Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Андреев, Минимальный дизайн 11-го порядка на трехмерной сфере, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 489–497

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm863>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:47:32

УДК 514.174+517.5

МИНИМАЛЬНЫЙ ДИЗАЙН 11-ГО ПОРЯДКА НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

Н. Н. Андреев

В статье доказывается, что 120 вершин правильного четырехмерного многогранника с символом Шлефли $\{3, 3, 5\}$ являются минимальным сферическим дизайном 11-го порядка на S^3 . Показывается, что заряды, расположенные в этих вершинах, доставляют минимум потенциальной энергии системы из 120 равных зарядов, расположенных на S^3 .

Библиография: 23 названия.

Пусть $S^{m-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 = 1\}$ – единичная сфера в m -мерном евклидовом пространстве; для $x, y \in \mathbb{R}^m$ через xy обозначим скалярное произведение векторов; $|x| = \sqrt{xx}$.

Конечное множество точек $X = \{x^{(k)}\}_{k=1}^N \subset S^{m-1}$ называется *взвешенным дизайном порядка q* , если кубатурная формула

$$\frac{1}{\text{mes } S^{m-1}} \int_{S^{m-1}} f(x) dx = \sum_{k=1}^N p_k f(x^{(k)}), \quad \sum_{k=1}^N p_k = 1, \quad (1)$$

верна для всех алгебраических полиномов $f(x)$ степени не выше q (под *степенью* монома $x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$ понимается сумма показателей $\alpha_1 + \dots + \alpha_m$). В этой статье рассматривается лишь случай положительных весов:

$$\forall k \quad p_k > 0.$$

Основная задача состоит в нахождении множеств X и весов $\{p_k\}$, для которых выполняется (1). Особый интерес представляют множества X , содержащие минимальное количество точек, необходимое для выполнения (1). Такие множества называются *минимальными взвешенными дизайнами*. Отдельный интерес представляет случай равных весов. В этом случае употребляются термины *дизайн* и *минимальный дизайн*.

Простейший минимальный дизайн – две противоположные точки сферы S^{m-1} , являющиеся минимальным дизайном первого порядка. Примерами дизайнов являются вершины некоторых правильных многогранников. Так правильный симплекс, вписанный в сферу S^{m-1} (множество из $m+1$ точки с равными попарными расстояниями), является минимальным дизайном 2-го порядка для любого m . Октаэдр, вписанный в сферу

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01210.

(множество точек пересечения S^{m-1} с координатными осями), является минимальным дизайном 3-го порядка в любой размерности. Вершины икосаэдра образуют минимальный дизайн порядка 5. В то же время вершины куба и додекаэдра, являясь дизайнами соответственно 3-го и 5-го порядка, не являются минимальными. Все вышеперечисленные минимальные дизайны являются минимальными и в классах взвешенных дизайнов соответствующих порядков. В общей ситуации это не всегда так (см., например, [1]).

Количество точек минимального взвешенного дизайна порядка q на S^{m-1} будем обозначать $N(m, q)$, а минимального дизайна с равными весами — $N^*(m, q)$; очевидно, $N^*(m, q) \geq N(m, q)$. Оценкам снизу мощности минимальных дизайнов посвящен ряд работ. В [2] получена оценка

$$N^*(m, q) \geq \begin{cases} \binom{m+s-1}{m-1} + \binom{m+s-2}{m-1}, & q = 2s, \\ 2 \binom{m+s-1}{m-1}, & q = 2s+1. \end{cases}$$

При $m = 4$ и $q = 11$ из нее следует неравенство $N^*(4, 11) \geq 112$. В работах [3], [4] получена оценка $N^*(4, 11) \geq 117$. В то же время 120 вершин правильного многогранника четырехмерного евклидова пространства с символом Шлефли $\{3, 3, 5\}$ [5] — 8 вершин вида $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 1)$; 16 вершин вида $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$ и 96 вершин, полученных из 8 точек вида $(\pm(\sqrt{5} + 1)/4, \pm 1/2, \pm(\sqrt{5} - 1)/4, 0)$ четными перестановками координат, — являются [6] дизайном 11-го порядка и, значит, $N^*(4, 11) \leq 120$. Совокупность приведенных 120 точек будет обозначаться $\mathcal{M}$.

