Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Кожанов, О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 2, 254–268

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8626>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:59:36

УДК 517.946

О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка

А. И. Кожанов

Настоящая работа представляет собой исследование разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач с граничным условием Самарского с переменными коэффициентами для линейных гиперболических уравнений второго порядка в одномерном случае. В случае граничных условий с постоянными коэффициентами для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x)u = f(x, t)$$

подобные задачи изучались ранее другими авторами, причем существенным моментом в их работе было использование метода Фурье, что и диктовало специальный вид уравнения, а также постоянство коэффициентов граничных условий. Используемый метод позволяет избавиться от подобных ограничений и рассмотреть более общие задачи.

Библиография: 8 названий.

Введение. Настоящая работа является продолжением работы автора [1] и представляет собой исследование разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач с граничным условием Самарского с переменными коэффициентами для линейных гиперболических уравнений второго порядка в одномерном случае. В случае граничных условий с постоянными коэффициентами для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x)u = f(x, t)$$

подобные задачи изучались ранее в работе [2]. Существенным моментом в этой работе было использование метода Фурье, что и диктовало специальный вид уравнения, а также постоянство коэффициентов граничных условий. Использование метода [1] позволит избавиться от подобных ограничений и рассмотреть более общие задачи.

Заметим, что рассматриваемые ниже задачи, помимо самостоятельного интереса, представляют собой интерес и с точки зрения исследования разрешимости обратных коэффициентных задач для гиперболических уравнений (см. дополнение).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00422а), и аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала” (проект АХ-23/11 пр. от 12 декабря 2008 г., регистрационный номер 2.1.1/13607).

1. Постановка задач. Пусть Ω – интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q – прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$. Далее, пусть $c(x, t)$, $f(x, t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ суть заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1.1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u_x(0, t) = \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (1.3)$$

$$u_x(1, t) = \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (1.4)$$

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$u(0, t) = \alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (1.5)$$

$$u(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (1.6)$$

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА III. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$u_x(0, t) = \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (1.7)$$

$$u_x(1, t) = \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (1.8)$$

Уточним, что в рассматриваемых задачах предполагается, что функция

$$\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)$$

может обращаться в нуль (в том числе и тождественно) на отрезке $[0, T]$.

2. Разрешимость краевой задачи I. Определим пространства V_0 , V_1 , W_0 и W_1 :

$$V_0 = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)),$$

$$v_t(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), v_{tt}(x, t) \in L_2(Q)\},$$

$$V_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega)),$$

$$v_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), v_{tt}(x, t) \in L_2(Q)\},$$

$$W_0 = \{v(x, t) : v(x, t) \in V_0, v_x(x, t) \in V_0\},$$

$$W_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in V_1, v_x(x, t) \in V_1\};$$

нормы в этих пространствах определим естественным образом:

$$\|v\|_{V_0} = \|v\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)},$$

$$\|v\|_{V_1} = \|v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)},$$

$$\|v\|_{W_0} = \|v\|_{V_0} + \|v_x\|_{V_0},$$

$$\|v\|_{W_1} = \|v\|_{V_1} + \|v_x\|_{V_1}.$$

Определим функции, которые понадобятся ниже. Пусть ν_0 – число из отрезка $[0, 1]$. Положим

$$a_i(x, t) = \frac{\beta_i(t) - \alpha_i(t)}{2}(x - \nu_0)^2 + [\nu_0\beta_i(t) + (1 - \nu_0)\alpha_i(t)](x - \nu_0), \quad i = 1, 2,$$

$$\Delta(t) = [1 - a_1(0, t)][1 - a_2(1, t)] - a_1(1, t)a_2(0, t),$$

$$b_1(x, t) = \frac{1}{\Delta(t)}\{a_1(x, t)[1 - a_2(1, t)] + a_2(x, t)a_1(1, t)\},$$

$$b_2(x, t) = \frac{1}{\Delta(t)}\{a_1(x, t)a_2(0, t) + a_2(x, t)[1 - a_1(0, t)]\},$$

$$A_1(x, t) = \{b_2(x, t)b_1(1, t) - b_1(x, t)[1 + b_2(1, t)]\}\Delta(t),$$

$$A_2(x, t) = \{b_1(x, t)b_2(0, t) - b_2(x, t)[1 + b_1(0, t)]\}\Delta(t).$$

Далее, пусть ξ есть вектор $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ из пространства $\mathbb{R}^4$. Определим линейные формы $\Phi_1(t, \xi)$, $\Phi_2(t, \xi)$ и $\Phi(x, t, \xi)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \xi) = & -2b_{1t}(0, t)\xi_1 - 2b_{2t}(0, t)\xi_2 + [b_{1xx}(0, t) - b_{1tt}(0, t) - c(0, t)b_1(0, t) - c(0, t)]\xi_3 \\ & + [b_{2xx}(0, t) - b_{2tt}(0, t) - c(0, t)b_2(0, t)]\xi_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t, \xi) = & -2b_{1t}(1, t)\xi_1 - 2b_{2t}(1, t)\xi_2 + [b_{1xx}(1, t) - b_{1tt}(1, t) - c(1, t)b_1(1, t)]\xi_3 \\ & + [b_{2xx}(1, t) - b_{2tt}(1, t) - c(1, t)b_2(1, t) - c(1, t)]\xi_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, t, \xi) = & A_1(x, t)\Phi_1(t, \xi) + A_2(x, t)\Phi_2(t, \xi) - 2b_{1t}(x, t)\xi_1 - 2b_{2t}(x, t)\xi_2 \\ & + [b_{1xx}(x, t) - b_{1tt}(x, t) - c(x, t)b_1(x, t)]\xi_3 \\ & + [b_{2xx}(x, t) - b_{2tt}(x, t) - c(x, t)b_2(x, t)]\xi_4. \end{aligned}$$

