присоединенной G -структуры глобально определяют тензоры типа (2,1) на многообразии M . Явные выражения этих тензоров имеют вид [2; с. 332, 333]

$$\begin{aligned} \tilde{B}(X, Y) &= -\frac{1}{4} \{ \nabla_{JY}(J)(X) - \nabla_Y(J)(JX) \}, \\ \tilde{C}(X, Y) &= -\frac{1}{4} \{ \nabla_{JY}(J)(X) + \nabla_Y(J)(JX) \}, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned} \quad (7)$$

Тензор $\tilde{B}$ называется *полным виртуальным тензором*. Этот вещественный тензор является суммой двух комплексно-сопряженных тензоров $\tilde{B} = \sigma \circ \tilde{B} + \bar{\sigma} \circ \tilde{B}$, которые называются, соответственно, *виртуальными тензорами первого и второго рода* и имеют на пространстве присоединенной G -структуры ненулевые компоненты $\{B^{ab}{}_c\}$ и $\{B_{ab}{}^c\}$, соответственно [2; с. 333]. Здесь $\sigma = (\text{id} - \sqrt{-1}J)/2$ и $\bar{\sigma} = (\text{id} + \sqrt{-1}J)/2$ – естественные проекторы на собственные распределения структурного эндоморфизма J [2; с. 296].

Тензор $\tilde{C}$ называется *полным структурным тензором*. Этот тензор также является суммой двух комплексно-сопряженных тензоров:

$$\tilde{C} = \sigma \circ \tilde{C} + \bar{\sigma} \circ \tilde{C},$$

которые называются, соответственно, *структурными тензорами первого и второго рода* и имеют на пространстве присоединенной G -структуры ненулевые компоненты $\{C^{abc}\}$ и $\{C_{abc}\}$, соответственно. Тензор $\text{Alt } \tilde{C} = \{\tilde{C}(X, Y) - \tilde{C}(Y, X)\}/2$ с компонентами $\{B^{abc}\}$ и $\{B_{abc}\}$ называется *альтернированным структурным тензором*. Этот вещественный тензор является суммой двух комплексно-сопряженных тензоров:

$$\text{Alt } \tilde{C} = \sigma \circ \text{Alt } \tilde{C} + \bar{\sigma} \circ \text{Alt } \tilde{C},$$

которые называются *альтернированными структурными тензорами первого и второго рода*, соответственно и имеют на пространстве присоединенной G -структуры ненулевые компоненты $\{B^{abc}\}$ и $\{B_{abc}\}$, соответственно [2; с. 333].

На практике гораздо удобнее иметь дело с модифицированными виртуальным и структурным тензорами, определяемыми по формулам [2; с. 334]

$$B(X, Y) = -2\tilde{B}(Y, X), \quad C(X, Y) = -2\tilde{C}(Y, X), \quad (8)$$

соответственно, или, в более явной записи,

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \frac{1}{2} \{ \nabla_{JX}(J)(Y) - \nabla_X(J)(JY) \}, \\ C(X, Y) &= \frac{1}{2} \{ \nabla_{JX}(J)(Y) + \nabla_X(J)(JY) \}, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом (8) имеем следующие соотношения [2; с. 334]:

$$\begin{aligned} 1) \quad B^{ab}{}_c &= -\frac{1}{2}B(\varepsilon_c, \varepsilon_{\hat{b}})^a; \\ 2) \quad C^{abc} &= -\frac{1}{2}C(\varepsilon_{\hat{c}}, \varepsilon_{\hat{b}})^a; \\ 3) \quad B^{abc} &= \frac{1}{4}\{C(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_{\hat{c}}) - C(\varepsilon_{\hat{c}}, \varepsilon_{\hat{b}})\}^a = C^{a[bc]}. \end{aligned} \quad (10)$$

Основные свойства этих тензоров описываются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1 [2; с. 334]. *Тензоры B и C обладают следующими свойствами:*

$$\begin{aligned} 1) \quad J \circ B(X, Y) &= B(JX, Y) = -B(X, JY); \\ 2) \quad \langle\langle B(X, Y), Z \rangle\rangle + \overline{\langle\langle Y, B(X, Z) \rangle\rangle} &= 0; \\ 3) \quad J \circ C(X, Y) &= -C(JX, Y) = -C(X, JY); \\ 4) \quad \langle\langle C(X, Y), Z \rangle\rangle + \overline{\langle\langle Y, C(X, Z) \rangle\rangle} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

СЛЕДСТВИЕ 1 [2; с. 335]. *Модифицированный виртуальный тензор $\mathbb{C} \otimes C^\infty(M)$ -линеен по первому и $\mathbb{C} \otimes C^\infty(M)$ -антилинеен по второму аргументам. Модифицированный структурный тензор $\mathbb{C} \otimes C^\infty(M)$ -антилинеен по обоим аргументам.*

СЛЕДСТВИЕ 2 [2; с. 335]. *На пространстве присоединенной G -структуры справедливы соотношения*

$$1) \quad B^{ab}{}_c + B^{ba}{}_c = 0; \quad 2) \quad C^{abc} + C^{bac} = 0. \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 2 [2; с. 343]. *Пусть (M, J, g) – $A\mathcal{H}$ -многообразие. Каждый тензор T типа $(r, 1)$ на M , рассматриваемый как r -линейное отображение*

$$T: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r \text{ раз}} \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

естественно представляется в виде суммы 2^r тензоров того же типа, являющихся $\mathbb{C} \otimes C^\infty(M)$ -линейными либо $\mathbb{C} \otimes C^\infty(M)$ -антилинейными по каждому аргументу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [2; с. 343]. *Набор тензоров типа $(r, 1)$, линейных либо антилинейных по своим аргументам и в сумме составляющих тензор T , называется спектром тензора T , а сами тензоры называются элементами спектра.*

Элемент спектра тензора характеризуется десятичным числом, у которого единицы двоичной записи соответствуют номерам антилинейных аргументов. Например, запись $\overset{(13)}{T}$ характеризует элемент спектра тензора T , антилинейный по первому, второму и четвертому аргументам, поскольку

$$13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [2; с. 344]. Пусть (M, J, g) – $A\mathcal{H}$ -многообразие, $T \in T_r^1(M)$. Тогда тензор $T_{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, 2^r - 1$, в качестве ненулевых компонент может иметь только компоненты вида $\left\{ T_{(k)}^a{}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}, T_{(k)}^{\hat{a}}{}_{\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_r} \right\}$, где $\alpha_j = a_j$ либо $\alpha_j = \hat{a}_j$ в зависимости от того, стоит ли на j -м месте в двоичном представлении числа k нуль либо единица, соответственно, $j = 1, 2, \dots, r$; $\hat{a} = a + n$. При этом

$$T_{(k)}^a{}_{\alpha_1 \dots \alpha_r} = T^a{}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}, \quad T_{(k)}^{\hat{a}}{}_{\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_r} = T^{\hat{a}}{}_{\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_r}. \quad (13)$$