За последние годы доказана минимальность лишь нескольких дизайнов (см. обзор [7] и работу [1]). В этой статье доказывается минимальность еще одного дизайна в классе взвешенных дизайнов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть множество $X = \{x^{(k)}\}_{k=1}^N \subset S^3$ есть минимальный взвешенный дизайн порядка 11 с положительными весами. Тогда

$$N(4, 11) = N^*(4, 11) = 120.$$

Для доказательства оценок снизу будет использоваться соображение Дельсарта [8], получившее развитие в работах [3], [9]–[13]. Оно базируется на свойствах системы многочленов Гегенбауэра $\{G_\nu^{(m)}(t)\}_{\nu=0}^\infty$, ортогональных на интервале $(-1, 1)$ с весом $(1 - t^2)^{(m-3)/2}$ и с нормировкой $G_\nu^{(m)}(1) = 1$:

$$G_0^{(m)}(t) = 1, \quad G_1^{(m)}(t) = t, \quad G_2^{(m)}(t) = \frac{mt^2 - 1}{m-1}, \quad \dots, \\ (\nu + m - 2)G_{\nu+1}^{(m)}(t) = (2\nu + m - 2)tG_\nu^{(m)}(t) - \nu G_{\nu-1}^{(m)}(t).$$

В геометрических задачах используется положительная определенность многочленов Гегенбауэра [14, с. 318]: для любого конечного множества точек $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ из S^{m-1} , любого $\nu \in \mathbb{N}$ и любых $\xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство

$$\sum_{k,l=1}^N G_\nu^{(m)}(x^{(k)}x^{(l)})\xi_k\bar{\xi}_l \geq 0.$$

В дальнейшем нам будет удобнее пользоваться эквивалентным определением понятия взвешенного дизайна порядка q как множества точек $X = \{x^{(k)}\}_{k=1}^N \subset S^{m-1}$, для которого справедливы равенства

$$\sum_{k,l=1}^N G_{\nu}^{(m)}(x^{(k)}x^{(l)})p_k p_l = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, q.$$

Наряду со взвешенными дизайнами порядка q , рассматриваемыми выше, будем использовать понятие D -дизайна, по-видимому введенное Дельсартом (см. [15]). Множество точек $X = \{x^{(k)}\}_{k=1}^N \subset S^{m-1}$ называется *взвешенным D -дизайном*, где $D \subset \mathbb{N}$ есть подмножество натурального ряда, если справедливы равенства

$$\sum_{k,l=1}^N G_{\nu}^{(m)}(x^{(k)}x^{(l)})p_k p_l = 0, \quad \nu \in D.$$

При $D = \{1, 2, \dots, q\}$ это есть классический взвешенный дизайн порядка q . Многие дизайны порядка q являются D -дизайнами для более широкого, чем $\{1, 2, \dots, q\}$, множества D , и, как будет следовать из дальнейшего, этот факт иногда оказывается важным при оценке мощности дизайнов и в других вопросах. Так, например, $\mathfrak{M}$, являясь, как уже было отмечено, дизайном 11-го порядка, является [16] $D_{\mathfrak{M}}$ -дизайном для

$$D_{\mathfrak{M}} = \{\text{все нечетные натуральные числа}\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10, 14, 16, 18, 22, 26, 28, 34, 38, 46, 58\}. \quad (2)$$

Через $N(m, D)$ будем обозначать количество точек минимального взвешенного D -дизайна. В статье будут сформулированы экстремальные задачи теории функций, позволяющие оценивать снизу мощность D -дизайнов.

