Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов, Теорема Штейнгауза
о равносходимости для функционально-дифференциальных операторов, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 1, 22–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8628>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:54:42

Теорема Штейнгауза о равносходимости для функционально-дифференциальных операторов

М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов

В работе установлена равносходимость рядов $S(af)$ и $a(x)S(f)$, где $S(f)$ – ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям функционально-дифференциального оператора с инволюцией.

Библиография: 5 названий.

Известна следующая теорема Штейнгауза [1; с.111]: *если $a(x)$ периодическая функция с периодом 1, удовлетворяющая условию Липшица порядка 1, то для любой функции $f(x) \in L[0, 1]$*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|a(x)\sigma_r(f, x) - \sigma_r(af, x)\|_{\infty} = 0,$$

где $\sigma_r(f, x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ по системе $\{e^{2k\pi i x}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для тех k , для которых $|2k\pi| < r$.

В свою очередь, $\sigma_r(f, x)$ есть частичная сумма ряда Фурье по собственным функциям оператора y' , $y(0) = y(1)$. Поставим задачу перенесения теоремы Штейнгауза на тот случай, когда $\sigma_r(f, x)$ заменяется на частичную сумму ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям (СПФ) заданного оператора. Мы рассмотрим случай функционально-дифференциального оператора с инволюцией и связанного с ним оператора Дирака (см. работу [2] и имеющуюся там библиографию).

1. Пусть L есть функционально-дифференциальный оператор:

$$Ly = y'(1-x) + \alpha y'(x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad x \in [0, 1],$$

$$y(0) = \gamma y(1),$$

где $\alpha^2 \neq 1$, α, γ – комплексные постоянные, $p_i(x) \in C^1[0, 1]$.

Обозначим через $\tilde{L}$ следующий оператор в пространстве вектор-функций размерности 2:

$$\tilde{L}z = Bz'(x) + P(x)z(x), \tag{1}$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0, \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 06-01-00003, 07-01-00397) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2970.2008.1).

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T – знак транспонирования),

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(1-x) & p_1(1-x) \end{pmatrix},$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & -1 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\tilde{L}$ представляет собой частный случай оператора Дирака.

Так же, как в [2], [3], можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Спектры операторов L и $\tilde{L}$ совпадают, причем, если R_λ и $\tilde{R}_\lambda$ – соответственно резольвенты операторов L и $\tilde{L}$, и $y = R_\lambda f$, $z = \tilde{R}_\lambda F$, где $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, то $y(x) = z_1(x)$.*

Пусть $z(x) = z(x, \lambda) = \tilde{R}_\lambda F$ (в дальнейшем для краткости аргумент λ в обозначении решений различных задач будем опускать). Тогда $z(x)$ удовлетворяет задаче

$$Bz'(x) + P(x)z(x) - \lambda z(x) = F(x), \quad (3)$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0. \quad (4)$$

Положим

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

где $b = \alpha - \tilde{\omega}$, $\tilde{\omega} = \sqrt{\alpha^2 - 1}$ (числа $\pm \tilde{\omega}$ – собственные значения матрицы B). Тогда $B\Gamma = \Gamma D^{-1}$, где $D^{-1} = \text{diag}(\tilde{\omega}, -\tilde{\omega})$. Выполнив в (3), (4) замену $z(x) = \Gamma u(x)$, получим следующую задачу для $u(x)$:

$$u'(x) + P_1(x)u(x) - \lambda Du(x) = F_1(x), \quad (5)$$

$$M_0 \Gamma u(0) + M_1 \Gamma u(1) = 0, \quad (6)$$

где $P_1(x) = D\Gamma^{-1}P(x)\Gamma$, $F_1(x) = D\Gamma^{-1}F(x)$, $D = \text{diag}(\omega, -\omega)$ и $\omega = 1/\tilde{\omega}$.

Далее проводится преобразование системы (5), (6), заменяющее матрицу $P_1(x)$ на матрицу, компоненты которой имеют оценку $O(\lambda^{-1})$ (см., например, [2], [3]).