Так, для тензора ∇J имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3 [2; с. 344]. Спектр тензора ∇J $A\mathcal{H}$ -многообразия имеет вид

$$1) \quad \nabla_{(0)} J = \nabla J = 0; \quad 2) \quad \nabla_{(1)} J = -J \circ B; \quad 3) \quad \nabla_{(3)} J = J \circ C. \quad (14)$$

Пусть (M, J, g) – $A\mathcal{H}$ -многообразие. Напомним, что тензор конгармонической кривизны был введен Иши [1] как тензор типа $(4, 0)$ на n -мерном римановом многообразии, определенный формулой

$$K(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) - \frac{1}{n-2} [g(X, W)S(Y, Z) - g(X, Z)S(Y, W) + g(Y, Z)S(X, W) - g(Y, W)S(X, Z)], \quad (15)$$

где R – тензор римановой кривизны, S – тензор Риччи. Этот тензор инвариантен при конгармонических преобразованиях, т.е. при конформных преобразованиях пространства, сохраняющих гармоничность функций.

Рассмотрим свойства тензора конгармонической кривизны. Имеем

$$\begin{aligned} 1) \quad K(X, Y, Z, W) &= R(X, Y, Z, W) - \frac{1}{2(n-1)} [g(X, W)S(Y, Z) - g(X, Z)S(Y, W)] \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)} [g(Y, Z)S(X, W) - g(Y, W)S(X, Z)] \\ &= -R(Y, X, Z, W) + \frac{1}{2(n-1)} [-g(X, W)S(Y, Z) + g(X, Z)S(Y, W)] \\ &\quad + \frac{1}{2(n-1)} [-g(Y, Z)S(X, W) + g(Y, W)S(X, Z)] \\ &= -K(Y, X, Z, W). \end{aligned}$$

Аналогично доказываются свойства

- 2) $K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z);$
- 3) $K(X, Y, Z, W) = K(Z, W, X, Y);$
- 4) $K(X, Y, Z, W) + K(Y, Z, X, W) + K(Z, X, Y, W) = 0.$

Таким образом, тензор конгармонической кривизны удовлетворяет всем свойствам алгебраического тензора кривизны:

- 1) $K(X, Y, Z, W) = -K(Y, X, Z, W);$
 - 2) $K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z);$
 - 3) $K(X, Y, Z, W) + K(Y, Z, X, W) + K(Z, X, Y, W) = 0;$
 - 4) $K(X, Y, Z, W) = K(Z, W, X, Y), \quad X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M).$
- (16)

Контравариантный тензор конгармонической кривизны имеет вид

$$K(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2(n-1)}\{S(Y, Z)X - S(X, Z)Y\} - \frac{1}{2(n-1)}\{g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY\}, \quad (17)$$

где $g(QX, Y) = S(X, Y)$. По определению спектра тензора

$$K(X, Y)Z = \underset{(0)}{K(X, Y)Z} + \underset{(1)}{K(X, Y)Z} + \underset{(2)}{K(X, Y)Z} + \underset{(3)}{K(X, Y)Z} + \underset{(4)}{K(X, Y)Z} + \underset{(5)}{K(X, Y)Z} + \underset{(6)}{K(X, Y)Z} + \underset{(7)}{K(X, Y)Z}, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Согласно предложению 1 тензор $\underset{(0)}{K(X, Y)Z}$ в качестве ненулевых компонент может иметь только компоненты вида

$$\left\{ K^a_{(0)bcd}, K^{\widehat{a}}_{(0)\widehat{bcd}} \right\} = \{ K^a_{bcd}, K^{\widehat{a}}_{\widehat{bcd}} \},$$

тензор $\underset{(1)}{K(X, Y)Z}$ – компоненты вида

$$\left\{ K^a_{(1)bcd}, K^{\widehat{a}}_{(1)\widehat{bcd}} \right\} = \{ K^a_{bcd}, K^{\widehat{a}}_{\widehat{bcd}} \},$$

тензор $\underset{(2)}{K(X, Y)Z}$ – компоненты вида

$$\left\{ K^a_{(2)bcd}, K^{\widehat{a}}_{(2)\widehat{bcd}} \right\} = \{ K^a_{bcd}, K^{\widehat{a}}_{\widehat{bcd}} \},$$

тензор $\underset{(3)}{K(X, Y)Z}$ – компоненты вида

$$\left\{ K^a_{(3)bcd}, K^{\widehat{a}}_{(3)\widehat{bcd}} \right\} = \{ K^a_{bcd}, K^{\widehat{a}}_{\widehat{bcd}} \},$$

тензор $\underset{(4)}{K(X, Y)Z}$ – компоненты вида

$$\left\{ K^a_{(4)bcd}, K^{\widehat{a}}_{(4)\widehat{bcd}} \right\} = \{ K^a_{bcd}, K^{\widehat{a}}_{\widehat{bcd}} \},$$

тензор $\underset{(5)}{K(X, Y)Z}$ – компоненты вида

$$\left\{ K^a_{(5)bcd}, K^{\widehat{a}}_{(5)\widehat{bcd}} \right\} = \{ K^a_{bcd}, K^{\widehat{a}}_{\widehat{bcd}} \},$$

тензор $\underset{(6)}{K(X, Y)Z}$ – компоненты вида

$$\left\{ K^a_{(6)bcd}, K^{\widehat{a}}_{(6)\widehat{bcd}} \right\} = \{ K^a_{bcd}, K^{\widehat{a}}_{\widehat{bcd}} \},$$

тензор $K(X, Y)Z$ – компоненты вида

$$\left\{ K_{(7)}^a{}_{\widehat{bcd}}, K_{(7)}^{\widehat{a}}{}_{bcd} \right\} = \{ K^a{}_{\widehat{bcd}}, K^{\widehat{a}}{}_{bcd} \}.$$

Тензоры $K_0 = K_{(0)}(X, Y)Z$, $K_1 = K_{(1)}(X, Y)Z, \dots, K_7 = K_{(7)}(X, Y)Z$, назовем *основными конгармоническими инвариантами $A\mathcal{H}$ -многообразий*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. $A\mathcal{H}$ -многообразие, для которого $K_i = 0$, будем называть $A\mathcal{H}$ -многообразием класса K_i , $i = 0, 1, \dots, 7$.