Наконец, определим функцию $\tilde{f}(x, t)$:

$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) + A_1(x, t)f(0, t) + A_2(x, t)f(1, t).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия

$$c(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad \alpha_i(t) \in C^2([0, T]), \quad \beta_i(t) \in C^2([0, T]), \quad i = 1, 2; \quad (2.1)$$

$$|\Delta(t)| \geq \delta_0 > 0 \quad \text{при } t \in [0, T]; \quad (2.2)$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_x(x, t) \in L_2(Q). \quad (2.3)$$

Тогда краевая задача **I** имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\overline{w}(t) = (w_t(0, t), w_t(1, t), w(0, t), w(1, t)).$$

Рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$w_{tt} - w_{xx} + c(x, t)w = \tilde{f}(x, t) + A_1(x, t)w_{xx}(0, t) + A_2(x, t)w_{xx}(1, t) + \Phi(x, t, \overline{w}(t)) \quad (2.4)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.5)$$

$$w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (2.6)$$

Данная задача представляет собой начально-краевую задачу для так называемого “нагруженного” [3], [4] гиперболического уравнения; разрешимость ее установим с помощью метода регуляризации и метода продолжения по параметру.

Пусть ε – положительное число, λ – число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим семейство начально-краевых задач: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} + c(x, t)w - \varepsilon w_{xxt} \\ = \tilde{f}(x, t) + \lambda[A_1(x, t)w_{xx}(0, t) + A_2(x, t)w_{xx}(1, t) + \Phi(x, t, \bar{w}(t))] \end{aligned} \quad (2.4_{\varepsilon, \lambda})$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.5) и (2.6). Покажем прежде всего, что для фиксированного ε краевая задача (2.4_{ε, λ}) (2.5), (2.6) при выполнении условий (2.1)–(2.3) разрешима в пространстве W_1 для всех чисел λ из отрезка $[0, 1]$.

Как обычно это делается при применении метода продолжения по параметру; обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых краевая задача (2.4_{ε, λ}), (2.5), (2.6) при выполнении условий теоремы разрешима в требуемом пространстве. Если мы покажем, что это множество не пусто, одновременно открыто и замкнуто, то получим, что оно будет совпадать со всем отрезком $[0, 1]$. Совпадение множества Λ со всем отрезком $[0, 1]$ и даст разрешимость краевой задачи (2.4_{ε, λ}), (2.5), (2.6) при фиксированном ε и всех λ из отрезка $[0, 1]$.

Тот факт, что множество Λ не пусто, очевиден, поскольку число 0 принадлежит ему – см. [5].

Открытость и замкнутость множества Λ устанавливаются с помощью априорных оценок. Покажем их наличие.

Положим

$$F = \tilde{f}(x, t) + \lambda[A_1(x, t)w_{xx}(0, t) + A_2(x, t)w_{xx}(1, t) + \Phi(x, t, \bar{w})].$$

Пусть γ – фиксированное положительное число, величина которого будет уточнена ниже. Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} (w_{x\tau\tau} - w_{xxx} + cw_x + c_x w - \varepsilon w_{xxt\tau}) \left[w_{x\tau} - \left(x - \frac{1}{2} \right) w_{xx} - \varepsilon \gamma w_{xxt\tau} \right] dx d\tau \\ = \int_0^t \int_{\Omega} F_x \left[w_{x\tau} - \left(x - \frac{1}{2} \right) w_{xx} - \varepsilon \gamma w_{xxt\tau} \right] dx d\tau. \end{aligned}$$

Из него вытекает следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} [w_{xt}^2(x, t) + w_{xx}^2(x, t)] dx + \frac{\gamma\varepsilon}{2} \int_{\Omega} [w_{xt}^2(x, t) + w_{xx}^2(x, t)] dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxt}^2 dx d\tau \\ + \gamma\varepsilon^2 \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxt\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{4} \int_0^t [w_{xx}^2(0, \tau) + w_{xx}^2(1, \tau)] d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\lambda\gamma\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} [A_{1x}(x, \tau)w_{xx}(0, \tau) + A_{2x}(x, \tau)w_{xx}(1, \tau)]w_{xxx\tau} dx d\tau \\
&\quad + \int_{\Omega} \left(x - \frac{1}{2}\right) w_{xt}(x, t)w_{xx}(x, t) dx \\
&\quad + \int_0^t \int_{\Omega} [\tilde{f}_x - cw_x - c_x w + \lambda\Phi_x] \left[w_{x\tau} - \left(x - \frac{1}{2}\right)w_{xx} - \gamma\varepsilon w_{xxx\tau} \right] dx d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} [w_{x\tau}^2 + w_{xx}^2] dx d\tau - \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} \left(x - \frac{1}{2}\right) w_{xx}w_{xxx\tau} dx d\tau \\
&\quad + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} [A_{1x}(x, \tau)w_{xx}(0, \tau) + A_{2x}(x, \tau)w_{xx}(1, \tau)] \left[w_{x\tau} - \left(x - \frac{1}{2}\right)w_{xx} \right] dx d\tau.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Первое слагаемое правой части равенства (2.7) оценим с помощью неравенства Юнга:

$$\begin{aligned}
&\left| \lambda\gamma\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} [A_{1x}(x, \tau)w_{xx}(0, \tau) + A_{2x}(x, \tau)w_{xx}(1, \tau)]w_{xxx\tau} dx d\tau \right| \\
&\leq \frac{\gamma\varepsilon^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2 dx d\tau + \gamma \max_{\bar{Q}} [A_{1x}^2(x, t)] \int_0^t w_{xx}^2(0, \tau) d\tau \\
&\quad + \gamma \max_{\bar{Q}} [A_{2x}^2(x, t)] \int_0^t w_{xx}^2(1, \tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Для второго слагаемого правой части (2.7) имеет место оценка

$$\left| \int_{\Omega} \left(x - \frac{1}{2}\right) w_{xt}(x, t)w_{xx}(x, t) dx \right| \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} w_{xt}^2(x, t) dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} w_{xx}^2(x, t) dx. \tag{2.9}$$