ЛЕММА 1. *Существует преобразование*

$$u(x) = H(x, \lambda)v(x),$$

где $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, $H_0(x)$ – диагональная, $H_1(x)$ – кодиагональная матрицы, приводящее систему (5), (6) к виду

$$v'(x) + P(x, \lambda)v(x) - \lambda Dv(x) = H^{-1}(x, \lambda)F_1(x), \quad (7)$$

$$M_0 \lambda v(0) + M_1 \lambda v(1) = 0. \quad (8)$$

Здесь $H_0(x) = \text{diag}(h_1(x), h_2(x))$,

$$h_1(x) = \exp\left\{-\omega\eta^{-1} \int_0^x r(t) dt\right\}, \quad h_2(x) = \exp\left\{\omega\eta^{-1} \int_0^x r(1-t) dt\right\},$$

$$r(x) = q_1(x) - bq_2(1-x), \quad q_1(x) = p_1(x) + bp_2(x), \quad q_2(x) = bp_1(x) + p_2(x),$$

$$\eta = 1 - b^2, \quad P(x, \lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x, \lambda)[H_1'(x) + P_1(x)H_1(x)],$$

$$M_0 \lambda = M_0 \Gamma H(0, \lambda), \quad M_1 \lambda = M_1 \Gamma H(1, \lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как в [2], [3], строим матричную функцию $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, где элементы $H_0(x)$ есть $h_k(x) = \exp\{-\int_0^x \tilde{p}_{kk}(t) dt\}$ и $\tilde{p}_{kk}(x)$ – диагональные элементы матрицы $P_1(x)$, а $H_1(x)$ – кодиагональная матрица, являющаяся решением матричного уравнения

$$H'_0(x) + P_1(x)H_0(x) + (H_1(x)D - DH_1(x)) = 0.$$

Вычислив непосредственно элементы $\tilde{p}_{kk}(x)$, придем к утверждению леммы.

ЛЕММА 2. *Имеет место соотношение*

$$h_2(1-x) = h_2(1)h_1(x).$$

Так как $h_2(1) = \exp\{\omega \int_0^1 p_1(t) dt\}$, имеем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $\int_0^1 p_1(t) dt = 0$, то $h_1(1) = h_2(1) = 1$ и $h_2(1-x) = h_1(x)$.*

2. Исследуем решение следующей краевой задачи:

$$w'(x) - \mu \tilde{D}w(x) = m(x), \quad (9)$$

$$U_0(w) = \tilde{M}_0 w(0) + \tilde{M}_1 w(1) = 0, \quad (10)$$

где $m(x) = (m_1(x), m_2(x))^T$, $m_k(x) \in L[0, 1]$, $\mu = \lambda\omega$, $\tilde{D} = \text{diag}(1, -1)$, $\tilde{M}_0 = M_0 \Gamma H_0(0)$, $\tilde{M}_1 = M_1 \Gamma H_0(1)$.

Решая задачу (9), (10) (как и в [2]–[4]), придем к утверждению

ЛЕММА 3. *Если μ таково, что матрица $\Delta_0(\mu) = U_0(V(x, \mu))$, где $V(x, \mu) = \text{diag}(e^{\mu x}, e^{-\mu x})$, обратима, то краевая задача (9), (10) однозначно разрешима при любой $m(x)$ с компонентами из $L[0, 1]$, и ее решение $w(x) = w(x, \mu)$ имеет вид*

$$w(x, \mu) = R_{0\mu} m(x) = -V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(g_\mu m) + g_\mu m(x), \quad (11)$$

где

$$g_\mu m(x) = \int_0^1 g(x, t, \mu) m(t) dt, \quad U_0(g_\mu m) = \int_0^1 U_{0x}(g(x, t, \mu)) m(t) dt$$

(U_{0x} означает, что U_0 применяется к g по переменной x),

$$\begin{aligned} g(x, t, \mu) &= \text{diag}(g_1(x, t, \mu), g_2(x, t, \mu)), \\ g_k(x, t, \mu) &= \begin{cases} -\varepsilon(t, x) \exp\{(-1)^{k-1} \mu(x-t)\} & \text{при } (-1)^{k-1} \text{Re } \mu \geq 0, \\ \varepsilon(x, t) \exp\{(-1)^{k-1} \mu(x-t)\} & \text{при } (-1)^{k-1} \text{Re } \mu \leq 0, \end{cases} \\ \varepsilon(x, t) &= \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq t, \\ 0, & \text{если } x < t. \end{cases} \end{aligned}$$

Непосредственно вычисляя $\Delta_0(\mu)$, получим, что

$$\det \Delta_0(\mu) = (b - \gamma)^2 h_1(1) e^\mu - (1 - \gamma b)^2 h_2(1) e^{-\mu}.$$