Многообразие класса K_0 характеризуется условием $K_{(0)}^a{}_{bcd} = 0$ или $K^a{}_{bcd} = 0$, т.е.

$[K(\varepsilon_c, \varepsilon_d)\varepsilon_b]^a \varepsilon_a = 0$. Так как σ – проектор на $DY^{\sqrt{-1}}$, то $\sigma \circ \{K(\sigma X, \sigma Y)\sigma Z\} = 0$, т.е.

$$(\text{id} - \sqrt{-1}J)\{K(X - \sqrt{-1}JX, Y - \sqrt{-1}JY)(Z - \sqrt{-1}JZ)\} = 0.$$

Раскрывая скобки, получим

$$\begin{aligned} & K(X, Y)Z - K(X, JY)JZ - K(JX, Y)JZ - K(JX, JY)Z - JK(X, Y)JZ \\ & - JK(X, JY)Z - JK(JX, Y)Z + JK(JX, JY)JZ \\ & - \sqrt{-1}\{K(X, Y)JZ + K(X, JY)Z + K(JX, Y)Z - K(JX, JY)JZ\} \\ & - \{JK(X, Y)Z - JK(X, JY)JZ - JK(JX, Y)JZ - JK(JX, JY)Z\} = 0, \end{aligned}$$

что равносильно равенству нулю вещественной и мнимой частей тождества, т.е.

- 1) $K(X, Y)Z - K(X, JY)JZ - K(JX, Y)JZ - K(JX, JY)Z - JK(X, Y)JZ - JK(X, JY)Z - JK(JX, Y)Z + JK(JX, JY)JZ = 0$,
- 2) $K(X, Y)JZ + K(X, JY)Z + K(JX, Y)Z - K(JX, JY)JZ + JK(X, Y)Z - JK(X, JY)JZ - JK(JX, Y)JZ - JK(JX, JY)Z = 0$,

$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Эти тождества равносильны; второе тождество получается из первого заменой Z на JZ .

Таким образом, $A\mathcal{H}$ -многообразия класса K_0 характеризуются тождеством

$$\begin{aligned} & K(X, Y)Z - K(X, JY)JZ - K(JX, Y)JZ - K(JX, JY)Z - JK(X, Y)JZ \\ & - JK(X, JY)Z - JK(JX, Y)Z + JK(JX, JY)JZ = 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

Аналогично, рассматривая $A\mathcal{H}$ -многообразия классов $K_1 - K_7$, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. 1) $A\mathcal{H}$ -многообразия класса K_0 характеризуются тождеством

$$\begin{aligned} & K(X, Y)Z - K(X, JY)JZ - K(JX, Y)JZ - K(JX, JY)Z - JK(X, Y)JZ \\ & - JK(X, JY)Z - JK(JX, Y)Z + JK(JX, JY)JZ = 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned} \tag{18}$$

2) $A\mathcal{H}$ -многообразия класса K_1 характеризуются тождеством

$$\begin{aligned} & K(X, Y)Z + K(X, JY)JZ - K(JX, Y)JZ + K(JX, JY)Z + JK(X, Y)JZ \\ & - JK(X, JY)Z - JK(JX, Y)Z - JK(JX, JY)JZ = 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned} \tag{19}$$

3) $A\mathcal{H}$ -многообразия класса K_2 характеризуются тождеством

$$K(X, Y)Z - K(X, JY)JZ + K(JX, Y)JZ + K(JX, JY)Z - JK(X, Y)JZ - JK(X, JY)Z + JK(JX, Y)Z - JK(JX, JY)JZ = 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (20)$$

4) $A\mathcal{H}$ -многообразия класса K_3 характеризуются тождеством

$$K(X, Y)Z + K(X, JY)JZ + K(JX, Y)JZ - K(JX, JY)Z - JK(X, Y)JZ + JK(X, JY)Z + JK(JX, Y)Z + JK(JX, JY)JZ = 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (21)$$

5) $A\mathcal{H}$ -многообразия класса K_4 характеризуются тождеством

$$K(X, Y)Z + K(X, JY)JZ + K(JX, Y)JZ - K(JX, JY)Z + JK(X, Y)JZ - JK(X, JY)Z - JK(JX, Y)Z - JK(JX, JY)JZ = 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (22)$$

6) $A\mathcal{H}$ -многообразия класса K_5 характеризуются тождеством

$$K(X, Y)Z - K(X, JY)JZ + K(JX, Y)JZ + K(JX, JY)Z + JK(X, Y)JZ + JK(X, JY)Z - JK(JX, Y)Z + JK(JX, JY)JZ = 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (23)$$

7) $A\mathcal{H}$ -многообразия класса K_6 характеризуются тождеством

$$K(X, Y)Z + K(X, JY)JZ - K(JX, Y)JZ + K(JX, JY)Z + JK(X, Y)JZ - JK(X, JY)Z + JK(JX, Y)Z + JK(JX, JY)JZ = 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (24)$$

8) $A\mathcal{H}$ -многообразия класса K_7 характеризуются тождеством

$$K(X, Y)Z - K(X, JY)JZ - K(JX, Y)JZ - K(JX, JY)Z + JK(X, Y)JZ + JK(X, JY)Z + JK(JX, Y)Z - JK(JX, JY)JZ = 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (25)$$

ТЕОРЕМА 5. Имеют место следующие соотношения включенности:

- 1) $K_4 \supset K_1 = K_2$;
- 2) $K_0 = K_3 = K_5 = K_6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для примера докажем равенство $K_5 = K_6$. Пусть (M, J, g) – $A\mathcal{H}$ -многообразие класса K_5 , т.е. $K^a_{\widehat{bcd}} = 0$. Тогда согласно (16) имеем $K^a_{\widehat{bcd}} = 0$, т.е. $A\mathcal{H}$ -многообразие является многообразием класса K_6 . Обратно, пусть M – $A\mathcal{H}$ -многообразие класса K_6 . Тогда $K^a_{\widehat{bcd}} = 0$, а значит, согласно (16) и $K^a_{\widehat{bcd}} = 0$. Таким образом, классы K_5 и K_6 $A\mathcal{H}$ -многообразий совпадают.