Далее, используя неравенство Юнга и элементарные неравенства вложения, нетрудно показать, что оставшиеся слагаемые правой части равенства (2.7) оцениваются сверху величиной

$$\begin{aligned}
&\delta \left[\gamma\varepsilon^2 \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t [w_{xx}^2(0, \tau) + w_{xx}^2(1, \tau)] d\tau \right] \\
&\quad + K_1 \left[\int_0^t \int_{\Omega} [w_{xx}^2 + w_{x\tau}^2] dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} (f^2 + f_x^2) dx d\tau \right]
\end{aligned}$$

с произвольным положительным числом δ и числом K_1 , определяющимися функциями $c(x, t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$, а также числами δ и γ .

Выберем число γ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\gamma \max \left\{ \max_{\bar{Q}} [A_{1x}^2(x, t)], \max_{\bar{Q}} [A_{2x}^2(x, t)] \right\} < \frac{1}{4}.$$

Зафиксировав указанным образом число γ , используя неравенства (2.8) и (2.9), а также подбирая число δ достаточно малым, нетрудно теперь получить, что следствием равенства (2.7) будет неравенство

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} [w_{xt}^2(x, t) + w_{xx}^2(x, t)] dx + \varepsilon \int_{\Omega} [w_{xxt}^2(x, t) + w_{xxx}^2(x, t)] dx \\
&\quad + \varepsilon^2 \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t [w_{xx}^2(0, \tau) + w_{xx}^2(1, \tau)] d\tau
\end{aligned}$$

$$\leq K_2 \left[\int_0^t \int_{\Omega} (w_{x\tau}^2 + w_{xx}^2) dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} (f^2 + f_x^2) dx dt \right], \quad (2.10)$$

в котором число K_2 определяется лишь функциями $c(x, t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$. Из (2.10) с помощью леммы Гронуолла нетрудно получить первую априорную оценку

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{w_{xt}^2(x, t) + w_{xx}^2(x, t) + \varepsilon[w_{xxt}^2(x, t) + w_{xxx}^2(x, t)]\} dx \\ & + \varepsilon^2 \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t [w_{xx}^2(0, \tau) + w_{xx}^2(1, \tau)] d\tau \\ & \leq K_3 \int_0^T \int_{\Omega} [f^2 + f_x^2] dx dt, \end{aligned} \quad (2.11)$$

постоянная K_3 в которой определяется числом T , а также функциями $c(x, t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$. Наконец, используя эту оценку, уравнение (2.4 $_{\varepsilon, \lambda}$) и продифференцированное по переменной x уравнение (2.4 $_{\varepsilon, \lambda}$), нетрудно получить вторую априорную оценку

$$\int_0^t \int_{\Omega} [w_{\tau\tau}^2 + \varepsilon w_{x\tau\tau}^2] dx d\tau \leq K_4 \int_0^T \int_{\Omega} [f^2 + f_x^2] dx dt, \quad (2.12)$$

постоянная K_4 в которой вновь определяется лишь числом T , функциями $c(x, t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$.

Оценок (2.11) и (2.12) уже вполне достаточно для доказательства открытости и замкнутости множества Λ . Действительно, эти оценки означают, что при фиксированном ε имеет место неравенство

$$\|w\|_{W_1} \leq M_1(\|f\|_{L_2(Q)} + \|f_x\|_{L_2(Q)}).$$

Покажем, как с помощью полученной оценки устанавливается открытость множества Λ .

Пусть λ_0 – точка множества Λ , $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$. Покажем, что при малой величине $|\tilde{\lambda}|$ число λ также лежит в множестве Λ (уточним, что здесь $\tilde{\lambda} > 0$, если $\lambda_0 = 0$, $\tilde{\lambda} < 0$, если $\lambda_0 = 1$).

Пусть $v(x, t)$ – произвольная функция из пространства W_1 . Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$\begin{aligned} & w_{tt} - w_{xx} + c(x, t)w - \varepsilon w_{xxt} \\ & = \tilde{f}(x, t) + \lambda_0[A_1(x, t)w_{xx}(0, t) + A_2(x, t)w_{xx}(1, t) + \Phi(x, t, \bar{w}(t))] \\ & + \tilde{\lambda}[A_1(x, t)v_{xx}(0, t) + A_2(x, t)v_{xx}(1, t) + \Phi(x, t, \bar{v}(t))] \end{aligned} \quad (2.4_{\varepsilon, \lambda_0, v})$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.5) и (2.6). Заметим, что в этой задаче для функции

$$\tilde{f}(x, t) + \tilde{\lambda}[A_1(x, t)v_{xx}(0, t) + A_2(x, t)v_{xx}(1, t) + \Phi(x, t, \bar{v}(t))]$$

выполняются включения (2.3). Тогда согласно определению множества Λ краевая задача $(2.4_{\varepsilon, \lambda_0, v})$, (2.5), (2.6) будет разрешима в пространстве W_1 . Следовательно, эта задача порождает оператор G , переводящий пространство W_1 в себя: $G(v) = w$. Используя доказанную выше априорную оценку, нетрудно установить, что при малой величине $|\tilde{\lambda}|$ оператор G будет сжимающим в W_1 и, тем самым, имеющим неподвижную точку. Неподвижная точка будет решением краевой задачи $(2.4_{\varepsilon, \lambda})$, (2.5), (2.6). А это и означает, что число λ принадлежит множеству Λ и, далее, что множество Λ открыто.