Всюду далее требуем выполнения условий регулярности:

$$\gamma \neq b, \quad \gamma \neq b^{-1}. \quad (12)$$

Корни $\det \Delta_0(\mu)$ есть числа $\mu_k = k\pi i + \ln \alpha_1/2$, $k \in Z$, где

$$\alpha_1 = (1 - \gamma b)^2 (b - \gamma)^{-2} \frac{h_2(1)}{h_1(1)}.$$

Удаляя из комплексной плоскости эти корни вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ , получим область S_δ , в которой справедлива оценка

$$|\det \Delta_0(\mu)| \geq c |e^{\mu \cdot \text{sign}(\text{Re } \mu)}|.$$

ЛЕММА 4. В области S_δ для элементов $\Delta_0^{-1}(\mu) = (x_{ij})_{i,j=1,2}$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} x_{11} &= O(e^{-2\mu}), & x_{12} &= O(e^{-\mu}), & x_{21} &= O(1), & x_{22} &= O(e^{-\mu}) & \text{при } \text{Re } \mu \geq 0, \\ x_{11} &= O(1), & x_{12} &= O(e^{\mu}), & x_{21} &= O(e^{2\mu}), & x_{22} &= O(e^{\mu}) & \text{при } \text{Re } \mu \leq 0. \end{aligned}$$

Так же, как в [4; теорема 2], доказывается, что

$$\|R_{0\mu}m\|_\infty = O(\|m\|_1), \quad \|R_{0\mu}\varphi\|_\infty = O(\mu^{-1}), \quad (13)$$

где $\varphi(x)$ – вектор-функция, каждая компонента которой есть функция ограниченной вариации, $\|\cdot\|_\infty$ ($\|\cdot\|_1$) – норма в пространстве L_∞ ($L[0, 1]$).

Всюду далее будем обозначать через $v(x, \lambda; \psi)$ решение задачи (7), (8) с правой частью $\psi(x)$.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$s'(x) - \mu \tilde{D}s(x) = m(x), \quad (14)$$

$$U_1(w) = M_{0\lambda}s(0) + M_{1\lambda}s(1) = 0. \quad (15)$$

Ее решение $s(x) = R_{1\mu}m(x)$ имеет вид (11), где U_0 , $\Delta_0(\mu)$ заменяются на U_1 , $\Delta_1(\mu) = U_1(V(x, \mu))$ соответственно. Так же, как в [5; лемма 17], можно показать, что для элементов $\Delta_1(\mu)$ справедливо представление $\Delta_1(\mu) = ([a_{ij}] + [b_{ij}]e^{\mu\omega_j})_{i,j=1}^2$, где a_{ij} , b_{ij} соответственно элементы матриц $\tilde{M}_0$ и $\tilde{M}_1$, $[a] = a + o(1)$, $\omega_j = (-1)^{j-1}$. Поэтому при выполнении условий регулярности (12), для решения задачи (14), (15) имеем оценки, аналогичные (13), и так же, как в [3; лемма 10], получаем, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} H(x, \lambda) [v(x, \lambda; H^{-1}(x, \lambda)m) - R_{1\mu}(H_0^{-1}m)] d\lambda \right\|_\infty = 0. \quad (16)$$

Здесь и всюду далее r таково, что $\{\mu : |\mu| = r|\omega|\} \subset S_\delta$.

ЛЕММА 5. Для любой функции $m(x)$ с компонентами из $L[0, 1]$ и функции $\varphi(x)$, компоненты которой есть функции ограниченной вариации, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|R_{1\mu}m - R_{0\mu}m\|_\infty &= O(\mu^{-1}\|m\|_1), \\ \|R_{1\mu}\varphi - R_{0\mu}\varphi\|_\infty &= O(\mu^{-2}). \end{aligned} \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $M_{0\lambda} = \tilde{M}_0 + O(\lambda^{-1})$, $M_{1\lambda} = \tilde{M}_1 + O(\lambda^{-1})$, то

$$U_1(g_\mu m(x)) = U_0(g_\mu m(x)) + O(\mu^{-1}\|m\|_1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R_{1\mu}m(x) - R_{0\mu}m(x) \\ = V(x, \mu)[\Delta_0^{-1}(\mu) - \Delta_1^{-1}(\mu)]U_0(g_\mu m(x)) + O(\mu^{-1})V(x, \mu)\Delta_1^{-1}(\mu)\|m\|_1. \end{aligned}$$

Учитывая ограниченность $V(x, \mu)\Delta_k^{-1}(\mu)$, а также $U_0(g_\mu m(x))$, и оценивая компоненты в квадратной скобке, для элементов в первом слагаемом получим оценку $O(\mu^{-1})\|m\|_1$, откуда следует первое соотношение в (17). Используя для $\varphi(x)$ оценку $U_0(g_\mu \varphi(x)) = O(\mu^{-1})$, $g_\mu \varphi(x) = O(\mu^{-1})$ (доказательства использованных оценок приведены, например, в [4; теорема 2]), получим второе соотношение в (17).