Аналогично доказываются остальные равенства. Докажем включение $K_4 \supset K_1 = K_2$. Пусть (M, J, g) – $A\mathcal{H}$ -многообразие класса K_2 , т.е. имеют место равенства $K^a_{bcd} = K^a_{\widehat{bcd}} = 0$. Согласно свойству (16), 3) имеем

$$K^a_{\widehat{bcd}} + K^a_{cd\widehat{b}} + K^a_{d\widehat{b}c} = 0.$$

Таким образом, $A\mathcal{H}$ -многообразие класса $K_1 = K_2$ является $A\mathcal{H}$ -многообразием класса K_4 , т.е. $K_1 = K_2 \subset K_4$.

Складывая равенства (19) и (20), получим тождество, характеризующее $A\mathcal{H}$ -многообразия класса $K_1 = K_2$:

$$K(X, Y)Z + K(JX, JY)Z + JK(X, Y)JZ - JK(JX, JY)JZ = 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (26)$$

Из равенств (18), (21), (23), (24) получим тождество, характеризующее $A\mathcal{H}$ -многообразия классов $K_0 = K_3 = K_5 = K_6$:

$$K(X, Y)Z + JK(JX, JY)JZ = 0; \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Таким образом, для почти эрмитовых многообразий интерес представляют следующие основные конгармонические инварианты: $K_0 = \overset{(0)}{K}$ с компонен-

тами $\{K_{bcd}^a, K_{\widehat{bcd}}^{\widehat{a}}\}$, $K_1 = \overset{(1)}{K}$ с компонентами $\{K_{bcd}^a, K_{\widehat{bcd}}^{\widehat{a}}\}$, $K_4 = \overset{(4)}{K}$ с компонентами $\{K_{\widehat{bcd}}^a, K_{\widehat{bcd}}^{\widehat{a}}\}$, $K_7 = \overset{(7)}{K}$ с компонентами $\{K_{\widehat{bcd}}^a, K_{\widehat{bcd}}^{\widehat{a}}\}$.

В теории почти эрмитовых структур существует принцип классификации таких структур по дифференциально-геометрическим инвариантам второго порядка (свойствам симметрии тензора Римана–Кристоффеля). В его основу положен принцип, выдвинутый Греем и сформированный в ряде его работ ([5]–[7] и др.), в соответствии с которым ключом к пониманию дифференциально-геометрических свойств келеровых многообразий являются тождества, которым удовлетворяет их тензор римановой кривизны:

$$\begin{aligned} R_1: \quad & \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)JZ, JW \rangle, \\ R_2: \quad & \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(JX, JY)Z, W \rangle + \langle R(JX, Y)JZ, W \rangle + \langle R(JX, Y)Z, JW \rangle, \\ R_3: \quad & \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(JX, JY)JZ, JW \rangle. \end{aligned}$$

$A\mathcal{H}$ -структуры, тензор R которых удовлетворяет тождеству R_i , называются *структурами класса R_i* . Если $\mathcal{S} \subset A\mathcal{H}$ – какой-либо подкласс $A\mathcal{H}$ -структур, то принято обозначение $\mathcal{S} \cap R_i = \mathcal{S}_i$, $i = 1, 2, 3$ [2], [6].

Ввиду этого естественно ожидать, что среди $A\mathcal{H}$ -многообразий по дифференциально-геометрическим и топологическим свойствам наиболее близки к келеровым многообразиям многообразия класса R_1 , затем многообразия класса R_2 и, наконец, многообразия класса R_3 . Многообразия класса R_1 рассматривали Баррос и Рамирес [8], Саваки и Секигава под названием *F-пространств* [9], а также Рицца под названием *паракелеровых многообразий* [10]. Многообразия класса R_3 , или многообразия с J -инвариантным тензором кривизны, называются также *RK-многообразиями*. Наряду с Греем их рассматривали Ванхекке [3], [11], Навейра, Хервелла [12] и другие авторы. Многообразия класса R_2 , пока не имеющие специального наименования, были введены в рассмотрение Греем в связи с изучением приближенно келеровых многообразий ввиду того, что $NK \subset R_2$, и рассматривались Греем и Ванхекке [13], Уотсоном и Ванхекке [14], и другими авторами.

Пусть (M, J, g) – $A\mathcal{H}$ -многообразие размерности $2n$, K – тензор конгармонической кривизны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Многообразие (M, J, g) называется *многообразием класса*:

- 1) $\bar{K}_1$, если $\langle K(X, Y)Z, W \rangle = \langle K(X, Y)JZ, JW \rangle$;

2) $\overline{K}_2$, если

$$\langle K(X, Y)Z, W \rangle = \langle K(JX, JY)Z, W \rangle + \langle K(JX, Y)JZ, W \rangle + \langle K(JX, Y)Z, JW \rangle;$$

3) $\overline{K}_3$, если $\langle K(X, Y)Z, W \rangle = \langle K(JX, JY)JZ, JW \rangle$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из (27) следует, что $A\mathcal{H}$ -многообразия класса $K_0 = K_3 = K_5 = K_6$ являются также многообразиями класса $\overline{K}_3$.

Смысл указанных тождеств кривизны наиболее прозрачно проявляется в терминах спектра тензора конгармонической кривизны.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathcal{S} = (J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – почти эрмитова структура. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $\mathcal{S}$ – структура класса $\overline{K}_3$;
- (2) $K = 0$;
- (3) на пространстве присоединенной G -структуры справедливы тождества $K_{bcd}^a = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{S}$ – структура класса $\overline{K}_3$. Очевидно, это эквивалентно тождеству

$$K(X, Y)Z + JK(JX, JY)JZ = 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