Покажем теперь, что из установленной выше априорной оценки следует замкнутость множества Λ .

Пусть $\{\lambda_n\}$ – последовательность точек множества Λ такая, что $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ при $n \rightarrow \infty$, $\{w_n(x, t)\}$ – семейство решений краевых задач $(2.4_{\varepsilon, \lambda})$, $\lambda = \lambda_n$, (2.5), (2.6). Положим

$$w_{nm}(x, t) = w_n(x, t) - w_m(x, t).$$

Имеет место равенство

$$\begin{aligned} w_{nmtt} - w_{nmxx} + c(x, t)w_{nm} - \varepsilon w_{nmxx} \\ = \lambda_n[A_1(x, t)w_{nmxx}(0, t) + A_2(x, t)w_{nmxx}(1, t) + \Phi(x, t, \bar{w}_{nm}(t))] \\ + (\lambda_n - \lambda_m)[A_1(x, t)w_{mxx}(0, t) + A_2(x, t)w_{mxx}(1, t) + \Phi(x, t, \bar{w}_m(t))]. \end{aligned}$$

Повторяя для этого равенства вывод основной априорной оценки и учитывая, что семейство $\{w_n(x, t)\}$ равномерно ограничено в пространстве W_1 , нетрудно установить справедливость неравенства

$$\|w_{nm}\|_{W_1} \leq M'_1 |\lambda_n - \lambda_m|.$$

Это неравенство означает, что последовательность $\{w_n(x, t)\}$ фундаментальна в W_1 . Поскольку же W_1 есть банахово пространство, то получаем, что существует функция $w_0(x, t)$, являющаяся пределом этой последовательности и принадлежащая W_1 . Очевидно, для предельной функции будет выполняться уравнение $(2.4_{\varepsilon, \lambda})$, $\lambda = \lambda_0$. А это и означает, что число λ_0 лежит в множестве Λ . Принадлежность предельной точки множества ему же и дает его замкнутость.

Отметим, что в полном виде теорема о методе продолжения по параметру приведена в [6]; конкретные реализации см., например, в [7], [8].

Как уже говорилось выше, непустота, открытость и замкнутость множества Λ дают совпадение множества Λ со всем отрезком $[0, 1]$. Следовательно, краевая задача $(2.4_{\varepsilon, \lambda})$, $\lambda = 1$, (2.5), (2.6) при выполнении условий теоремы будет разрешима в пространстве W_1 для любого фиксированного числа ε .

Пусть $\{\varepsilon_m\}$ – последовательность положительных чисел такая, что $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, $\{w_m(x, t)\}$ – последовательность соответствующих решений задач $(2.4_{\varepsilon, \lambda})$, $\varepsilon = \varepsilon_m$, $\lambda = 1$, (2.5), (2.6). Для семейства $\{w_m(x, t)\}$ имеют место равномерные по m априорные оценки (2.11) и (2.12). Из этих оценок, из свойства слабой компактности ограниченного в гильбертовом пространстве множества следует, что существует последовательность $\{m_k\}$ натуральных чисел и функция $w(x, t)$ такие, что при $k \rightarrow \infty$ последовательности

$$\{w_{m_k}(x, t)\}, \quad \{w_{m_k t}(x, t)\}, \quad \{w_{m_k x}(x, t)\}, \quad \{w_{m_k tt}(x, t)\}, \quad \{w_{m_k xx}(x, t)\}$$

слабо в пространстве $L_2(Q)$ сходятся к функциям $w(x, t)$, $w_t(x, t)$, $w_x(x, t)$, $w_{tt}(x, t)$, $w_{xx}(x, t)$ соответственно, последовательности

$$\{w_{m_k}(0, t)\}, \{w_{m_k}(1, t)\}, \{w_{m_k t}(0, t)\}, \{w_{m_k t}(1, t)\}, \{w_{m_k xx}(0, t)\}, \{w_{m_k xx}(1, t)\}$$

слабо в пространстве $L_2([0, T])$ сходятся к функциям $w(0, t)$, $w(1, t)$, $w_t(0, t)$, $w_t(1, t)$, $w_{xx}(0, t)$, $w_{xx}(1, t)$ соответственно, последовательность $\{\varepsilon_{m_k} w_{m_k xxt}(x, t)\}$ слабо в пространстве $L_2(Q)$ сходится к тождественно нулевой функции. Указанные сходимости означают, что в уравнении (2.4 _{ε, λ}), $\varepsilon = \varepsilon_m$, $\lambda = 1$, можно перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$; в пределе получим, что для функции $w(x, t)$ будет выполняться уравнение (2.4) и что эта функция будет решением краевой задачи (2.4)–(2.6).