Из леммы 5 по теореме Банаха–Штейнгауза получим, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)R_{1\mu}(H_0^{-1}m) - H_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}m)] d\lambda \right\|_\infty = 0. \quad (18)$$

Наконец, из (16) и (18) следует

ЛЕММА 6. *Для любой вектор-функции $m(x) = (m_1(x), m_2(x))^T$, $m_i(x) \in L[0, 1]$ имеет место соотношение*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)v(x, \lambda; H^{-1}(x, \lambda)m) - H_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}m)] d\lambda \right\|_\infty = 0.$$

3. Положим

$$\Omega_r(m) = \int_{|\lambda|=r} [Q(x)R_{0\mu}m - R_{0\mu}(Qm)] d\lambda,$$

где $Q(x) = \text{diag}(q(x), q(1-x))$, $q(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1 и $q(0) = q(1) = 1$.

ЛЕММА 7. *Имеет место оценка*

$$\left\| \int_{|\lambda|=r} [Q(x)g_\mu m(x) - g_\mu(Qm(x))] d\lambda \right\|_\infty = O(\|m\|_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для первой компоненты данного вектора (учитывая равенство $\mu = \lambda\omega$) имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{|\lambda|=r} [Q(x)g_\mu m - g_\mu(Qm)]_1 d\lambda \right| &\leq \frac{1}{|\omega|} \int_{|\mu|=r_1} |[Q(x)g_\mu m - g_\mu(Qm)]_1| \cdot |d\mu| \\ &= \frac{1}{|\omega|} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \right\} |[Q(x)g_\mu m - g_\mu(Qm)]_1| r_1 d\varphi, \end{aligned} \quad (19)$$

где $r_1 = r|\omega|$. Пусть $\text{Re } \mu \geq 0$. В этом случае

$$g_\mu m(x) = \left(- \int_x^1 e^{\mu(x-t)} m_1(t) dt, \int_0^x e^{-\mu(x-t)} m_2(t) dt \right)^T.$$

Тогда первый интеграл в (19) имеет следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r_1 d\varphi \left| \int_x^1 e^{\mu(x-t)} (q(x) - q(t)) m_1(t) dt \right| \right| \\ &= O \left(\int_x^1 |m_1(t)| dt \int_0^{\pi/2} r_1 e^{r_1 \cos \varphi(x-t)} |x-t| d\varphi \right) \\ &= O \left(\int_x^1 |m_1(t)| dt \int_0^{\pi r_1(t-x)/2} e^{-c_1 \xi} d\xi \right) = O(\|m\|_1) \end{aligned}$$

(здесь использованы замена $\varphi = \pi/2 - \tau$, оценка $\sin \tau \geq c_1 \tau$ при $\tau \in (0, \pi/2)$, где c_1 – некоторая константа $0 < c_1 < 2/\pi$, и замена $\xi = r_1(t-x)$).

Аналогично оцениваются второй интеграл в (19) (при $\operatorname{Re} \mu \leq 0$) и вторая компонента вектора, указанного в условии.

Непосредственно вычисляя компоненты матриц в (11), получим следующее утверждение.

ЛЕММА 8. *При $\operatorname{Re} \mu \geq 0$ имеет место соотношение*

$$\begin{aligned} & Q(x)V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu m) - V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu(Qm)) \\ &= ((\gamma b - 1)(J_1 + J_2), (\gamma b - 1)(J_3 + J_4))^T, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_1(x, \mu) &= x_{11} e^{\mu x} \int_0^1 e^{-\mu t} (q_1(x) - q_1(t)) m_1(t) dt, \\ J_2(x, \mu) &= x_{12} h_2(1) e^{\mu x} \int_0^1 e^{-\mu(1-t)} (q_1(x) - q_2(t)) m_2(t) dt, \\ J_3(x, \mu) &= x_{21} e^{-\mu x} \int_0^1 e^{-\mu t} (q_2(x) - q_1(t)) m_1(t) dt, \\ J_4(x, \mu) &= x_{22} h_2(1) e^{-\mu x} \int_0^1 e^{-\mu(1-t)} (q_2(x) - q_2(t)) m_2(t) dt, \end{aligned}$$

x_{ij} – элементы $\Delta_0^{-1}(\mu)$, $q_1(x) = q(x)$, $q_2(x) = q(1-x)$ – элементы матрицы $Q(x)$.