По определению спектра тензора,

$$\begin{aligned} K(X, Y)Z &= \underset{(0)}{K(X, Y)Z} + \underset{(1)}{K(X, Y)Z} + \underset{(2)}{K(X, Y)Z} + \underset{(3)}{K(X, Y)Z} + \underset{(4)}{K(X, Y)Z} \\ &\quad + \underset{(5)}{K(X, Y)Z} + \underset{(6)}{K(X, Y)Z} + \underset{(7)}{K(X, Y)Z}, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \\ J \circ K(JX, JY)JZ &= J \circ \underset{(0)}{K(JX, JY)JZ} + J \circ \underset{(1)}{K(JX, JY)JZ} + J \circ \underset{(2)}{K(JX, JY)JZ} \\ &\quad + J \circ \underset{(3)}{K(JX, JY)JZ} + J \circ \underset{(4)}{K(JX, JY)JZ} + J \circ \underset{(5)}{K(JX, JY)JZ} \\ &\quad + J \circ \underset{(6)}{K(JX, JY)JZ} + J \circ \underset{(7)}{K(JX, JY)JZ} \\ &= \underset{(0)}{K(X, Y)Z} - \underset{(1)}{K(X, Y)Z} - \underset{(2)}{K(X, Y)Z} - \underset{(3)}{K(X, Y)Z} - \underset{(4)}{K(X, Y)Z} \\ &\quad - \underset{(5)}{K(X, Y)Z} - \underset{(6)}{K(X, Y)Z} - \underset{(7)}{K(X, Y)Z}, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

Складывая почленно эти тождества, получим

$$K(X, Y)Z + JK(JX, JY)JZ = 2 \left\{ \underset{(0)}{K(X, Y)Z} + \underset{(3)}{K(X, Y)Z} + \underset{(5)}{K(X, Y)Z} + \underset{(6)}{K(X, Y)Z} \right\}.$$

Значит, тождество $K(X, Y)Z + JK(JZ, JY)JZ = 0$ равносильно тому, что

$$\underset{(0)}{K(X, Y)Z} + \underset{(3)}{K(X, Y)Z} + \underset{(5)}{K(X, Y)Z} + \underset{(6)}{K(X, Y)Z} = 0.$$

А это тождество равносильно тождествам $\underset{(0)}{K} = \underset{(3)}{K} = \underset{(5)}{K} = \underset{(6)}{K} = 0$. Согласно предложению 1 полученные тождества на пространстве присоединенной G -структуры равносильны соотношениям

$$K^a_{bcd} = K^a_{\widehat{bcd}} = K^a_{\widehat{bcd}} = K^a_{\widehat{bcd}} = 0.$$

В силу вещественности тензора K и его свойств (16) полученные соотношения равносильны соотношению $K^a_{bcd} = 0$, т.е. тождеству $\underset{(0)}{K}(X, Y)Z = 0$. Обратное, согласно (27), очевидно.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\mathcal{S} = (J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – почти эрмитова структура. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $\mathcal{S}$ – структура класса $\overline{K}_2$;
- (2) $\underset{(0)}{K} = \underset{(7)}{K} = 0$;
- (3) на пространстве присоединенной G -структуры справедливы тождества

$$K^a_{bcd} = K^a_{\widehat{b}\widehat{c}\widehat{d}} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{S}$ – структура класса $\overline{K}_2$. Перепишем тождество $\overline{K}_2$ в следующем виде. Каждое слагаемое этого тождества распишем согласно определению спектра тензора:

- 1) $K(X, Y)Z = \underset{(0)}{K}(X, Y)Z + \underset{(1)}{K}(X, Y)Z + \underset{(2)}{K}(X, Y)Z + \underset{(3)}{K}(X, Y)Z + \underset{(4)}{K}(X, Y)Z + \underset{(5)}{K}(X, Y)Z + \underset{(6)}{K}(X, Y)Z + \underset{(7)}{K}(X, Y)Z$;
- 2) $K(JX, JY)Z = \underset{(0)}{K}(JX, JY)Z + \underset{(1)}{K}(JX, JY)Z + \underset{(2)}{K}(JX, JY)Z + \underset{(3)}{K}(JX, JY)Z + \underset{(4)}{K}(JX, JY)Z + \underset{(5)}{K}(JX, JY)Z + \underset{(6)}{K}(JX, JY)Z + \underset{(7)}{K}(JX, JY)Z$
 $= -\underset{(0)}{K}(X, Y)Z + \underset{(1)}{K}(X, Y)Z + \underset{(2)}{K}(X, Y)Z - \underset{(3)}{K}(X, Y)Z - \underset{(4)}{K}(X, Y)Z + \underset{(5)}{K}(X, Y)Z + \underset{(6)}{K}(X, Y)Z - \underset{(7)}{K}(X, Y)Z$;
- 3) $K(JX, JY)JZ = \underset{(0)}{K}(JX, JY)JZ + \underset{(1)}{K}(JX, JY)JZ + \underset{(2)}{K}(JX, JY)JZ + \underset{(3)}{K}(JX, JY)JZ + \underset{(4)}{K}(JX, JY)JZ + \underset{(5)}{K}(JX, JY)JZ + \underset{(6)}{K}(JX, JY)JZ + \underset{(7)}{K}(JX, JY)JZ$
 $= -\underset{(0)}{K}(X, Y)Z - \underset{(1)}{K}(X, Y)Z + \underset{(2)}{K}(X, Y)Z + \underset{(3)}{K}(X, Y)Z + \underset{(4)}{K}(X, Y)Z + \underset{(5)}{K}(X, Y)Z - \underset{(6)}{K}(X, Y)Z - \underset{(7)}{K}(X, Y)Z$;
- 4) $JK(JX, Y)Z = J \circ \underset{(0)}{K}(JX, Y)Z + J \circ \underset{(1)}{K}(JX, Y)Z + J \circ \underset{(2)}{K}(JX, Y)Z + J \circ \underset{(3)}{K}(JX, Y)Z + J \circ \underset{(4)}{K}(JX, Y)Z + J \circ \underset{(5)}{K}(JX, Y)Z + J \circ \underset{(6)}{K}(JX, Y)Z + J \circ \underset{(7)}{K}(JX, Y)Z$
 $= -\underset{(0)}{K}(X, Y)Z - \underset{(1)}{K}(X, Y)Z + \underset{(2)}{K}(X, Y)Z + \underset{(3)}{K}(X, Y)Z - \underset{(4)}{K}(X, Y)Z - \underset{(5)}{K}(X, Y)Z + \underset{(6)}{K}(X, Y)Z + \underset{(7)}{K}(X, Y)Z$.