Из оценки (2.11) следует, что функции $w_{tt}(0, t)$ и $w_{tt}(1, t)$ принадлежат пространству $L_2([0, T])$ и что имеют место равенства

$$\begin{aligned} w_{tt}(0, t) &= w_{xx}(0, t) - c(0, t)w(0, t) + \tilde{f}(0, t) + A_1(0, t)w_{xx}(0, t) \\ &\quad + A_2(0, t)w_{xx}(1, t) + \Phi(0, t, \bar{w}), \\ w_{tt}(1, t) &= w_{xx}(1, t) - c(1, t)w(1, t) + \tilde{f}(1, t) + A_1(1, t)w_{xx}(0, t) \\ &\quad + A_2(1, t)w_{xx}(1, t) + \Phi(1, t, \bar{w}). \end{aligned}$$

Эти равенства и уравнение (2.4) означают, что функция $w(x, t)$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} &w_{tt} - w_{xx} + c(x, t)w \\ &= f(x, t) - b_1(x, t)w_{tt}(0, t) - 2b_{1t}(x, t)w_t(0, t) - b_{1tt}(x, t)w(0, t) \\ &\quad - b_2(x, t)w_{tt}(1, t) - 2b_{2t}(x, t)w_t(1, t) - b_{2tt}(x, t)w(1, t) + b_{1xx}(x, t)w(0, t) \\ &\quad + b_{2xx}(x, t)w(1, t) - c(x, t)b_1(x, t)w(0, t) - c(x, t)b_2(x, t)w(1, t). \end{aligned}$$

Положим

$$u(x, t) = w(x, t) + b_1(x, t)w(0, t) + b_2(x, t)w(1, t).$$

Очевидно, что функция $u(x, t)$ принадлежит пространству V_0 и что она является решением краевой задачи I.

Теорема доказана.

Теорема 1 остается справедливой, если уравнение (1.1) заменить более общим уравнением

$$u_{tt} - A(x, t)u_{xx} + a(x, t)u_x + b(x, t)u_t + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1.1')$$

с выполненным условием

$$A(x, t) \geq a_0 > 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \bar{Q}$$

(и с выполненными естественными условиями гладкости). Далее, основным условием разрешимости краевой задачи I является условие (2.2). Покажем, что от этого условия можно отказаться.

Обозначим через $v(x, t)$ функцию $e^{-\mu x}u(x, t)$. Уравнение (1.1) эквивалентно следующему уравнению для функции $v(x, t)$ вида (1.1'):

$$v_{tt} - v_{xx} - 2\mu v_x + [c(x, t) - \mu^2]v = e^{-\mu x}f(x, t). \quad (1.1'')$$

Далее, начальные условия для функции $v(x, t)$ будут такими же, как и для функции $v(x, t)$, граничные же преобразуются к виду

$$v_x(0, t) = [\alpha_1(t) - \mu]v(0, t) + e^\mu \alpha_2(t)v(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (1.3')$$

$$v_x(1, t) = e^{-\mu} \beta_1(t)v(0, t) + [\beta_2(t) - \mu]v(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (1.4')$$

Возьмем $\nu_0 = 0$. Тогда функция $\Delta(t)$ задачи (1.1''), (1.2), (1.3'), (1.4') имеет вид

$$\Delta(t) = \frac{1}{2}[2 - e^\mu \alpha_2(t) - \beta_2(t) + \mu].$$

Очевидно, что существует число μ_0 такое, что $\mu_0 < 0$, $\Delta(t) < 0$ при $\mu < \mu_0$, $t \in [0, T]$. Зафиксируем число μ и повторим для задачи (1.1''), (1.2), (1.3'), (1.4') доказательство теоремы 1. Получим, что эта задача имеет решение $v(x, t)$ такое, что $v(x, t) \in W_1$. Очевидно теперь, что функция $u(x, t) = e^{\mu x}v(x, t)$ будет требуемым решением исходной краевой задачи I.

Из сказанного выше следует, что в окончательном варианте теорема о разрешимости краевой задачи I имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть выполняются условия (2.1) и (2.3). Тогда краевая задача I имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V_0 .

3. Разрешимость краевых задач II и III.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия

$$c(x, t) \in C^2(\overline{Q}), \quad \alpha_i(t) \in C^3([0, T]), \quad \beta_i(t) \in C^3([0, T]), \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

$$\alpha_1(t) \geq 0, \quad \beta_2(t) \leq 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \quad (3.2)$$

$$\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t) \leq 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \quad (3.3)$$

$$\alpha_2(t) + \beta_1(t) \equiv 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \quad (3.4)$$

$\exists \mu_0 \in (0, 2)$:

$$[\mu_0 + 6\alpha_1'(t)]\xi_1^2 + 12\alpha_2'(t)\xi_1\xi_2 + [\mu_0 - 6\beta_2'(t)]\xi_2^2 \geq 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad (3.5)$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q), \quad f_{xt}(x, t) \in L_2(Q), \quad f(x, 0) \equiv 0 \quad \text{при } x \in \overline{\Omega}. \quad (3.6)$$

Тогда краевая задача II имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε есть положительное число. Положим

$$\alpha_{1\varepsilon}(t) = \alpha_1(t) + \varepsilon, \quad \beta_{2\varepsilon}(t) = \beta_2(t) - \varepsilon.$$

Рассмотрим следующую вспомогательную начально-краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$u(0, t) = \alpha_{1\varepsilon}(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (3.7)$$

$$u(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_{2\varepsilon}(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (3.8)$$

Покажем, что данная краевая задача для любого фиксированного числа ε при выполнении условий (3.1)–(3.3) и (3.6) имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in V_0$, $u_t(x, t) \in V_0$.