Конструкции, являющиеся дизайнами, оказываются решением некоторых задач дискретной геометрии об экстремальном расположении точек на сфере. Рассмотрим задачу о расположении зарядов на сфере, минимизирующем потенциальную энергию системы. Пусть в точках $\{x^{(k)}\}_{k=1}^N \subset S^{m-1}$ расположены единичные заряды. Функционал, обобщающий потенциальную энергию системы зарядов, расположенных в 3-мерном евклидовом пространстве, имеет вид

$$W(m, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^N \frac{1}{|x^{(k)} - x^{(l)}|^{m-2}}, \quad m \geq 3.$$

Требуется найти расположение зарядов на сфере, минимизирующее этот функционал, т.е. величину

$$W(m, N) = \inf_{\{x^{(k)}\}_{k=1}^N \subset S^{m-1}} W(m, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}),$$

и экстремальную конструкцию. История задачи начинается с экспериментов Томсона и описана в [17]–[19]. Значения параметров m и N , при которых решения известны, приведены в [20]. Следующая теорема дает решение еще одного частного случая этой задачи.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m = 4$ и $N = 120$. Тогда $W(4, 120) = 10790$; и экстремальная конструкция задается вершинами правильного многогранника с символом Шлефли $\{3, 3, 5\}$.

Перейдем к доказательству теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Вершины рассматриваемого многогранника являются дизайном 11-го порядка [6] и, следовательно, $N^*(4, 11) \leq 120$.

Оценку снизу получим в общем случае – для D -дизайнов при произвольных m и D . Идея получения оценки заимствована из [2], [3]. Отметим, что, хотя в [3] рассматривается только случай классических дизайнов с равными весами, все рассуждения и результаты верны и для случая взвешенных дизайнов с положительными весами.

Рассмотрим класс $\mathcal{K}(m, D)$ непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций $f(t)$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $f(t) \geq 0$, $-1 \leq t \leq 1$, $f(1) > 0$;
- 2) $f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_{\nu} G_{\nu}^{(m)}(t)$, где $\hat{f}_{\nu} \leq 0$ при $\nu \in \mathbb{N} \setminus D$.

Предположим, что множество $X = \{x^{(k)}\}_{k=1}^N \subset S^{m-1}$ является взвешенным D -дизайном с положительными весами $\{p_k\}_{k=1}^N$. Из положительности функции $f \in \mathcal{K}(m, D)$, весов p_k , а также из неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным найдем

$$I = \sum_{k,l=1}^N f(x^{(k)} x^{(l)}) p_k p_l \geq \sum_{k=1}^N f(x^{(k)} x^{(k)}) p_k^2 = f(1) \sum_{k=1}^N p_k^2 \geq f(1) \frac{(\sum_{k=1}^N p_k)^2}{N} = \frac{f(1)}{N}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k,l=1}^N f(x^{(k)} x^{(l)}) p_k p_l = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_{\nu} \sum_{k,l=1}^N G_{\nu}^{(m)}(x^{(k)} x^{(l)}) p_k p_l \\ &= \hat{f}_0 \sum_{k=1}^N p_k p_l + \sum_{\nu \in D} \hat{f}_{\nu} \sum_{k,l=1}^N G_{\nu}^{(m)}(x^{(k)} x^{(l)}) p_k p_l + \sum_{\nu \in \mathbb{N} \setminus D} \hat{f}_{\nu} \sum_{k,l=1}^N G_{\nu}^{(m)}(x^{(k)} x^{(l)}) p_k p_l. \end{aligned}$$

Так как X – взвешенный D -дизайн с весами $\{p_k\}$, то вторая сумма равна нулю. В силу положительной определенности многочленов Гегенбауэра и неположительности коэффициентов Фурье $\hat{f}_{\nu}$, участвующих в третьей сумме, она оказывается неположительной и, следовательно, справедливо неравенство

$$I \leq \hat{f}_0 \sum_{k,l=1}^N p_k p_l = \hat{f}_0 \left(\sum_{k=1}^N p_k \right)^2 = \hat{f}_0.$$

Объединяя полученные неравенства и учитывая, что $\hat{f}_0 > 0$ в силу условия 1), приходим к оценке снизу мощности взвешенного D -дизайна на S^{m-1} через решение экстремальной задачи теории функций

$$N(m, D) \geq \sup_{f \in \mathcal{K}(m, D)} \frac{f(1)}{\hat{f}_0}. \quad (3)$$

Для оценки снизу мощности взвешенного дизайна порядка q следует рассмотреть $D = \{1, 2, \dots, q\}$. Имеем

$$N(m, q) \geq \sup_{f \in \mathcal{K}(m, \{1, 2, \dots, q\})} \frac{f(1)}{\widehat{f_0}}. \quad (4)$$

Вернемся к нашему случаю $m = 4$ и $q = 11$. Для доказательства того, что $\mathfrak{M}$ является минимальным дизайном 11-го порядка, будет решаться следующая экстремальная задача.