Подставив эти разложения в предыдущее равенство, получим

$$\begin{aligned} K(X, Y)Z - K(JX, JY)Z - K(JX, Y)JZ + JK(JX, Y)Z \\ = 2 \left\{ K_{(0)}(X, Y)Z + K_{(3)}(X, Y)Z - K_{(5)}(X, Y)Z + K_{(6)}(X, Y)Z + K_{(7)}(X, Y)Z \right\} = 0. \end{aligned}$$

Это тождество равносильно тому, что

$$K_{(0)}(X, Y)Z = K_{(3)}(X, Y)Z = K_{(5)}(X, Y)Z = K_{(6)}(X, Y)Z = K_{(7)}(X, Y)Z = 0.$$

А эти тождества на пространстве присоединенной G -структуры равносильны тождествам

$$K^a{}_{bcd} = K^a{}_{\widehat{bcd}} = K^a{}_{\widehat{bcd}} = K^a{}_{\widehat{bcd}} = K^a{}_{\widehat{bcd}} = 0.$$

В силу вещественности тензора K и его свойств (16), полученные соотношения равносильны соотношениям: $K^a{}_{bcd} = K^a{}_{\widehat{bcd}} = 0$, т.е. тождествам $K_{(0)}(X, Y)Z = K_{(7)}(X, Y)Z = 0$.

Обратно, пусть для $A\mathcal{H}$ -многообразия выполнены тождества

$$K_{(0)}(X, Y)Z = 0, \quad K_{(7)}(X, Y)Z = 0.$$

Тогда из (18) и (25) имеем

$$K(X, Y)Z - K(X, JY)JZ - K(JX, Y)JZ - K(JX, JY)Z = 0,$$

т.е.

$$K(X, Y)Z = K(JX, Y)JZ + K(JX, JY)Z + K(X, JY)JZ.$$

В полученное тождество вместо $K(X, JY)JZ$ поставим значение, полученное из (25) заменой $Y \rightarrow JY$ и $Z \rightarrow JZ$, т.е. $K(X, JY)JZ = -JK(JX, Y)Z$. Тогда

$$K(X, Y)Z = K(JX, JY)Z + K(JX, Y)JZ - JK(JX, Y)Z,$$

откуда вытекает, что

$$\langle K(X, Y)Z, W \rangle = \langle K(JX, JY)Z, W \rangle + \langle K(JX, Y)JZ, W \rangle + \langle K(JX, Y)Z, JW \rangle,$$

$X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. Таким образом, многообразие удовлетворяет тождеству $\overline{K}_2$.

Аналогично доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\mathcal{S} = (J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – почти эрмитова структура. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $\mathcal{S}$ – структура класса $\overline{K}_1$;
- (2) $K_{(0)} = K_{(4)} = K_{(7)} = 0$;
- (3) на пространстве присоединенной G -структуры справедливы тождества $K^a{}_{bcd} = K^a{}_{\widehat{bcd}} = K^a{}_{\widehat{bcd}} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Справедливы следующие включения классов: $\overline{K}_1 \subset \overline{K}_2 \subset \overline{K}_3$.

В качестве примера рассмотрим конгармонические инварианты приближенно келеровых структур (см. определение 2).

ТЕОРЕМА 9 [2]. *Почти эрмитова структура (J, g) на многообразии M является приближенно келеровой тогда и только тогда, когда на M справедливы тождества*

- 1) $B(X, Y) = 0$;
- 2) $C(X, Y) + C(Y, X) = 0, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

причем эта структура является келеровой тогда и только тогда, когда

$$B(X, Y) = C(X, Y) = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

На пространстве присоединенной G -структуры условие приближенной келеровости равносильно следующим:

- 1) $B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0$;
- 2) $B^{[abc]} = B^{abc} = C^{abc}$;
- 3) $B_{[abc]} = B_{abc} = C_{abc}$.

Пусть $(M, J, g) - N\mathcal{K}$ -многообразие размерности $2n$, K – тензор конгармонической кривизны. Напомним [2], что компоненты тензора Римана–Кристоффеля на пространстве присоединенной G -структуры имеют вид

$$\begin{aligned} 1) \quad R^a_{bcd} &= R^a_{\widehat{bcd}} = 0; & 2) \quad R^a_{bcd} &= -R^a_{\widehat{bdc}} = A^{ad}_{bc} - B^{adh}B_{hbc}; \\ 3) \quad R^{\widehat{a}}_{bcd} &= R^{\widehat{a}}_{\widehat{bcd}} = 0; & 4) \quad R^{\widehat{a}}_{bcd} &= -R^{\widehat{a}}_{\widehat{bdc}} = -A^{ad}_{bc} + B^{bdh}B_{hac}; \\ 5) \quad R^a_{bcd} &= R^a_{\widehat{bcd}} = 0; & 6) \quad R^a_{bcd} &= 2B^{abh}B_{hcd}; \\ 7) \quad R^{\widehat{a}}_{bcd} &= 0; & 8) \quad R^{\widehat{a}}_{bcd} &= R^{\widehat{a}}_{\widehat{bcd}} = 0; \\ 9) \quad R^{\widehat{a}}_{\widehat{bcd}} &= 2B^{cdh}B_{hab}; & 10) \quad R^{\widehat{a}}_{bcd} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

А компоненты тензора Риччи S на пространстве присоединенной G -структуры имеют вид

$$1) \quad S_{ab} = 0; \quad 2) \quad S_{\widehat{ab}} = 0; \quad 3) \quad S_{\widehat{ab}} = S_{b\widehat{a}} = A^{ac}_{bc} + 3B^{ach}B_{bch}. \quad (29)$$

Наконец, скалярная кривизна χ приближенно келерова многообразия на пространстве присоединенной G -структуры вычисляется по формуле

$$\chi = 2A^{ab}_{ab} + 6B^{abc}B_{abc}. \quad (30)$$

Вычислим компоненты тензора конгармонической кривизны на пространстве присоединенной G -структуры для $N\mathcal{K}$ -многообразия. В терминах его ковариантных компонент формулу (17) запишем в виде

$$K_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{2n-2}(g_{ik}S_{jl} + g_{jl}S_{ik} - g_{il}S_{jk} - g_{jk}S_{il}). \quad (31)$$

С учетом (28)–(30) находим, что на пространстве присоединенной G -структуры соотношения (31) принимают вид

$$\begin{aligned} 1) \quad K_{\widehat{abcd}} &= A^{ad}_{bc} - B^{adh}B_{hdc} - \frac{1}{2(n-1)}(\delta^a_c S^d_b + \delta^d_b S^a_c); \\ 2) \quad K_{ab\widehat{cd}} &= 2B^{cdh}B_{abh} - \frac{1}{2(n-1)}(\delta^c_a S^d_b + \delta^d_b S^c_a - \delta^d_a S^c_b - \delta^c_b S^d_a), \end{aligned} \quad (32)$$

плюс соотношения, полученные с учетом вещественности и свойств симметрии этого тензора как алгебраического тензора кривизны. Остальные компоненты тензора конгармонической кривизны равны нулю.