ЛЕММА 9. *Имеют место следующие оценки:*

$$\int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} J_k(x, \mu) d\mu = O(\|m\|_1), \quad k = 1, \dots, 4. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим функцию $q(x)$ (соответственно $q_1(x)$ и $q_2(x)$) периодически с периодом 1. Так как $q(0) = q(1)$, полученная функция непрерывна и удовлетворяет условию Липшица.

Докажем (20) для $J_2(x, \mu)$. Имеем

$$\left| \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} J_2(x, \mu) d\mu \right| \leq c \int_0^1 |m_2(t)| dt \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} |x_{12}| \cdot |q_1(x) - q_2(t)| \cdot e^{-\operatorname{Re} \mu(1-x-t)} |d\mu|.$$

Используя периодичность $q(x)$, оценки из леммы 4 ($x_{12} = O(e^{-\mu})$), и неравенство $\sin \tau \geq c_1 \tau$ (так же, как в лемме 7), получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\operatorname{Re} \mu(2-x-t)} |q(x) - q(1-t)| r_1 d\varphi \\ &= O \left(\int_0^{\pi/2} e^{-r_1 c_1 \varphi(2-x-t)} |q(x) - q(2-t)| r_1 d\varphi \right) \\ &= O \left(\int_0^{\pi/2} e^{-r_1 c_1 \varphi(2-x-t)} (2-x-t) r_1 d\varphi \right) \\ &= O \left(\int_0^{\pi r_1(2-x-t)/2} e^{-c_1 \xi} d\xi \right) = O(1). \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость (20) для $k = 2$. Также доказывается (20) для остальных интегралов.

Из (11), леммы 7, лемм 8, 9 (и аналогичных им при $\operatorname{Re} \mu \leq 0$) следует

ЛЕММА 10. Если $\gamma \neq b$, $\gamma \neq b^{-1}$, то

$$\|\Omega_r(m)\|_\infty = O(\|m\|_1).$$

ЛЕММА 11. Пусть компоненты вектора $\tilde{D}^{-1}m$ имеют ограниченную производную и $U_0(\tilde{D}^{-1}m) = 0$. Тогда

$$Q(x)R_{0\mu}m - R_{0\mu}(Qm) = \mu^{-1}[Q(x)R_{0\mu}((\tilde{D}^{-1}m)') - R_{0\mu}((\tilde{D}^{-1}Qm)')].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{R}_\mu^0$ резольвента оператора $\tilde{D}^{-1}w'$, $U_0(w) = 0$. Тогда $R_{0\mu}m = \tilde{R}_\mu^0(\tilde{D}^{-1}m)$.

Пусть m удовлетворяет условиям леммы и $U_0(\tilde{D}^{-1}m) = 0$. Обозначим

$$\tilde{D}^{-1}(\tilde{D}^{-1}m)' - \mu\tilde{D}^{-1}m = g.$$

Тогда $\tilde{D}^{-1}m = \tilde{R}_\mu^0 g = \tilde{R}_\mu^0(\tilde{D}^{-1}(\tilde{D}^{-1}m)') - \mu\tilde{R}_\mu^0(\tilde{D}^{-1}m)$, откуда

$$\tilde{R}_\mu^0(\tilde{D}^{-1}m) = \mu^{-1}[\tilde{R}_\mu^0(\tilde{D}^{-1}(\tilde{D}^{-1}m)') - \tilde{D}^{-1}m]$$

или

$$R_{0\mu}m = \mu^{-1}[R_{0\mu}((\tilde{D}^{-1}m)') - \tilde{D}^{-1}m]. \quad (21)$$

Так как $q(0) = q(1) = 1$, то $Q(0) = Q(1) = E$ и $U_0(\tilde{D}^{-1}Qm) = 0$. Поэтому так же, как (21), получим

$$R_{0\mu}(Qm) = \mu^{-1}[R_{0\mu}((\tilde{D}^{-1}Qm)') - \tilde{D}^{-1}Qm]. \quad (22)$$

Учитывая перестановочность диагональных матриц $\tilde{D}^{-1}$ и $Q(x)$, из (21) и (22) получим утверждение леммы.