Положим

$$\Delta_{0\varepsilon}(t) = \alpha_{1\varepsilon}(t)\beta_{2\varepsilon}(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t).$$

Заметим, что вследствие условий (3.2) и (3.3) при $t \in [0, T]$ выполняется неравенство

$$\Delta_{0\varepsilon}(t) \leq -\varepsilon^2.$$

Следовательно, условия (3.7), (3.8) эквивалентны условиям краевой задачи I:

$$u_x(0, t) = \frac{\beta_{2\varepsilon}(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u(0, t) - \frac{\alpha_2(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (3.7')$$

$$u_x(1, t) = -\frac{\beta_1(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u(0, t) + \frac{\alpha_{1\varepsilon}(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (3.8')$$

Далее, условия (3.1) и (3.6) означают, что для краевой задачи (1.1), (1.2), (3.7'), (3.8') выполняются все условия теоремы 1'. Но тогда эта задача будет иметь решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V_0 . Более того, если вместо задачи (1.1), (1.2), (3.7'), (3.8') рассмотреть “продифференцированную по t ” задачу: *найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{ttt} - u_{xxt} + c(x, t)u_t + c_t(x, t)u = f_t(x, t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$\begin{aligned} u_{xt}(0, t) &= \frac{\beta_{2\varepsilon}(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u_t(0, t) - \frac{\alpha_2(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u_t(1, t) + \left(\frac{\beta_{2\varepsilon}(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} \right)_t u(0, t) \\ &\quad - \left(\frac{\alpha_2(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} \right)_t u(1, t), \quad 0 < t < T, \\ u_{xt}(1, t) &= -\frac{\beta_1(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u_t(0, t) + \frac{\alpha_{1\varepsilon}(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u_t(1, t) - \left(\frac{\beta_1(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} \right)_t u(1, t) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha_{1\varepsilon}(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} \right)_t u(1, t), \quad 0 < t < T, \end{aligned}$$

то нетрудно показать, повторяя доказательство теоремы 1', что данная задача будет иметь решение $u(x, t)$ такое, что

$$u(x, t) \in V_0, \quad u_t(x, t) \in V_0.$$

Вернемся к краевой задаче (1.1), (1.2), (3.7), (3.8). Как следует из доказанного, эта задача имеет решение $u_\varepsilon(x, t)$ такое, что

$$u_\varepsilon(x, t) \in V_0, \quad u_{\varepsilon t}(x, t) \in V_0.$$

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_\Omega (u_{\varepsilon\tau\tau\tau} - u_{\varepsilon xxt} + cu_{\varepsilon\tau} + c_\tau u_\varepsilon) \left[u_{\varepsilon\tau\tau} - \mu \left(x - \frac{1}{2} \right) u_{\varepsilon x\tau} \right] dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_\Omega f_\tau \left[u_{\varepsilon\tau\tau} - \mu \left(x - \frac{1}{2} \right) u_{\varepsilon x\tau} \right] dx d\tau, \end{aligned}$$

в котором μ есть произвольное число из интервала $(\mu_0, 2)$. После интегрирования по частям это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_{\varepsilon tt}^2(x, t) + u_{\varepsilon xt}^2(x, t)] dx + \frac{\mu}{4} \int_0^t [u_{\varepsilon \tau \tau}^2(0, \tau) + u_{\varepsilon \tau \tau}^2(1, \tau)] d\tau \\
 & + \int_0^t \left\{ \left[\frac{\mu}{4} + \frac{3}{2} \alpha_1'(\tau) \right] u_{\varepsilon x \tau}^2(0, \tau) + 3\alpha_2'(\tau) u_{\varepsilon x \tau}(0, \tau) u_{\varepsilon x \tau}(1, \tau) \right. \\
 & \quad \left. + \left[\frac{\mu}{4} - \frac{3}{2} \beta_2'(\tau) \right] u_{\varepsilon x \tau}^2(1, \tau) \right\} d\tau \\
 & + \frac{1}{2} \alpha_{1\varepsilon}(t) u_{\varepsilon xt}^2(0, t) + \alpha_2(t) u_{\varepsilon xt}(0, t) u_{\varepsilon xt}(1, t) - \frac{1}{2} \beta_{2\varepsilon}(t) u_{\varepsilon xt}^2(1, t) \\
 & = \mu \int_{\Omega} \left(x - \frac{1}{2} \right) u_{\varepsilon xt}(x, t) u_{\varepsilon tt}(x, t) dx + \frac{\mu}{2} \int_0^t \int_{\Omega} [u_{\varepsilon \tau \tau}^2 + u_{\varepsilon x \tau}^2] dx d\tau \\
 & + \int_0^t \int_{\Omega} (f_{\tau} - c u_{\varepsilon \tau} - c_{\tau} u_{\varepsilon}) \left[u_{\varepsilon \tau \tau} - \mu \left(x - \frac{1}{2} \right) u_{\varepsilon x \tau} \right] dx d\tau \\
 & - \int_0^t \alpha_1''(\tau) u_{\varepsilon x \tau}(0, \tau) u_{\varepsilon x}(0, \tau) d\tau - \int_0^t \alpha_2''(\tau) u_{\varepsilon x \tau}(0, \tau) u_{\varepsilon x}(1, \tau) d\tau \\
 & + \int_0^t \beta_1''(\tau) u_{\varepsilon x \tau}(1, \tau) u_{\varepsilon x}(0, \tau) d\tau + \int_0^t \beta_2''(\tau) u_{\varepsilon x \tau}(1, \tau) u_{\varepsilon x}(1, \tau) d\tau. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Из условий (3.2)–(3.6) вытекает, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \left\{ \left[\frac{\mu}{4} + \frac{3}{2} \alpha_1'(\tau) \right] u_{\varepsilon x \tau}^2(0, \tau) + 3\alpha_2'(\tau) u_{\varepsilon x \tau}(0, \tau) u_{\varepsilon x \tau}(1, \tau) \right. \\
 & \quad \left. + \left[\frac{\mu}{4} - \frac{3}{2} \beta_2'(\tau) \right] u_{\varepsilon x \tau}^2(1, \tau) \right\} d\tau \\
 & \geq \frac{\mu - \mu_0}{4} \int_0^t [u_{\varepsilon x \tau}^2(0, \tau) + u_{\varepsilon x \tau}^2(1, \tau)] d\tau, \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \alpha_{1\varepsilon}(t) u_{\varepsilon xt}^2(0, t) + \alpha_2(t) u_{\varepsilon xt}(0, t) u_{\varepsilon xt}(1, t) - \frac{1}{2} \beta_{2\varepsilon}(t) u_{\varepsilon xt}^2(1, t) \geq 0. \quad (3.11)$$

Оценивая правую часть равенства (3.9) с помощью неравенства Юнга и элементарных интегральных неравенств, учитывая неравенства (3.10) и (3.11) и, наконец, применяя лемму Гронуолла, получаем, что для решений краевой задачи (1.1), (1.2), (3.7), (3.8) имеет место априорная оценка

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} [u_{\varepsilon tt}^2(x, t) + u_{\varepsilon xt}^2(x, t)] dx \\
 & + \int_0^t [u_{\varepsilon \tau \tau}^2(0, \tau) + u_{\varepsilon x \tau}^2(0, \tau) + u_{\varepsilon \tau \tau}^2(1, \tau) + u_{\varepsilon x \tau}^2(1, \tau)] d\tau \leq M_1 \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

с постоянной M_1 , определяющейся лишь числом T и функциями $f(x, t)$, $c(x, t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$. Далее, из этой оценки и из самого уравнения (1.1) следует, что имеет место вторая априорная оценка

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon xx}^2(x, t) dx + \int_0^t [u_{\varepsilon xx}^2(0, \tau) + u_{\varepsilon xx}^2(1, \tau)] d\tau \leq M_2 \quad (3.13)$$

с постоянной M_2 , вновь определяющейся лишь числом T и функциями $f(x, t)$, $c(x, t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$.

Оценок (3.12) и (3.13) уже вполне достаточно для осуществления процедуры предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ в задаче (1.1), (1.2), (3.6), (3.7); собственно же предельный переход осуществляется стандартным образом с использованием свойства рефлексивности гильбертовых пространств. Предельная функция будет принадлежать пространству V_0 и будет представлять собой искомое решение краевой задачи II.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия

$$c(x, t) \in C^2(\overline{Q}), \quad \alpha_i(t) \in C^3([0, T]), \quad \beta_i(t) \in C^3([0, T]), \quad i = 1, 2, \\ \beta_2(t) \leq 0 \quad \text{при } t \in [0, T];$$

$\exists \mu_0 \in (0, 2)$:

$$\{\mu_0[1 + \alpha_2^2(t)] - 6\beta_2'(t)\}\xi_1^2 + 4[\alpha_2(t) - \beta_1(t)]\xi_1\xi_2 + \mu_0\xi_2^2 \geq 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \quad \xi \in \mathbb{R}^2;$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q), \quad f_{xt}(x, t) \in L_2(Q),$$

$$f(x, 0) \equiv 0 \quad \text{при } x \in \overline{\Omega}.$$

Тогда краевая задача III имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО данной теоремы вполне соответствует доказательству теоремы 2. Регуляризующей задачей будет следующая задача: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$u_x(0, t) = \left[\alpha_1(t) - \frac{\alpha_2(t)\beta_1(t)}{\beta_2(t) - \varepsilon} \right] u(0, t) + \frac{\alpha_2(t)}{\beta_2(t) - \varepsilon} u(1, t), \\ u_x(1, t) = -\frac{\beta_1(t)}{\beta_2(t) - \varepsilon} u(0, t) + \frac{1}{\beta_2(t) - \varepsilon} u(1, t).$$

Эта задача имеет решение $u(x, t)$ такое, что

$$u(x, t) \in V_0, \quad u_t(x, t) \in V_0.$$

Априорные оценки, равномерные по ε , выводятся так же, как они выводились при доказательстве теоремы 2. Предельный переход осуществляется стандартным образом; предельная функция будет принадлежать пространству V_0 и будет являться решением краевой задачи III.

Теорема доказана.

4. Дополнение.

1. Утверждения теорем 2 и 3, как и теоремы 1, справедливы и для более общих уравнений вида

$$u_{tt} - A(x, t)u_{xx} + a(x, t)u_x + b(x, t)u_t + c(x, t)u = f(x, t)$$

при выполнении условия

$$A(x, t) \geq a_0 > 0 \quad \text{при } (x, t) \in \overline{Q},$$

а также необходимых условий гладкости.

2. Покажем, как нелокальные краевые задачи типа рассмотренных выше возникают при исследовании разрешимости некоторых коэффициентных обратных задач.

Рассмотрим следующую обратную задачу: *найти функции $u(x, t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением*

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t), \quad (4.1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.2)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(1, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad (4.3)$$

$$u_x(0, t) = \mu(t), \quad 0 < t < T. \quad (4.4)$$

Пусть выполняется условие

$$h(0, t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T].$$

Проведем некоторые формальные построения. Именно, в исходном уравнении положим $x = 0$ и вычислим $q(t)$:

$$q(t) = \frac{\varphi''(t) + C(0, t)\varphi(t) - f(0, t)}{h(0, t)} - \frac{u_{xx}(0, t)}{h(0, t)} = \alpha(t) + \beta(t)u_{xx}(0, t).$$

Вместо уравнения (4.1) рассмотрим “нагруженное” уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) + [\alpha(t) + \beta(t)u_{xx}(0, t)]h(x, t). \quad (4.5)$$

Положим в этом уравнении $x = 1$. Получим равенство

$$u_{xx}(1, t) + \beta(t)h(x, t)u_{xx}(0, t) = \psi''(t) + c(1, t)\psi(t) - f(1, t).$$

Далее продифференцируем уравнение (4.5) по x и положим $x = 0$. Получим еще одно равенство

$$u_{xxx}(0, t) + \beta(t)h_x(0, t) = \mu''(t) + c(0, t)\mu(t) + c_x(0, t)\varphi(t).$$

Продифференцировав (4.5) теперь дважды по x , получим в целом следующую уже прямую задачу:

$$v_{tt} - v_{xx} + c(x, t)v + 2c_x(x, t)u_x + c_{xx}(x, t)u = f_1(x, t) + h_1(x, t)v(0, t), \quad (4.6)$$

$$u_{xx} = v, \quad (4.7)$$

$$v(1, t) + \beta(t)h(1, t)v(0, t) = a(t), \quad 0 < t < T, \quad (4.8)$$

$$v_x(0, t) + \beta(t)h_x(0, t)v(0, t) = b(t), \quad 0 < t < T, \quad (4.9)$$

$$v(x, 0) = u_0''(x), \quad v_t(x, 0) = u_1''(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.10)$$

$$u_x(0, t) = \mu(t), \quad u(1, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T. \quad (4.11)$$

В этой задаче условие (4.8) является нелокальным граничным условием вида (1.8); найдя решение нелокальной задачи (4.6)–(4.11), найдем и решение обратной задачи (4.1)–(4.4).

Если в исходной задаче выполняется

$$h_x(0, t) \neq 0 \quad \text{при } t \in [0, T],$$

то, действуя аналогично, нетрудно получить нелокальную краевую задачу для гиперболического относительно функции $v(x, t)$ уравнения с граничным условием вида (1.5). И так далее.

Безусловно, ситуация становится более сложной, если изначально изучать нелинейную обратную задачу нахождения функций $u(x, t)$ и $q(t)$, связанных в прямоугольнике Q уравнением

$$u_{tt} - u_{xx} + q(t)u = f(x, t).$$

Но для того чтобы решать нелинейные задачи, надо вначале научиться решать линейные (а именно нелинейные коэффициентные обратные задачи являются конечной целью автора).

3. Условие $\alpha_2(t) + \beta_1(t) \equiv 0$ теоремы 2 соответствует условию работы [2], согласно которому оператор $-u_{xx} + c(x)u$ вместе с краевыми условиями задачи II в случае постоянных коэффициентов α_i и β_i должен быть самосопряженным оператором. Другими словами, доказанное в теореме 2 утверждение можно трактовать как обобщение результата работы [2], связанного с краевой задачей II, на случай “самосопряженных при каждом t ” краевых условий. Что же касается краевых задач I и III, то полученные выше результаты дают разрешимость без выполнения условий самосопряженности даже в случае постоянных коэффициентов α_i и β_i .

4. Краевые условия (1.5), (1.6) и (1.8) задач II и III в случае $\alpha_2(t) \equiv \beta_1(t) \equiv 0$ можно трактовать как условия вырожденной третьей краевой задачи, т.е. как условия вида

$$\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x, t)u|_S = 0$$

с допущением обращения функции $\alpha(x, t)$ в нуль на S .

5. Условие $f(x, 0) \equiv 0$ теорем 2 и 3 является техническим, и от него вполне можно отказаться. В краевых условиях задач I–III вполне возможно присутствие свободных членов $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. На сути результатов это не скажется.

6. Полученный по ходу доказательства теоремы 1 результат о разрешимости краевой задачи (2.5), (2.6) для “существенно нагруженного” уравнения (2.4) имеет и самостоятельное значение.

7. Условия теоремы 3 допускают включение в класс задач, для которых установлена теорема существования, краевой задачи с граничными условиями

$$u_x(0, t) = \alpha_2(t)u_x(1, t), \quad u(1, t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

в случае $\alpha_2(t) \geq 1$. В свою очередь, имея разрешимость такой задачи, нетрудно установить разрешимость краевой задачи для гиперболического уравнения (1.1) с условиями

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \beta_1(t)u(0, t)$$

в случае $\beta_1(t) \geq 1$.

8. Единственность решений при выполнении условий теорем 1–3 очевидна.

9. Основные априорные оценки в работе выводятся с помощью тождеств, полученных после умножения продифференцированного исходного уравнения на функцию $(x - 1/2)u_{xx}$ или же $(x - 1/2)u_{x\tau}$. Подобные тождества использовались и ранее, зачастую они позволяют оценить следы производных решения на границе. При использовании подобных тождеств возникает условие звездности области относительно выделенной точки. Фактически в работе и используется свойство звездности отрезка $[0, 1]$ относительно $x_0 = 1/2$; вообще говоря, вместо $x_0 = 1/2$ можно использовать любую другую точку интервала $(0, 1)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Кожанов, “О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Естественная серия*, 2008, № 3(62), 165–174.
- [2] Н. Л. Лажетич, “О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка”, *Дифференц. уравнения*, **42**:8 (2006), 1072–1077.
- [3] А. М. Нахушев, *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, М., 1995.
- [4] М. Т. Дженалиев, *К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений*, ИТПМ НАН РК, Алматы, 1995.
- [5] С. Я. Якубов, *Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения*, Элм, Баку, 1985.
- [6] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Физматлит, М., 2007.
- [7] А. И. Кожанов, “Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера”, *Дифференц. уравнения*, **40**:6 (2004), 763–774.
- [8] А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина, “О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **42**:9 (2006), 1166–1179.

А. И. Кожанов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

E-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Поступило

28.04.2009

Исправленный вариант

29.12.2010