Таким образом, из сказанного вытекает, что для $N\mathcal{H}$ -многообразия не более двух из основных конгармонических инвариантов могут быть отличны от нуля, а именно, конгармонические инварианты $K_1 = \underset{(1)}{K} = -\underset{(2)}{K}$ с компонентами $\{K^a_{bcd}, K^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}\}$ и $K_2 = \underset{(4)}{K}$ с компонентами $\{K^a_{\hat{b}cd}, K^{\hat{a}}_{b\hat{c}\hat{d}}\}$. В частности, из теорем 6–8 вытекает

ТЕОРЕМА 10. *$N\mathcal{H}$ -многообразие принадлежит классам $\overline{K}_2$ и $\overline{K}_3$, а классу $\overline{K}_1$ оно принадлежит тогда и только тогда, когда инвариант $K_2 = \underset{(4)}{K}$ равен нулю.*

Естественно назвать $A\mathcal{H}$ -структуру, у которой $\overline{K}_2 = 0$, *конгармонически-параке-леровой*. Согласно (32) и (28), 9) условие $\overline{K}_2 = 0$ равносильно тому, что

$$B^{cdh}B_{abh} = \frac{1}{4(n-1)}(\delta_a^c S_b^d + \delta_b^d S_a^c - \delta_a^d S_b^c - \delta_b^c S_a^d). \quad (33)$$

Свернем это соотношение по индексам b и d :

$$B^{cbh}B_{abh} = \frac{1}{4(n-1)}\left\{(n-2)S_a^c + \frac{1}{2}\chi\delta_a^c\right\}. \quad (34)$$

Но согласно (28)

$$S_{\hat{a}b} = S_{b\hat{a}} = S_b^a = A_{bh}^{ah} + 3B^{adh}B_{bdh}.$$

Поэтому, свертывая (34), получим, что

$$B = \frac{n-2}{8(n-1)}\chi + \frac{n}{8(n-1)}\chi = \frac{1}{4}\chi.$$

Поскольку, согласно (30), $\chi = 6\beta + 2\alpha$, имеем отсюда

$$1) \quad \alpha = -\beta; \quad 2) \quad \chi = 4\beta. \quad (35)$$

Здесь

$$A_c^b = A_{ac}^{bc}, \quad \alpha = A_{ab}^{ab}, \quad B_a^b = B^{bch}B_{ach}, \quad \beta = B^{abc}B_{abc} = \sum_{a,b,c=1}^n |B_{abc}|^2 \geq 0.$$

Заметим, что, с учетом (34)

$$S_a^c = \frac{4(n-1)}{n-2}B_a^c - \frac{2\beta}{n-2}\delta_a^c. \quad (36)$$

Известно ([2; с. 398], см. также [14]), что $\beta = \text{const}$, ввиду чего справедлива

ТЕОРЕМА 11. *Конгармонически-паракелерово $N\mathcal{H}$ -многообразие является многообразием постоянной неотрицательной скалярной кривизны. При этом оно является многообразием нулевой скалярной кривизны тогда и только тогда, когда оно келерово.*

ТЕОРЕМА 12. *Келерово многообразие размерности свыше четырех конгармонически-паракелерово тогда и только тогда, когда оно риччи-плоско.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – келерово конгармонически-паракелерово многообразие размерности свыше четырех. Согласно (36) $S = 0$, т.е. M риччи-плоско. Обратно, если M риччи-плоско, то согласно (32), 2) $K_{ab\hat{c}\hat{d}} = 0$, т.е. M – конгармонически-паракелерово многообразие.

ТЕОРЕМА 13. *Четырехмерное келерово многообразие конгармонически-паракелерово тогда и только тогда, когда оно является многообразием нулевой скалярной кривизны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – четырехмерное келерово конгармонически-паракелерово многообразие. Согласно (35), 2) его скалярная кривизна равна нулю. Обратно, пусть $\chi = 0$. Тогда $S_c^c = 0$. Поскольку $n = 2$, мы прямым подсчетом убеждаемся, что это соотношение равносильно тождеству

$$\delta_a^c S_b^d + \delta_b^d S_a^c - \delta_a^d S_b^c - \delta_b^c S_a^d = 0,$$

и в силу (32), 2) $K_{ab\hat{c}\hat{d}} = 0$, т.е. M – конгармонически-паракелерово многообразие.

Назовем риманово многообразие *конгармонически-плоским*, если его тензор конгармонической кривизны K тождественно равен нулю.

ТЕОРЕМА 14. *$N\mathcal{K}$ -многообразие конгармонически плоско тогда и только тогда, когда его инвариант K_1 тождественно равен нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, если $N\mathcal{K}$ -многообразие M конгармонически-плоско, то $K_1 = 0$. Обратно, пусть $K_1 = 0$. Тогда $K_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = 0$. Из тождества Риччи следует, что в этом случае $K_{ab\hat{c}\hat{d}} = 0$, а значит, $K_2 = 0$. Следовательно, $K = 0$, т.е. $N\mathcal{K}$ -многообразие M конгармонически плоско.

ТЕОРЕМА 15. *$N\mathcal{K}$ -многообразие конгармонически плоско тогда и только тогда, когда*

$$B^{adh} B_{hbc} = \frac{1}{n-1} (\delta_{[b}^a S_{c]}^d), \quad A_{bc}^{ad} = \frac{1}{n-1} (\delta_{(b}^a S_{c)}^d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом (32), 1) получаем, что $N\mathcal{K}$ -многообразие M конгармонически-плоско тогда и только тогда, когда

$$A_{bc}^{ad} - B^{adh} B_{bch} = \frac{1}{2(n-1)} (\delta_c^a S_b^d + \delta_b^d S_c^a).$$

Альтернируя и симметризуя это соотношение, получим, соответственно:

$$B^{adh} B_{hbc} = \frac{1}{n-1} (\delta_{[b}^a S_{c]}^d), \quad A_{bc}^{ad} = \frac{1}{n-1} (\delta_{(b}^a S_{c)}^d).$$

Очевидно, эти соотношения равносильны конгармонической плоскости многообразия.