Так же, как в [4; теорема 2], доказываемся

ЛЕММА 12. Если m удовлетворяет условиям леммы 11, то

$$\|R_{0\mu}((\tilde{D}^{-1}m)')\|_{\infty} = O(\mathfrak{a}(|\operatorname{Re} \mu|)), \quad \|R_{0\mu}((\tilde{D}^{-1}Qm)')\|_{\infty} = O(\mathfrak{a}(|\operatorname{Re} \mu|)),$$

где $\mathfrak{a}(y) = (1 - e^{-y})/y$ при $y > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Если $\gamma \neq b$ и $\gamma \neq b^{-1}$, то для любой функции $m(x)$ с компонентами из $L[0, 1]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\Omega_r(m)\|_{\infty} = 0. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m удовлетворяет условиям леммы 11. Тогда, учитывая оценки из леммы 12, можно показать (так же, как в [4; теорема 3]), что

$$\begin{aligned} \|\Omega_r(m)\|_{\infty} &= O\left(\int_{|\mu|=r_1} \frac{|\mathfrak{a}(|\operatorname{Re} \mu|)|}{|\mu|} |d\mu|\right) = O\left(\frac{1}{r} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - e^{-r_1\varphi}}{r_1\varphi} r_1 d\varphi\right) \\ &= O\left(\frac{1}{r} \int_0^{\pi r_1/2} \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} d\xi\right) = O\left(\frac{1}{r} + \frac{\ln r}{r}\right). \end{aligned}$$

Отсюда, так как множество таких $m(x)$ всюду плотно в $L^2[0, 1]$ ($L^2[0, 1]$ – множество интегрируемых вектор-функций размерности 2), и из леммы 10 по теореме Банаха–Штейнгауза следует (23).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно следствию из леммы 2, если $\int_0^1 p_1(t) dt = 0$, то $H_0(x) = \operatorname{diag}(h_1(x), h_1(1-x))$, $h_1(0) = h_1(1) = 1$. В этом случае теорема 2 справедлива, если в качестве $Q(x)$ взять $H_0(x)$.

4. Перейдем к основным результатам статьи.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A(x) = \operatorname{diag}(a(x), a(1-x))$, $a(0) = a(1)$, $a(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1, $B(x) = \Gamma A(x) \Gamma^{-1}$, $\gamma \neq b$, $\gamma \neq b^{-1}$. Тогда для любой вектор-функции $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, $f(x) \in L[0, 1]$ имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|B(x) \tilde{S}_r(F, x) - \tilde{S}_r(BF, x)\|_{\infty} = 0, \quad (24)$$

где $\tilde{S}_r(F, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_{\lambda} F d\lambda$ – частичная сумма ряда Фурье вектор-функции $F(x)$ по СПФ оператора $\tilde{L}$, включающая слагаемые, для которых $|\lambda_k| < r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Сначала рассмотрим случай, когда $\int_0^1 p_1(t) dt = 0$. Используя леммы 1, 6, теорему 2 и замечание к ней, имеем

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_{\lambda} F d\lambda &= \int_{|\lambda|=r} \Gamma H(x, \lambda) v(x, \lambda; H^{-1}(x, \lambda) F_1) d\lambda \\ &= \int_{|\lambda|=r} \Gamma H_0(x) R_{0\mu}(H_0^{-1} F_1) d\lambda + o(1) \\ &= \int_{|\lambda|=r} \Gamma R_{0\mu}(H_0 H_0^{-1} F_1) d\lambda + o(1) = \int_{|\lambda|=r} \Gamma R_{0\mu}(F_1) d\lambda + o(1), \end{aligned}$$

где $\|o(1)\|_\infty \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Отсюда, снова используя теорему 2, получим

$$B(x) \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda F d\lambda = \Gamma A(x) \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(F_1) d\lambda + o(1) = \Gamma \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(AF_1) d\lambda + o(1). \quad (25)$$

В силу перестановочности диагональных матриц имеем

$$A(x)F_1 = A(x)D\Gamma^{-1}F = DA(x)\Gamma^{-1}F = D\Gamma^{-1}B(x)F.$$

Положим $\Phi(x) = B(x)F(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$. Легко проверить, что $\Phi(x)$ обладает тем же свойством симметрии, что и $F(x)$: $\varphi_2(x) = \varphi_1(1-x)$. Поэтому из (25), используя предыдущие рассуждения в обратном порядке, получим

$$\begin{aligned} B(x) \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda F d\lambda &= \Gamma \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(D\Gamma^{-1}\Phi(x)) d\lambda + o(1) \\ &= \Gamma \int_{|\lambda|=r} H_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}D\Gamma^{-1}\Phi(x)) d\lambda + o(1) \\ &= \int_{|\lambda|=r} \Gamma H(x, \lambda)v(x, \lambda; H^{-1}(x, \lambda)D\Gamma^{-1}\Phi(x)) d\lambda + o(1) \\ &= \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda \Phi d\lambda + o(1) = \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda (BF) d\lambda + o(1), \end{aligned}$$

откуда следует (24).