Пусть $D_{\mathfrak{M}}$ определено равенством (2). Рассмотрим класс $\mathcal{K}^*(4, D_{\mathfrak{M}})$ непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций $f(t)$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $f(t) \geq 0$, $-1 \leq t \leq 1$, $f(1) > 0$;
- 2) $f(t) = \sum_{\nu \in D_{\mathfrak{M}}} \widehat{f_{\nu}} G_{\nu}^{(m)}(t)$ и $\widehat{f_{\nu}} \leq 0$ при $\nu > 12$.

Так как $\mathcal{K}^*(4, D_{\mathfrak{M}}) \subset \mathcal{K}(4, \{1, 2, \dots, 11\})$ ввиду рассматриваемого $D_{\mathfrak{M}}$ и условия 2), то для мощности взвешенного дизайна порядка 11 на S^3 имеет место оценка

$$N(4, 11) \geq \sup_{f \in \mathcal{K}^*(4, D_{\mathfrak{M}})} \frac{f(1)}{\widehat{f_0}}. \quad (5)$$

Выберем функцию $f(t) \in \mathcal{K}^*(4, D_{\mathfrak{M}})$ так, чтобы правая часть (5) стала максимальной. С этой целью рассмотрим семейство алгебраических многочленов

$$h_{\mu}(t) = (t+1)t^2 \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \left(t^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)^2 \left(t + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 \left(t - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 \\ \times \left(\frac{32768}{5} - \left(\frac{16384}{3} + \mu\right)t + \mu t^2\right).$$

Разложим их в ряд Фурье по системе многочленов Гегенбауэра

$$h_{\mu}(t) = \widehat{(h_{\mu})_0} G_0^{(4)}(t) + \widehat{(h_{\mu})_1} G_1^{(4)}(t) + \dots + \widehat{(h_{\mu})_{17}} G_{17}^{(4)}(t).$$

Имеем

$$\begin{array}{lll} \widehat{(h_{\mu})_0} = 1, & \widehat{(h_{\mu})_1} = \frac{12}{5} - \frac{13\mu}{65536}, & \widehat{(h_{\mu})_2} = \frac{149}{20}, \\ \widehat{(h_{\mu})_3} = \frac{118}{15} - \frac{9\mu}{16384}, & \widehat{(h_{\mu})_4} = \frac{59}{4}, & \widehat{(h_{\mu})_5} = \frac{64}{5} - \frac{45\mu}{65536}, \\ \widehat{(h_{\mu})_6} = \frac{539}{30}, & \widehat{(h_{\mu})_7} = \frac{72}{5} - \frac{\mu}{2048}, & \widehat{(h_{\mu})_8} = \frac{153}{10}, \\ \widehat{(h_{\mu})_9} = 12, & \widehat{(h_{\mu})_{10}} = \frac{77}{10}, & \widehat{(h_{\mu})_{11}} = \frac{36}{5} + \frac{9\mu}{16384}, \\ \widehat{(h_{\mu})_{12}} = 0, & \widehat{(h_{\mu})_{13}} = \frac{14}{5} + \frac{49\mu}{65536}, & \widehat{(h_{\mu})_{14}} = -\frac{11}{4}, \\ \widehat{(h_{\mu})_{15}} = \frac{8}{15} + \frac{\mu}{2048}, & \widehat{(h_{\mu})_{16}} = -\frac{17}{12}, & \widehat{(h_{\mu})_{17}} = \frac{9\mu}{65536}. \end{array}$$

Покажем, что многочлены $h_{\mu}(t) \in \mathcal{K}^*(4, D_{\mathfrak{M}})$ при $\mu \in [-90112/15, -131072/35]$. Условие 1) будет выполнено, если квадратный трехчлен, стоящий последним множителем в определении $h_{\mu}(t)$, будет неотрицательным на $[-1, 1]$. Это имеет место при отрицательных $\mu \geq -90112/15$. При $\mu \leq -131072/35$ все коэффициенты Фурье полинома

$h_\mu(t)$ с номерами большими 12 неположительны, а двенадцатый коэффициент и все коэффициенты с номерами большими 17 равны нулю, значит условие 2) тоже выполнено.