СЛЕДСТВИЕ. *Конгармонически-плоское келерово многообразие M размерности свыше четырех локально голоморфно изометрично комплексному евклидову пространству $\mathbb{C}^n$, снабженному канонической келеровой структурой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это сразу же следует из того, что конгармонически плоское келерово многообразие является конгармонически-паракелеровым и по теореме 12 многообразие M риччи-плоское, т.е. $S = 0$. В силу теоремы 14 $A_{bc}^{ad} = 0$ и в силу (28) $R = 0$. Следовательно, келерово многообразие M локально голоморфно изометрично комплексному евклидову пространству $\mathbb{C}^n$, снабженному канонической келеровой структурой.

Пусть, наконец, M – собственное $N\mathcal{K}$ -многообразие (с необходимостью размерности большей четырех). Согласно [2; с. 368] для него справедливо тождество

$$A_a^d B_{bcd} - A_b^d B_{acd} - 4B_c^d B_{abd} = 0. \quad (37)$$

С другой стороны, согласно (29) $A_a^b = S_a^b - 3B_a^b$ и с учетом (36),

$$A_a^b = \frac{n+2}{n-2} B_a^b - \frac{2\beta}{n-2} \delta_a^b. \quad (38)$$

Подставим (38) в (37):

$$(n+2)(B_a^d B_{bcd} - B_b^d B_{acd}) - 4(n-2)B_c^d B_{abd} = 4\beta B_{abc}. \quad (39)$$

Заметим, что из соотношения $\bar{B}_{abc} = B^{abc}$ вытекает, что $\bar{B}_a^b = B_b^a$, а значит, существует A -репер, в котором $B_a^b = B_a \delta_a^b$ для подходящих функций B_a . Заметим также, что в силу собственности $N\mathcal{K}$ -структуры найдутся a, b, c такие, что $B_{abc} \neq 0$, ввиду чего соотношение (39) равносильно следующему:

$$(n+2)(B_a + B_b) - 4(n-2)B_c = 4\beta. \quad (40)$$

В силу равноправия индексов a, b, c к соотношениям (40) можно добавить два соотношения, полученные циклическими перестановками этих индексов. Эти три соотношения образуют систему линейных уравнений на неизвестные B_a, B_b, B_c с ненулевым определителем. Заметим, что поскольку эти неизвестные входят в систему равноправно, $B_a = B_b = B_c$. С учетом (40) находим, что

$$x = B_a = B_b = B_c = \frac{2\beta}{6-n}. \quad (41)$$

Заметим также, что эрмитова форма $b(X, Y) = B_a^c X^a Y_c$ положительно полуопределена, поскольку

$$b(X, X) = B_a^b X^a X_b = B^{bcd} B_{acd} X^a X_b = \sum_{c,d} |B_{acd} X^a|^2 \geq 0,$$

а значит, $x \geq 0$. Но тогда из (41) вытекает, что $n < 6$. Кроме того, поскольку $N\mathcal{K}$ -структура собственная, то $n \geq 3$. Следовательно, $n = 5$ либо $n = 4$, либо $n = 3$. Но поскольку

$$\beta = \sum_{d=1}^n B_d \geq B_a + B_b + B_c = 3x,$$

с учетом (41) получаем, что

$$x = \frac{2\beta}{6-n} \geq \frac{6x}{6-n},$$

откуда получаем, что $n < 0$. Полученное противоречие показывает, что собственное $N\mathcal{H}$ -многообразие не может быть конгармонически-паракелеровым.

Соберем полученные данные:

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Всякое четырехмерное $N\mathcal{H}$ -многообразие конгармонически-паракелерово тогда и только тогда, когда оно является многообразием нулевой скалярной кривизны. Всякое $N\mathcal{H}$ -многообразие размерности свыше четырех конгармонически-паракелерово тогда и только тогда, когда оно является риччи-плоским келеровым многообразием. Всякое $N\mathcal{H}$ -многообразие размерности свыше четырех конгармонически плоско тогда и только тогда, когда оно локально голоморфно изометрично пространству $\mathbb{C}^n$, снабженному канонической келеровой структурой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Y. Ishii, "On conharmonic transformations", *Tensor (N.S.)*, **7:2** (1957), 73–80.
- [2] В. Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, МПГУ, М., 2003.
- [3] L. Vanhecke, "Almost Hermitian manifolds with J -invariant Riemann curvature tensor", *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, **34** (1975/76), 487–498.
- [4] A. Gray, "Six dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products", *Tôhoku Math. J. (2)*, **21:4** (1969), 614–620.
- [5] A. Gray, "Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds", *Tôhoku Math. J.*, **28:4** (1976), 601–612.
- [6] A. Gray, "Nearly Kähler manifolds", *J. Differential Geometry*, **4:3** (1970), 283–309.
- [7] A. Gray, "The structures of nearly Kähler manifolds", *Math. Ann.*, **223:3** (1976), 233–248.
- [8] M. Barros, A. Ramírez, "Decomposition of quasi-Kähler manifolds which satisfy the first curvature condition", *Demonstratio Math.*, **11:3** (1978), 685–694.
- [9] S. Sawaki, K. Sekigawa, "Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature", *J. Differential Geometry*, **9** (1974), 123–134.
- [10] G. B. Rizza, "Varietá parakähleriane", *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **98:1** (1974), 47–61.
- [11] L. Vanhecke, "Some almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature", *J. Differential Geometry*, **12:4** (1977), 461–471.
- [12] A. M. Naveira, L. M. Hervella, *Quasi-Kähler manifolds*, Preprint, 1975.
- [13] A. Gray, L. Vanhecke, "Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature", *Časopis Pěst. Mat.*, **104:2** (1979), 170–179.
- [14] B. Watson, L. Vanhecke, " K_1 -curvatures and almost Hermitian submersions", *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, **36** (1977/78), 205–224.
- [15] V. F. Kirichenko, "Generalized quasi-Kählerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry, II", *Geom. Dedicata*, **52:1** (1994), 53–85.

В. Ф. Кириченко

Московский педагогический государственный университет

E-mail: highgeom@yandex.ru

Поступило

22.07.2009

А. Р. Рустанов

Московский педагогический государственный университет

E-mail: aligadzhi@yandex.ru

А. Шихаб

Московский педагогический государственный университет

E-mail: ali.abd82@yahoo.com