2) Пусть теперь $\int_0^1 p_1(t) dt = a \neq 0$.

Контуры, по которым ведется интегрирование в (24), целиком располагаются в области, образованной из λ -плоскости удалением чисел $\lambda_k = (2k\pi i + \ln \alpha_1)/2\omega$ вместе с круговыми окрестностями радиуса δ_0 . В любом кольце $r-d \leq |\lambda| \leq r+d$ ($d > 0$) количество таких окрестностей ограничено константой, не зависящей от r . Следовательно, количество слагаемых в $\tilde{S}_r(F, x)$, соответствующих этому кольцу, ограничено. Пусть γ_k – круговой контур из указанного кольца радиуса δ_0 с центром в λ_k . Покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \int_{\gamma_k} \tilde{R}_\lambda F d\lambda \right\|_\infty = 0. \quad (26)$$

Нетрудно показать (как, например, в [3]), что

$$\tilde{R}_\lambda F = \Gamma H(x, \lambda)v(x, \lambda; H^{-1}(x, \lambda)F_1) = \Gamma H_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}F_1) + O(\lambda^{-1}\|f\|_1),$$

откуда, учитывая оценку (13), получим, что $\|\tilde{R}_\lambda F\|_\infty = O(\|f\|_1)$ для любой функции $f \in L[0, 1]$, и

$$\left\| \int_{\gamma_k} \tilde{R}_\lambda F d\lambda \right\|_\infty = O(\|f\|_1). \quad (27)$$

Пусть теперь $f(x) \in C^1[0, 1]$ и $f(0) = \gamma f(1)$. Тогда, положив $Lf = g$, из $Lf - \lambda f = g - \lambda f$ получим

$$R_\lambda f = -\frac{f}{\lambda} + \frac{R_\lambda g}{\lambda}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_k} R_\lambda f d\lambda \right| &= \left| \int_{\gamma_k} \frac{R_\lambda g}{\lambda} d\lambda \right| = \left| \int_{\gamma_k} (\tilde{R}_\lambda G)_1 \frac{d\lambda}{\lambda} \right| \\ &= O\left(\int_{\gamma_k} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|} \right) = o(1) \quad \text{при } k \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

здесь $G(x) = (g(x), g(1-x))^T$. Отсюда и из (27) следует (26). А следовательно,

$$\left\| \int_{|\lambda|=r+d} \tilde{R}_\lambda F d\lambda - \int_{|\lambda|=r-d} \tilde{R}_\lambda F d\lambda \right\|_\infty = o(1) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Рассмотрим оператор

$$L_1 y = y'(1-x) + \alpha y'(x) + \tilde{p}_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad y(0) = \gamma y(1),$$

где $\tilde{p}_1(x) = p_1(x) - a$. Тогда $\int_0^1 \tilde{p}_1(t) dt = 0$, и для соответствующего L_1 оператора $\tilde{L}_1$ имеет место (24). Так как $R_\lambda f = R_{\lambda+a}^1 f$ (R_λ^1 – резольвента L_1), и соответственно, $\tilde{R}_\lambda F = \tilde{R}_{\lambda+a}^1 F$ ($\tilde{R}_\lambda^1$ – резольвента $\tilde{L}_1$), то в силу (26) и (28)

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda F d\lambda &= \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_{\lambda+a}^1 F d\lambda = \int_{|\lambda-a|=r} \tilde{R}_\lambda^1 F d\lambda \\ &= \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda^1 F d\lambda - \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda^1 F d\lambda + \int_{|\lambda-a|=r} \tilde{R}_\lambda^1 F d\lambda \\ &= \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda^1 F d\lambda + \int_{|\lambda|=r+|a|} \tilde{R}_\lambda^1 F d\lambda - \int_{|\lambda|=r-|a|} \tilde{R}_\lambda^1 F d\lambda + o(1) \\ &= \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda^1 F d\lambda + o(1), \end{aligned}$$

откуда следует соотношение (24) для $\tilde{R}_\lambda F$.