Так как $h_\mu(1) = \sum_{\nu=0}^{17} (\widehat{h_\mu})_\nu = 120$ для любого $\mu \in \mathbb{R}$, любой многочлен из указанного семейства при $\mu \in [-90112/15, -131072/35]$ дает требуемую оценку $N(4, 11) \geq 120$.

Ввиду неравенств $120 \geq N^*(4, 11) \geq N(4, 11)$ теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА [21, с. 71]. Пусть $z, c, z_1, \dots, z_s \in \mathbb{C}$, все $z_k \neq c$ и различны; $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}_+$, $n = n_1 + \dots + n_s$. Для функции

$$f(z) = \frac{1}{c - z}$$

интерполяционный полином $p_{n-1}(z)$ степени $n - 1$, удовлетворяющий соотношениям

$$p_{n-1}^{(l)}(z_k) = f^{(l)}(z_k), \quad k = 1, \dots, s, \quad l = 0, \dots, n_k - 1, \quad (6)$$

имеет вид

$$p_{n-1}(z) = \frac{1}{c - z} - \frac{\omega(z)}{\omega(c)(c - z)}, \quad (7)$$

где $\omega(z) = (z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_s)^{n_s}$.

Ввиду простоты приведем доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приводя к общему знаменателю правую часть (7), убеждаемся, что она определяет полином по z степени $n - 1$: $\omega(z)$ есть полином по z степени n , а в точке $z = c$ особенности нет, так как числитель тоже обращается в нуль. Дифференцируя и подставляя $z = z_k$, убеждаемся, что условия (6) выполнены. В силу единственности интерполяционного полинома степени $n - 1$, определенного равенствами (6), лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Оценку сверху $W(4, 120) \leq 10790$ дают заряды, расположенные в 120 вершинах многогранника $\{3, 3, 5\}$.

Оценим $W(m, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$ снизу. Пусть $\{x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\} \subset S^{m-1}$ — произвольный набор точек на сфере, в которых расположены единичные заряды. Так как $x^{(k)} \in S^{m-1} \forall k$, то

$$|x^{(k)} - x^{(l)}| = \sqrt{|x^{(k)} - x^{(l)}|^2} = \sqrt{2(1 - x^{(k)}x^{(l)})}.$$

Тогда

$$W(m, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^N \frac{1}{|x^{(k)} - x^{(l)}|^{m-2}} = \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^N \frac{1}{\{2(1 - x^{(k)}x^{(l)})\}^{(m-2)/2}}.$$

Рассмотрим класс $\mathcal{F}(m)$ непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций $f(t)$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $f(t) \leq 1/\{2(1 - t)\}^{(m-2)/2}$, $-1 \leq t \leq 1$;
- 2) $f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \widehat{f}_\nu G_\nu^{(m)}(t)$, $\widehat{f}_\nu \geq 0$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$.

Пусть $f(t) \in \mathcal{F}(m)$. В силу условия 1) можно записать

$$\begin{aligned} W(m, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) &\geq \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^N f(x^{(k)} x^{(l)}) = \sum_{k, l=1}^N f(x^{(k)} x^{(l)}) - N f(1) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_{\nu} \sum_{k, l=1}^N G_{\nu}^{(m)}(x^{(k)} x^{(l)}) - N f(1). \end{aligned}$$

Пользуясь положительной определенностью многочленов Гегенбауэра, их нормировкой, а также неотрицательностью коэффициентов Фурье функции $f \in \mathcal{F}(m)$, продолжим оценку

$$W(m, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) \geq N^2 \hat{f}_0 - N f(1).$$

Ввиду произвольности набора точек $\{x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\} \subset S^{m-1}$ приходим к оценке снизу для функционала энергии через решение экстремальной задачи

$$W(m, N) \geq \sup_{f \in \mathcal{F}(m)} \{N^2 \hat{f}_0 - N f(1)\}. \quad (8)$$

Пусть теперь $m = 4$ и $N = 120$. Рассмотрим функцию

$$y(t) = \frac{1}{2(1-t)},$$

участвующую в определении класса $\mathcal{F}(4)$, и многочлен $h(t)$ с разложением по многочленам Гегенбауэра

$$h(t) = \hat{h}_0 G_0^{(4)}(t) + \hat{h}_1 G_1^{(4)}(t) + \dots + \hat{h}_{17} G_{17}^{(4)}(t),$$

где

$$\begin{aligned} \hat{h}_0 &= \frac{65869}{79200}, & \hat{h}_1 &= \frac{132839}{99000}, & \hat{h}_2 &= \frac{827147}{528000}, & \hat{h}_3 &= \frac{62063}{39600}, \\ \hat{h}_4 &= \frac{49399}{35200}, & \hat{h}_5 &= \frac{18919}{16500}, & \hat{h}_6 &= \frac{61327}{72000}, & \hat{h}_7 &= \frac{5647}{9900}, \\ \hat{h}_8 &= \frac{29453}{88000}, & \hat{h}_9 &= \frac{1079}{6600}, & \hat{h}_{10} &= \frac{4363}{72000}, & \hat{h}_{11} &= \frac{289}{33000}, \\ \hat{h}_{12} &= 0, & \hat{h}_{13} &= \frac{161}{198000}, & \hat{h}_{14} &= \frac{97}{9600}, & \hat{h}_{15} &= \frac{203}{16500}, \\ & & \hat{h}_{16} &= \frac{2737}{316800}, & \hat{h}_{17} &= \frac{3}{500}. \end{aligned}$$

Непосредственно могут быть проверены следующие равенства:

$$h(t) = y(t) \quad (9)$$

при

$$\begin{aligned} t \in \left\{ -1, -\frac{1+\sqrt{5}}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}, 0, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \right. \\ \left. \frac{2363-i\sqrt{169319}}{2112}, \frac{2363+i\sqrt{169319}}{2112} \right\}; \end{aligned}$$

и

$$h'(t) = y'(t) \quad (10)$$

при

$$t \in \left\{ -1, -\frac{1+\sqrt{5}}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}, 0, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right\}.$$

Покажем, что многочлен $h(t) \in \mathcal{F}(4)$. Условие 2) выполнено в силу самого определения $h(t)$. С учетом (9) и (10) из леммы следует, что

$$h(t) = \frac{1}{2(1-t)} - \frac{\omega(t)}{2\omega(1)(1-t)},$$

где

$$\begin{aligned} \omega(t) &= t^2(t+1)^2 \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^2 \left(t^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{8} \right)^2 \left(t + \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^2 \left(t - \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^2 \\ &\quad \times \left(\left(t - \frac{2363}{2112} \right)^2 + \frac{169319}{2112^2} \right). \end{aligned}$$

Так как $\omega(t) \geq 0$ при $t \in [-1, 1]$, то

$$h(t) \leq \frac{1}{2(1-t)}, \quad t \in [-1, 1],$$

что и требуется в условии 1) определения класса $\mathcal{F}(4)$.

Подставляя значения $h_0 = 65869/79200$ и $h(1) = 1631/165$ в (8), получаем $W(4, 120) \geq 10790$. Оценка снизу совпадает с оценкой сверху, что и доказывает теорему 2.

Отметим, что, как и в задаче (5), в задаче (8) экстремальным является однопараметрическое семейство многочленов, которое не приводится здесь из-за своей громоздкости.

Конфигурация точек $\mathcal{M}$, образованная вершинами многогранника $\{3, 3, 5\}$, является решением ряда классических задач дискретной геометрии. В [22] (см. также [23]) показывается, что это есть максимальный сферический $\cos \frac{\pi}{5}$ -код. Здесь было доказано, что $\mathcal{M}$ является минимальным сферическим дизайном 11-го порядка на S^3 , а также наилучшим расположением точек в смысле задачи об энергии. Вершины рассматриваемого многогранника являются экстремальными и в некоторых других задачах дискретной геометрии, например в задаче Фейеш Тота. Так на $\mathcal{M}$ достигаются верхние грани

$$\sup_{\{x^{(k)}\}_{k=1}^{120} \subset S^3} \sum_{k,l=1}^{120} |x^{(k)} - x^{(l)}|, \quad \sup_{\{x^{(k)}\}_{k=1}^{120} \subset S^3} \prod_{k,l=1}^{120} |x^{(k)} - x^{(l)}|;$$

в частности,

$$\begin{aligned} \sup_{\{x^{(k)}\}_{k=1}^{120} \subset S^3} \prod_{k,l=1}^{120} |x^{(k)} - x^{(l)}| &= 2^{-7151} 3^{600} 5^{192} (3 + \sqrt{5})^{1968} (5 + 2\sqrt{5})^{336} \\ &\quad \times (7 + 3\sqrt{5})^{240} (1 - \sqrt{5})^{5904}. \end{aligned}$$

Доказательства этих фактов по сути повторяют доказательство теоремы 2. Они требуют еще больших вычислений и поэтому здесь не приводятся.

В заключение я выражаю искреннюю благодарность В. А. Юдину, из многочисленных обсуждений с которым возникла эта статья, а также П. А. Бородину, Д. В. Горбачеву, В. И. Иванову и В. И. Левенштейну за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hardin R. H., Sloane N. J. A. Expressing $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^3$ as a sum of 23 sixth powers // J. Combin. Theory. Ser. A. 1994. V. 68. P. 481–485.
- [2] Delsarte P., Goethals J. M., Seidel J. J. Spherical codes and designs // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.
- [3] Юдин В. А. Нижние оценки для сферических дизайнов // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 3. С. 213–223.
- [4] Nikova S., Boyvalenkov P. Improvements of the lower bounds of the size of some spherical designs // Mathematika Balkanica. (to appear).
- [5] Берже М. Геометрия. Т. 1. М.: Мир, 1984.
- [6] Салихов Г. Н. Кубатурные формулы для гиперболы, инвариантные относительно группы правильного 600-гранника // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 5. С. 1075–1078.
- [7] Seidel J. J. Isometric embeddings and geometric designs // Discrete Math. 1994. V. 136. P. 281–293.
- [8] Delsarte Ph. Bounds for unrestricted codes, by linear programming // Philips Res. Rep. 1972. V. 2. P. 272–289.
- [9] Кабатянский Г. А., Левенштейн В. И. О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Пробл. передачи информации. 1978. Т. 14. № 1. С. 3–25.
- [10] Левенштейн В. И. О границах для упаковок в n -мерном евклидовом пространстве // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. С. 1299–1303.
- [11] Сидельников В. М. Об экстремальных многочленах, используемых при оценках мощности кода // Пробл. передачи информации. 1980. Т. 16. № 3. С. 17–30.
- [12] Юдин В. А. Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов // Дискретная матем. 1992. Т. 4. № 2. С. 115–121.
- [13] Арестов В. В., Бабенко А. Г. О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 44–73.
- [14] Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Т. 1. М.: Мир, 1990.
- [15] Delsarte Ph., Levenstein V. I. Association schemes and coding theory // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. V. 44. № 6. P. 2477–2504.
- [16] Andreev N. N., Yudin V. A. Approximation problems in discrete geometry // Advances in Multivariate Approximations / ed. W. Haussmann, K. Jetter, M. Reimer (to appear).
- [17] Тот Л. Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматлит, 1958.
- [18] Whyte L. L. Unique arrangements of points on a sphere // Amer. Math. Monthly. 1952. V. 59. № 9. P. 606–611.
- [19] Björk G. Distributions of positive mass, which maximise a certain generalised energy integral // Ark. Math. 1956. V. 3. P. 255–269.
- [20] Андреев Н. Н. Расположение точек на сфере с минимальной энергией // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 27–31.
- [21] Уолш Дж. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961.
- [22] Андреев Н. Н. Один сферический код // УМН. 1999. Т. 54. № 1. С. 255–256.
- [23] Ericson T., Zinoviev V. Spherical codes (to appear).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: andreev@mech.math.msu.ru

Поступило
05.04.1999
Исправленный вариант
08.07.1999