ТЕОРЕМА 4. Если $a(x) = a(1-x)$ и $a(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1, $\gamma \neq b$, $\gamma \neq b^{-1}$, и $p_i(x) \in C^1[0, 1]$, то для любой функции $f(x) \in L[0, 1]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|a(x)S_r(f, x) - S_r(af, x)\|_\infty = 0, \quad (29)$$

где $S_r(f, x) = -(1/2\pi i) \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda$ – частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по СПФ оператора L , включающая слагаемые, для которых $|\lambda_k| < r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $R_\lambda f = (\tilde{R}_\lambda F)_1$, где $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$. Положим $A(x) = \text{diag}(a(x), a(1-x))$. Тогда в теореме 3 $B(x) = \Gamma A(x) \Gamma^{-1} = A(x)E = a(x)E$ (так как $a(x) = a(1-x)$), и (24) переходит в соотношение

$$a(x) \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda F d\lambda = \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda (aF) d\lambda + o(1). \quad (30)$$

Отсюда, рассматривая первые компоненты, получим

$$a(x) \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda = \int_{|\lambda|=r} R_\lambda (af) d\lambda + o(1)$$

(так как $a(x)F = (a(x)f(x), a(1-x)f(1-x))^T$), откуда следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Если $a(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1, $a(0) = a(1)$, и $\gamma = 1$, то для любой функции $f(x) \in L[0, 1]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|a(x)S_r(f, x) - S_r(af, x)\|_\infty = 0. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве $\tilde{L}$ возьмем тот же оператор, но с краевыми условиями (2), в которых $M_0 = E$, $M_1 = -E$. Все вышеприведенные рассуждения относительно $\tilde{L}$ и $\tilde{R}_\lambda$ сохраняются, но теперь $R_{0\mu}m = (R_{\lambda\omega}^0 m_1, R_{-\lambda\omega}^0 m_2)^T$, где R_λ^0 – резольвента оператора y' , $y(0) = y(1)$. Поэтому имеем

$$(\Gamma R_{0\mu}(D\Gamma^{-1}F))_1 = \frac{1}{1-b^2} (R_{\lambda\omega}^0(\omega(f_1 - bf_2)) + bR_{-\lambda\omega}^0(-\omega(-bf_1 + f_2))).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\Gamma R_{0\mu}(D\Gamma^{-1}F))_1 d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i(1-b^2)} \int_{|\mu|=r_1} [R_\mu^0(f_1 - bf_2) + bR_\mu^0(-bf_1 + f_2)] d\mu \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r_1} R_\mu^0 f d\mu = \sigma_{r_1}(f, x), \end{aligned}$$

где $\sigma_{r_1}(f, x)$ – частичная сумма обычного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ по системе $\{e^{2k\pi i x}\}_{k=-\infty}^\infty$ для тех k , для которых $|2\pi k| < r_1$. Поэтому

$$\begin{aligned} a(x)S_r(f, x) &= -\frac{a(x)}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\tilde{R}_\lambda F)_1 d\lambda \\ &= -\frac{a(x)}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\Gamma R_{0\mu}(D\Gamma^{-1}F))_1 d\lambda + o(1) = a(x)\sigma_{r_1}(f, x) + o(1). \end{aligned} \quad (32)$$

По теореме Штейнгауза [1; с. 111] $a(x)\sigma_{r_1}(f, x) = \sigma_{r_1}(af, x) + o(1)$. Используя предыдущие рассуждения в обратном порядке, будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{r_1}(af, x) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\tilde{R}_\lambda(AF))_1 d\lambda + o(1) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda(af) d\lambda + o(1) = S_r(af, x) + o(1). \end{aligned} \quad (33)$$

Из (32) и (33) следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [2] М. Ш. Бурлуцкая, В. П. Курдюмов, А. С. Луконина, А. П. Хромов, “Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией”, *Докл. РАН*, **414**:4 (2007), 443–446.
- [3] М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов, “О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл”, *Дифференц. уравнения*, **43**:12 (2007), 1597–1605.

- [4] В. В. Корнев, А. П. Хромов, “О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях”, *Матем. сб.*, **192**:10 (2001), 33–50.
- [5] А. П. Хромов, “Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях”, *Матем. сб.*, **197**:11 (2006), 115–142.

М. Ш. Бурлуцкая

Воронежский государственный университет

E-mail: burlutskaya@math.vsu.ru

Поступило

29.04.2009

А. П. Хромов

Саратовский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru