Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ф. Лукомский, О системе Хаара на произведении групп целых p -адических чисел, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 4, 541–557

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8631>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 18:25:52

О системе Хаара на произведении групп целых p -адических чисел

С. Ф. Лукомский

На произведении групп целых p -адических чисел приводится алгоритм построения операторов растяжения и строится система функций Хаара, которые получаются из одной функции с помощью операций сжатия, сдвига и возведения в степень. В двумерном случае указываются все базисы Хаара.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. В последние годы значительный интерес вызывают вопросы построения всплесковых базисов на группах (или полях) p -адических чисел. Под *всплесковыми системами* мы понимаем системы, полученные из одной или нескольких функций с помощью сжатий и сдвигов. Такие системы называют иногда *системами типа Хаара*. Первые всплесковые p -адические базисы были построены в работах Козырева [1], [2]. При $p = 2$ полученный Козыревым базис есть аналог классического вещественного базиса Хаара. Отметим, что найденные им всплесковые p -адические базисы являются собственными функциями p -адических псевдодифференциальных операторов. В дальнейшем при построении всплесковых базисов использовали кратномасштабный анализ (КМА). Албеверио, Евдокимов, Шелкович, Хренников, Скопина в работах [3]–[5] ввели понятие p -адического КМА с ортогональной масштабирующей функцией, описали общую схему их построения и, как следствие, получили ортогональные всплесковые p -адические базисы. В [3] доказано, что в p -адическом анализе не существует одномерных КМА, кроме КМА Хаара. Всплесковые базисы Рисса в поле p -адических чисел построены в [6]. Нерешенными в настоящее время являются задачи построения на произведении групп p -адических чисел как всплесковых базисов, так и КМА. Основная трудность здесь заключается в определении многомерного оператора растяжения. Автору известен лишь один результат в этом направлении, принадлежащий Кинг и Скопиной [7], которые в двумерном случае при $p = 2$ доказали, что “шахматная матрица” определяет оператор растяжения, а значит, и КМА.

В этой статье мы укажем алгоритм построения ортонормированных всплесковых базисов в $L_2(\mathbb{Z}_p^d)$, т.е. на произведении групп целых p -адических чисел. В одномерном случае такой базис совпадает с базисом Хаара, введенным в [8], поэтому мы

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00097-а) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4383.2010.1).

будем называть его базисом Хаара. Каждый такой базис порождается некоторым оператором растяжения, который в свою очередь порождается матрицей размерности $d \times d$, составленной из чисел $a_i^{(j)} = 0, \dots, p-1$. Мы укажем алгоритм построения такой матрицы. В качестве примера рассмотрим базис Хаара, порожденный единичной матрицей. В заключение мы подробно рассмотрим случай размерности $d = 2$, выпишем все двумерные базисы Хаара и укажем достаточные условия, при которых двумерный оператор растяжения выражается через одномерный.

Отметим, что рассматриваемые многомерные функции Хаара не являются произведениями одномерных хааровских функций и получаются из одной функции с помощью операций возведения в степень, сжатий и сдвигов.

2. Компактные нульмерные группы и их характеры. Вспомогательные понятия. Задачу построения системы Хаара на произведении групп целых p -адических чисел мы сведем к аналогичной задаче на одномерной компактной нульмерной группе специального вида. Поэтому вначале приведем необходимые сведения, связанные с анализом на нульмерных группах. Подробно с этими понятиями можно ознакомиться в [9]. Пусть $(G, +)$ – компактная нульмерная абелева группа, топология в которой задана системой вложенных подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \dots \quad (2.1)$$

таких, что $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$. Это означает, что базу топологии в G образуют смежные классы

$$(G_n + g : n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, g \in G),$$

из которых любые два либо не пересекаются, либо один включается в другой. Из компактности G следует, что все фактор-группы G_n/G_{n+1} конечны. Обозначим через p_n порядок такой фактор-группы. Можно считать, что все p_n – простые числа, так как в противном случае, используя теорему Силова [10; гл. 4], можно уплотнить цепочку подгрупп так, что порядки фактор-групп G_n/G_{n+1} станут простыми числами. Систему подгрупп (2.1) называют в этом случае *основной цепочкой подгрупп*, а последовательность (p_n) – образующей последовательностью. Обозначим $\mathfrak{m}_0 = 1$, $\mathfrak{m}_{n+1} = \mathfrak{m}_n \cdot p_n$. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ группа G есть дизъюнктное объединение $\mathfrak{m}_n$ смежных классов $G_n + q_j$, $j = 0, \dots, \mathfrak{m}_n - 1$. Все смежные классы в объединении с пустым множеством образуют полукольцо $\mathcal{K}$. На $\mathcal{K}$ можно ввести меру μ равенством

$$\mu(G_n + q_j) = \mu G_n = \frac{1}{\mathfrak{m}_n}.$$

После этого меру μ можно продолжить на σ -алгебру μ^* измеримых множеств, например, по схеме Каратеодори. Получим меру, инвариантную относительно сдвига. На борелевских множествах она совпадает с мерой Хаара.

На G можно определить интеграл по схеме Лебега, который инвариантен относительно сдвига и является абсолютно сходящимся. Характеры группы G будем обозначать через χ , а группу всех характеров – через X . Совокупность характеров χ таких, что для любого $x \in G_n$ $\chi(x) = 1$, называют *аннулятором* группы G_n и обозначают $G_n^\perp$. Аннуляторы образуют возрастающую цепочку подгрупп группы X

$$\{1\} = G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset G_2^\perp \subset \dots \subset G_n^\perp \subset G_{n+1}^\perp \subset \dots \quad (2.2)$$

такую, что $\bigcup_{n=0}^{\infty} G_n^{\perp} = X$. Фактор-группы $G_{n+1}^{\perp}/G_n^{\perp}$ конечны и имеют порядок p_n . При каждом $n \in \mathbb{N}_0$ выберем элемент $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и зафиксируем. Каждый элемент $x \in G_0$ однозначно представим в виде

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n, \quad a_n = 0, \dots, p_n - 1,$$

где сходимость понимается в смысле топологии, порожденной цепочкой подгрупп (2.1). Последовательность (g_n) будем называть *базисной последовательностью*.

При каждом $n \in \mathbb{N}_0$ выберем характер $r_n \in G_{n+1}^{\perp} \setminus G_n^{\perp}$. Тогда характер $\chi \in X$ однозначно представим в виде

$$\chi = \prod_{n=0}^{\infty} (r_n)^{a_n}, \quad a_n = 0, \dots, p_n - 1, \quad (2.3)$$

причем в произведении (2.3) лишь конечное число a_n отлично от нуля, т.е.

$$\chi = \prod_{n=0}^M (r_n)^{a_n}, \quad (2.4)$$

где число M определяется характером χ . Функции r_n будем называть *функциями Радемахера*. Каждая функция Радемахера r_n постоянна на смежном классе $G_{n+1} \dot{+} jg_n$, $j = 0, 1, \dots, p_n - 1$, причем

$$r_n(G_{n+1} \dot{+} jg_n) = r_n(g_n)^j.$$

Значения $r_n(g_n)$ суть корни из единицы степени p_n . Возводя в случае необходимости характер r_n в соответствующую степень, можно добиться, чтобы

$$r_n(g_n) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p_n}\right).$$

Мы всегда будем предполагать, что для функций Радемахера это равенство выполнено.

В группе характеров можно ввести нумерацию следующим образом. Если χ представлен в виде (2.4), то поставим ему в соответствие число

$$n = \sum_{k=0}^M a_k m_k$$

и соответствующий характер будем обозначать через χ_n . Известно [9; гл. III, § 2], что характеры $(\chi_n)_{n=0}^{\infty}$ образуют ортонормированную систему, замкнутую в $L_2(G)$.

Основным объектом изучения в настоящей статье являются группы целых p -адических чисел и их характеры. Пусть $P = (p_k)_{k=0}^{\infty}$ – последовательность простых чисел, $\mathbb{Z}_P$ – совокупность последовательностей $t = (t_k)_{k=0}^{\infty}$, где $t_k = 0, \dots, p_k - 1$. Групповую операцию $\dot{+}$ определяем следующим образом. Пусть

$$t_0 + \tau_0 = \delta_0 p_0 + s_0, \quad t_k + \tau_k + \delta_{k-1} = \delta_k p_k + s_k,$$

где $s_k < p_k$ для всех $k \geq 0$, а δ_k равна 0 или 1. Тогда по определению

$$t \dot{+} \tau = s = (s_k)_{k=0}^{\infty}.$$

Другими словами, данная групповая операция – это операция покоординатного сложения по модулю p_k с переносом единицы в следующий разряд. С введенной таким образом операцией $\mathbb{Z}_P$ есть коммутативная группа, которая называется *группой целых P -адических чисел*. Топология в такой группе задается цепочкой подгрупп

$$G_n = \{t \in G : t = (0, 0, \dots, 0, t_n, t_{n+1}, \dots), t_k = 0, \dots, p_k - 1 \text{ при } k \geq n\}.$$

В качестве элементов g_n можно выбрать $g_n = (0, 0, \dots, 0, 1_n, 0, \dots)$. Если положить все $p_k \equiv p$, то получим группу $\mathbb{Z}_p$ целых p -адических чисел.

Нам удобнее рассматривать группы P -адических чисел с более общей точки зрения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Компактная нульмерная группа $(G, \dot{+})$ с условием $p_n g_n = g_{n+1}$ изоморфна группе целых P -адических чисел с образующей последовательностью $P = (p_n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элемент $x \in G$ запишем в виде

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n, \quad a_n = 0, \dots, p_n - 1.$$

Отображение ξ , определенное равенством

$$\xi(x) = (a_n)_{n=0}^{\infty},$$

есть биекция G на $\mathbb{Z}_P$. Из условия $p_n g_n = g_{n+1}$ следует, что отображение ξ сохраняет операцию.

Поэтому в дальнейшем под группой целых P -адических (p -адических) чисел будем понимать компактную нульмерную группу с условием $p_n g_n = g_{n+1}$ (соответственно $p g_n = g_{n+1}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [8]. Определим функции Хаара на компактной нульмерной группе $(G, \dot{+})$ равенствами

$$H_0(x) \equiv 1, \quad H_{j\mathfrak{m}_n+k}(x) = \sqrt{\mathfrak{m}_n} r_n^j(x \dot{-} q) 1_{G_n \dot{+} q}(x), \quad j = 1, \dots, p_n - 1, \quad (2.5)$$

где $q \in G$ и $k \in \mathbb{N}_0$ связаны соотношениями

$$q = a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \dots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1} \iff k = a_0 \mathfrak{m}_0 + a_1 \mathfrak{m}_1 + \dots + a_{n-1} \mathfrak{m}_{n-1},$$

где $a_\nu = 0, \dots, p_\nu - 1$.

В [8] было доказано, что функции Хаара (2.5) образуют ортонормированный базис в $L_2(G)$.

Как мы видим, функции Хаара полностью определяются основной цепочкой подгрупп и соответствующей базисной последовательностью. Поэтому основная цель настоящей статьи состоит в построении различных основных цепочек и соответствующих им базисных последовательностей.

3. Группа $\mathbb{Z}_p^d$ как компактная нульмерная группа. Пусть натуральное $d \geq 2$. Нашей ближайшей целью является доказательство того, что $\mathbb{Z}_p^d$ есть некоторая компактная нульмерная группа.

Пусть $(G, \dot{+})$ – компактная нульмерная группа с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$ и базисной последовательностью $(g_n)_{n=0}^\infty$, для которой выполнено условие $pg_n = g_{n+d}$. Пусть также

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$$

– основная цепочка подгрупп в G . Положим по определению

$$G^{(l)} = \left\{ x^{(l)} : x^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nd+l} g_{nd+l}, \quad a_n = 0, \dots, p-1, \quad l = 0, \dots, d-1 \right\}, \quad (3.1)$$

$$G_n^{(l)} = \{ x^{(l)} \in G^{(l)} : j_n^{(l)} g_{nd+l} \dot{+} j_{n+1}^{(l)} g_{d(n+1)+l} \dot{+} \cdots, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad l = 0, \dots, d-1 \}. \quad (3.2)$$

Из условия $pg_n = g_{n+d}$ следует, что $G^{(l)}$ есть группа целых p -адических чисел при каждом $l = 0, \dots, d-1$.

ЛЕММА 3.1. Пусть

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n, \quad x^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nd+l} g_{nd+l}, \quad l = 0, \dots, d-1, \quad a_n = 0, \dots, p-1.$$

Тогда

$$x = x^{(0)} \dot{+} x^{(1)} \dot{+} \cdots \dot{+} x^{(d-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\sum_{k=0}^{nd+d-1} a_k g_k = \sum_{k=0}^n a_{kd} g_{kd} \dot{+} \sum_{k=0}^n a_{kd+1} g_{kd+1} \dot{+} \cdots \dot{+} \sum_{k=0}^n a_{kd+d-1} g_{kd+d-1}.$$

Так как предел каждой суммы существует, то достаточно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 3.2. Справедливы равенства

$$G_{dm} = G_m^{(0)} \dot{+} G_m^{(1)} \dot{+} \cdots \dot{+} G_m^{(d-1)},$$

$$G_{dm+l} = G_{m+1}^{(0)} \dot{+} G_{m+1}^{(1)} \dot{+} \cdots \dot{+} G_{m+1}^{(l-1)} \dot{+} G_m^{(l)} \dot{+} G_m^{(l+1)} \dot{+} \cdots \dot{+} G_m^{(d-1)}, \quad 1 \leq l \leq d-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in G_{dm+l}$. Это равносильно тому, что

$$x = \sum_{n=m}^{\infty} j_{dn+l} g_{dn+l} \dot{+} \sum_{n=m}^{\infty} j_{dn+(l+1)} g_{dn+(l+1)} \dot{+} \cdots \dot{+} \sum_{n=m}^{\infty} j_{dn+(d-1)} g_{dn+(d-1)}$$

$$\dot{+} \sum_{n=m+1}^{\infty} j_{dn} g_{dn} \dot{+} \sum_{n=m+1}^{\infty} j_{dn+1} g_{dn+1} \dot{+} \cdots \dot{+} \sum_{n=m+1}^{\infty} j_{dn+l-1} g_{dn+l-1}. \quad (3.3)$$

Последнее равенство равносильно тому, что

$$x \in G_m^{(l)} \dot{+} G_m^{(l+1)} \dot{+} \cdots \dot{+} G_m^{(d-1)} \dot{+} G_{m+1}^{(0)} \dot{+} \cdots \dot{+} G_{m+1}^{(l-1)}.$$

В силу единственности представления x в виде (3.3) лемма доказана.

При каждом фиксированном $l = 0, \dots, d-1$ подгруппы

$$G_0^{(l)} \supset G_1^{(l)} \supset \dots \supset G_n^{(l)} \supset \dots \quad (3.4)$$

образуют основную цепочку подгруппы $\mathbb{Z}_p = G_p^{(l)}$ и поэтому на полукольце смежных классов подгрупп (3.4) определена мера μ равенством

$$\mu(G_n^{(l)} \dot{+} h^{(l)}) = \frac{1}{p^n}, \quad h^{(l)} \in G^{(l)}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

На произведении смежных классов мера μ_d определяется стандартным способом как произведение

$$\begin{aligned} \mu_d((G_{n_0}^{(0)} \dot{+} h^{(0)}) \times (G_{n_1}^{(1)} \dot{+} h^{(1)}) \times \dots \times (G_{n_{d-1}}^{(d-1)} \dot{+} h^{(d-1)})) \\ = \mu_{G_{n_0}^{(0)}} \mu_{G_{n_1}^{(1)}} \dots \mu_{G_{n_{d-1}}^{(d-1)}}, \quad h^{(l)} \in G^{(l)}. \end{aligned}$$

Если

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n = \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_{md+l} g_{md+l} = \sum_{l=0}^{d-1} x^{(l)},$$

то определим функцию φ равенством

$$\varphi(x) = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(d-1)}).$$

Из леммы (3.2) следует, что

$$\begin{aligned} \varphi(G_{md}) &= G_m^{(0)} \times G_m^{(1)} \times \dots \times G_m^{(d-1)}, \\ \varphi(G_{md+l}) &= G_{m+1}^{(0)} \times G_{m+1}^{(1)} \times \dots \times G_{m+1}^{(l-1)} \times G_m^{(l)} \\ &\quad \times G_m^{(l+1)} \times \dots \times G_m^{(d-1)}, \quad 1 \leq l \leq d-1. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.3. Пусть

$$h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k g_k = \sum_{l=0}^{d-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} h_{kd+l} g_{kd+l} \right) = \sum_{l=0}^{d-1} h^{(l)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(G_{md} \dot{+} h) &= (G_m^{(0)} \dot{+} h^{(0)}) \times (G_m^{(1)} \dot{+} h^{(1)}) \times \dots \times (G_m^{(d-1)} \dot{+} h^{(d-1)}), \\ \varphi(G_{md+l} \dot{+} h) &= (G_{m+1}^{(0)} \dot{+} h^{(0)}) \times \dots \times (G_{m+1}^{(l-1)} \dot{+} h^{(l-1)}) \\ &\quad \times (G_m^{(l)} \dot{+} h^{(l)}) \times \dots \times (G_m^{(d-1)} \dot{+} h^{(d-1)}), \quad l = 1, \dots, d-1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.2

$$\begin{aligned} G_{md+h} \dot{+} h &= (G_{m+1}^{(0)} \dot{+} h^{(0)}) \dot{+} \dots \dot{+} (G_{m+1}^{(l-1)} \dot{+} h^{(l-1)}) \\ &\quad \dot{+} (G_m^{(l)} \dot{+} h^{(l)}) \dot{+} \dots \dot{+} (G_m^{(d-1)} \dot{+} h^{(d-1)}), \end{aligned}$$

откуда по определению функции φ следует второе утверждение леммы. Первое равенство доказывается аналогично.

В следующей лемме и в дальнейшем символом $\sqcup$ будем обозначать объединение дизъюнктивных множеств.

ЛЕММА 3.4. *Отображение φ сохраняет меру смежных классов $G_n \dot{+} h$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = md + l$. По лемме 3.3

$$\begin{aligned} \mu_d \varphi(G_{md+l} \dot{+} h) &= \mu(G_{m+1}^{(0)} \dot{+} h^{(0)}) \mu(G_{m+1}^{(1)} \dot{+} h^{(1)}) \cdots \mu(G_{m+1}^{(l-1)} \dot{+} h^{(l-1)}) \\ &\quad \times \mu(G_m^{(l)} \dot{+} h^{(l)}) \mu(G_m^{(l+1)} \dot{+} h^{(l+1)}) \cdots \mu(G_m^{(d-1)} \dot{+} h^{(d-1)}) \\ &= \left(\frac{1}{p^{m+1}} \right)^l \left(\frac{1}{p^m} \right)^{d-l} = \frac{1}{p^n} = \mu(G_n \dot{+} h). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.5. *Каждое множество*

$$(G_{n_0}^{(0)} \dot{+} g^{(0)}) \times \cdots \times (G_{n_{d-1}}^{(d-1)} \dot{+} g^{(d-1)}), \quad g^{(l)} \in G^{(l)}, \quad l = 0, \dots, d-1,$$

есть дизъюнктивное объединение конечного числа множеств вида $\varphi(G_m \dot{+} h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $m = \max(n_0, n_1, \dots, n_{d-1})$. Если $n_k < m$, то

$$\begin{aligned} G_{n_k}^{(k)} &= \{x^{(k)} = j_{n_k}^{(k)} g_{n_k d+k} \dot{+} j_{n_k+1}^{(k)} g_{(n_k+1)d+k} \dot{+} \cdots \dot{+} j_{m-1}^{(k)} g_{(m-1)d+k} \\ &\quad \dot{+} j_m^{(k)} g_{md+k} \dot{+} j_{m+1}^{(k)} g_{(m+1)d+k} \dot{+} \cdots\} \\ &= \bigsqcup (j_{n_k}^{(k)} g_{n_k d+k} \dot{+} j_{n_k+1}^{(k)} g_{(n_k+1)d+k} \dot{+} \cdots \dot{+} j_{m-1}^{(k)} g_{(m-1)d+k} \dot{+} G_m^{(k)}), \end{aligned}$$

где объединение берется по всем $j_{n_k}^{(k)}, j_{n_k+1}^{(k)}, \dots, j_{m-1}^{(k)} \in [0, p-1]$. Тогда для $g^{(k)} \in G^{(k)}$

$$G_{n_k}^{(k)} \dot{+} g^{(k)} = \bigsqcup (G_m^{(k)} \dot{+} g^{(k)} \dot{+} (j_{n_k}^{(k)} g_{n_k d+k} \dot{+} \cdots \dot{+} j_{m-1}^{(k)} g_{(m-1)d+k})). \quad (3.5)$$

Представляя $g^{(k)}$ в виде

$$\begin{aligned} g^{(k)} &= a_{0d+k} g_{0d+k} \dot{+} a_{1d+k} g_{1d+k} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{(m-1)d+k} g_{(m-1)d+k} \\ &\quad \dot{+} a_{md+k} g_{md+k} \dot{+} a_{(m+1)d+k} g_{(m+1)d+k} \dot{+} \cdots \end{aligned}$$

и учитывая, что

$$G_m^{(k)} \dot{+} a_{md+k} g_{md+k} \dot{+} a_{(m+1)d+k} g_{(m+1)d+k} \dot{+} \cdots = G_m^{(k)},$$

получаем из (3.5), что $G_{n_k}^{(k)} \dot{+} g^{(k)}$ есть дизъюнктивное объединение множеств вида $G_m^{(k)} \dot{+} h^{(k)}$, где $h^{(k)} \in G^{(k)}$. Значит, декартово произведение

$$(G_{n_0}^{(0)} \dot{+} g^{(0)}) \times (G_{n_1}^{(1)} \dot{+} g^{(1)}) \times \cdots \times (G_{n_{d-1}}^{(d-1)} \dot{+} g^{(d-1)})$$

есть дизъюнктивное объединение конечного числа множеств

$$(G_m^{(0)} \dot{+} h^{(0)}) \times (G_m^{(1)} \dot{+} h^{(1)}) \times \cdots \times (G_m^{(d-1)} \dot{+} h^{(d-1)}).$$

Отсюда по лемме 3.3 получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 3.6. *Множества $\varphi(G_m \dot{+} h)$ образуют базу топологии произведения групп $G^{(0)} \times G^{(1)} \times \cdots \times G^{(d-1)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множества $G_m \dot{+} h$ образуют базу топологии группы G , то множества $\varphi(G_m \dot{+} h)$ образуют базу некоторой топологии в $G^{(0)} \times G^{(1)} \times \dots \times G^{(d-1)}$. Из леммы 3.5 следует, что она совпадает с топологией произведения групп.

ЛЕММА 3.7. *Отображение φ сохраняет меру.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множества $G_m \dot{+} g$ вместе с пустым множеством образуют полукольцо, поэтому множества $\varphi(G_m \dot{+} g)$ тоже образуют полукольцо. Рассмотрим три меры:

- μ – мера на полукольце $\{G_m \dot{+} g\} =: \mathfrak{N}$;
- μ_d – мера на полукольце прямоугольников

$$\{(G_{n_0}^{(0)} \dot{+} g^{(0)}) \times (G_{n_1}^{(1)} \dot{+} g^{(1)}) \times \dots \times (G_{n_{d-1}}^{(d-1)} \dot{+} g^{(d-1)})\} =: \mathfrak{N}_d,$$

определенная как произведение мер;

- μ_φ – мера на полукольце $\{\varphi(G_m \dot{+} g)\} =: \mathfrak{N}_\varphi$, определенная равенством

$$\mu_\varphi(\varphi(G_m \dot{+} g)) = \mu(G_m \dot{+} g).$$

По лемме 3.4 $\mu_\varphi(\varphi(G_m \dot{+} g)) = \mu_d(\varphi(G_m \dot{+} g))$, т.е. на полукольце $\mathfrak{N}$ имеем $\mu_\varphi = \mu_d$. Продолжим меры μ_φ и μ_d до меры Лебега по схеме Каратеодори и покажем, что продолжения мер совпадают. Для этого достаточно доказать, что внешние меры μ_φ^* и μ_d^* , построенные по μ_φ и μ_d , совпадают. В самом деле, если $E \subset G^{(0)} \times G^{(1)} \times \dots \times G^{(d-1)}$, то

$$\mu_d^*(E) = \inf \left\{ \sum_k \mu_d(E_k) : \bigcup E_k \supset E, E_k \in \left\{ \prod_{j=0}^{d-1} (G_{n_j}^{(j)} \dot{+} g^{(j)}) \right\} \right\} \leq \mu_\varphi^*(E),$$

ибо $\mathfrak{N}_\varphi \subset \mathfrak{N}_d$. Так как согласно лемме 3.5 каждое множество из полукольца $\mathfrak{N}_d$ есть конечное объединение дизъюнктивных множеств из полукольца $\mathfrak{N}_\varphi$, то $\mu_\varphi^*(E) \leq \mu_d^*(E)$, т.е. $\mu_d^*(E) = \mu_\varphi^*(E)$. Отсюда сразу следует, что если $E \subset G$ измеримо, то $\mu_d \varphi(E) = \mu_\varphi(\varphi(E)) = \mu E$.

Из лемм 3.1–3.6 следует

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $(G, \dot{+})$ – компактная нульмерная группа с условием $rg_n = g_{n+d}$. Тогда группу $(G, \dot{+})$ можно рассматривать как произведение групп $G^{(l)}$, $l \in 0, \dots, d-1$, каждая из которых совпадает с группой целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_p$, т.е. $(G, \dot{+}) = \mathbb{Z}_p^d$. При этом топология, мера и интегралы в $(G, \dot{+})$ и $\mathbb{Z}_p^d$ совпадают.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть $(G, \dot{+})$ – компактная нульмерная группа с условием $rg_n = g_{n+d}$. Из доказанных лемм следует, в частности, что подгруппы

$$\begin{aligned} \dots &\subset G_{n+1}^{(0)} \times G_{n+1}^{(1)} \times \dots \times G_{n+1}^{(d-1)} \subset G_{n+1}^{(0)} \times G_{n+1}^{(1)} \times \dots \times G_{n+1}^{(d-2)} \times G_n^{(d-1)} \subset \dots \\ &\subset G_{n+1}^{(0)} \times G_n^{(1)} \times \dots \times G_n^{(d-1)} \subset G_n^{(0)} \times G_n^{(1)} \times \dots \times G_n^{(d-1)} \subset \dots \\ &\subset G_0^{(0)} \times G_0^{(1)} \times \dots \times G_0^{(d-1)} \end{aligned}$$

образуют основную цепочку подгрупп в G .

Справедливо и обратное.

ТЕОРЕМА 3.2. *Группа $\mathbb{Z}_p^d$ есть компактная нульмерная группа с условием $pg_n = g_{n+d}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для удобства группу $\mathbb{Z}_p$ через $\mathfrak{G}$. Это обозначение будем использовать и в дальнейшем. Пусть

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_n \supset \mathfrak{G}_{n+1} \supset \cdots$$

– основная цепочка в $\mathfrak{G}$. Выберем $g_n \in \mathfrak{G}_n \setminus \mathfrak{G}_{n+1}$ и зафиксируем. Положим

$$G = \mathbb{Z}_p^d, \quad G_{md+l} = \underbrace{\mathfrak{G}_{m+1} \times \mathfrak{G}_{m+1} \times \cdots \times \mathfrak{G}_{m+1}}_l \times \underbrace{\mathfrak{G}_{m+1} \times \cdots \times \mathfrak{G}_{m+1}}_{d-l}, \quad (3.6)$$

$$n \in \mathbb{N}_0, \quad l = 0, \dots, d-1.$$

Определим векторы

$$g_{md+0} = (g_m, 0, \dots, 0), \quad g_{md+l} = (\underbrace{0, \dots, 0}_l, g_m, 0, \dots, 0), \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad l = 1, \dots, d-1. \quad (3.7)$$

Очевидно, что

- 1) $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$, т.е. g_n образуют базисную последовательность в $\mathbb{Z}_p^d$;
- 2) $pg_n = g_{n+d}$;
- 3) $(G_n/G_{n+1})^\# = p$;
- 4) множества $G_n = G_{md+l}$ образуют основную цепочку в $G = \mathbb{Z}_p^d$;
- 5) $G^{(l)} = \mathbb{Z}_p$, точнее, $G^{(l)} = \{0\}^l \times \mathbb{Z}_p \times \{0\}^{d-l-1}$;
- 6) $\mathbb{Z}_p^d = G^{(0)} \dot{+} G^{(1)} \dot{+} \cdots \dot{+} G^{(d-1)}$.

Эти свойства и доказывают теорему.

4. Функции Хаара на группе с условием $pg_n = g_{n+d}$. Пусть $(G, \dot{+})$ – компактная нульмерная группа с условием $pg_n = g_{n+d}$, $(G_n)_{n=0}^\infty = (G_{md+l})_{l=0, m=0}^{d-1, \infty}$ – основная цепочка подгрупп, $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$. Подгруппы $(G_{md})_{m=0}^\infty$ также образуют убывающую последовательность и $(G_{md}/G_{(m+1)d})^\# = p^d$. Теорема Силова [9] утверждает, что последовательность (G_{md}) можно уплотнить так, что фактор-группы, построенные по соседним подгруппам, будут иметь порядок p . Такое уплотнение не единственно, одно из них есть исходная цепочка (G_{md+l}) . Покажем, как можно построить другие уплотнения, используя цепочку (G_{md+l}) .

Рассмотрим подгруппы G_{md} и $G_{(m+1)d}$. Смежные классы

$$G_{(m+1)d} \dot{+} (a_{(m+1)d-1}g_{(m+1)d-1} \dot{+} a_{(m+1)d-2}g_{(m+1)d-2} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{md}g_{md}) \quad (4.1)$$

образуют группу порядка p^d , нулевой элемент которой есть подгруппа $G_{(m+1)d}$. Выберем произвольный элемент

$$\tilde{g}_{md+d-1} = \tilde{g}_{(m+1)d-1} = a_{(m+1)d-1}^{(1)}g_{(m+1)d-1} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{md}^{(1)}g_{md} \neq 0. \quad (4.2)$$

Из условия $pg_n = g_{n+d}$ следует, что смежные классы

$$G_{(m+1)d} \dot{+} j\tilde{g}_{(m+1)d-1}, \quad j = 0, \dots, p-1, \quad (4.3)$$

образуют циклическую подгруппу порядка p . Поэтому множество

$$\tilde{G}_{(m+1)d-1} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} (G_{(m+1)d} \dot{+} j\tilde{g}_{(m+1)d-1})$$

есть подгруппа в G_{md} такая, что

$$G_{(m+1)d} \subset \tilde{G}_{(m+1)d-1} \subset G_{md}, \quad (\tilde{G}_{(m+1)d-1}/G_{(m+1)d})^\# = p, \\ (G_{md}/\tilde{G}_{(m+1)d-1})^\# = p^{d-1}.$$

Теперь выбираем элемент

$$\tilde{g}_{md+d-2} = \tilde{g}_{(m+1)d-2} = a_{(m+1)d-1}^{(2)} g_{(m+1)d-1} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{md}^{(2)} g_{md} \in G_{md} \setminus \tilde{G}_{(m+1)d-1}.$$

Такой элемент существует, так как каждый элемент вида (4.2) определяет смежный класс вида (4.1), и, значит, разность $G_{md} \setminus \tilde{G}_{(m+1)d-1}$ содержит $p^{d-1} - 1$ смежных классов вида (4.1). Смежные классы

$$\tilde{G}_{(m+1)d-1} \dot{+} j\tilde{g}_{(m+1)d-2}, \quad j = 0, \dots, p-1, \quad (4.4)$$

снова образуют циклическую подгруппу порядка p и множество

$$\tilde{G}_{(m+1)d-2} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} (\tilde{G}_{(m+1)d-1} \dot{+} j\tilde{g}_{(m+1)d-2})$$

есть подгруппа в G_{md} такая, что

$$G_{(m+1)d} \subset \tilde{G}_{(m+1)d-1} \subset \tilde{G}_{(m+1)d-2} \subset G_{md}, \\ (\tilde{G}_{(m+1)d-2}/\tilde{G}_{(m+1)d-1})^\# = p, \quad (G_{md}/\tilde{G}_{(m+1)d-2})^\# = p^{d-2}.$$

Продолжая этот процесс, получаем вложенные подгруппы

$$G_{(m+1)d} = \tilde{G}_{(m+1)d} \subset \tilde{G}_{(m+1)d-1} \subset \cdots \subset \tilde{G}_{md+1} \subset \tilde{G}_{md} = G_{md}, \quad (4.5)$$

задаваемые равенствами

$$\tilde{g}_{md+l} = a_{(m+1)d-1}^{(d-l)} g_{(m+1)d-1} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{md}^{(d-l)} g_{md} \in \tilde{G}_{md+l} \setminus \tilde{G}_{md+l+1}, \quad (4.6)$$

$$\tilde{G}_{md+l} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} (\tilde{G}_{md+l+1} \dot{+} j\tilde{g}_{md+l}), \quad l = 0, \dots, d-1, \quad (4.7)$$

для которых выполнены условия

$$(\tilde{G}_{md+l-1}/\tilde{G}_{md+l})^\# = p, \quad l = 1, \dots, d.$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Топология, мера и интеграл, построенные по полученной основной цепочке $(\tilde{G}_{md+l})$, совпадают с топологией, мерой и интегралом, построенными по исходной цепочке (G_{md+l}) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 3.1, и мы его опускаем.

По построенной цепочке $(\tilde{G}_n)$ и элементам $\tilde{g}_n$ строим систему Хаара

$$\tilde{H}_0(x) \equiv 1, \quad \tilde{H}_{jp^n+k}(x) = p^{p/2} r_n^j(x \dot{-} \tilde{q}) \mathbf{1}_{\tilde{G}_n \dot{+} \tilde{q}}(x), \quad j = 1, \dots, p-1,$$

где $k = 0, \dots, p^n - 1$ и $\tilde{q}$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{q} = a_0 \tilde{g}_0 \dot{+} a_1 \tilde{g}_1 \dot{+} \dots \dot{+} a_{n-1} \tilde{g}_{n-1} &\iff k = a_0 p^0 + a_1 p^1 + \dots + a_{n-1} p^{n-1}, \\ a_\nu &= 0, \dots, p-1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из [8] сразу получается

ТЕОРЕМА 4.2. 1) *Функции Хаара $\tilde{H}_n$ образуют замкнутую в $L_2(G)$ ортонормированную систему.*

2) *Ряд Фурье–Хаара непрерывной на G функции сходится равномерно.*

ЗАМЕЧАНИЕ. При каждом фиксированном m мы можем построить $(p^d - 1)/(p - 1)$ различных уплотнений (4.5). Поэтому уплотнений всей последовательности (G_{md}) можно построить бесконечно много. Значит, и различных функций Хаара получим бесконечно много.

5. Оператор растяжения и функции Хаара. Классическая система Хаара получается из одной функции Хаара $H_1(x) = \mathbf{1}_{[0,1/2)}(x) - \mathbf{1}_{[1/2,1)}(x)$ с помощью сжатий и сдвигов. В этом пункте мы рассмотрим функции Хаара на $\mathbb{Z}_p^d$, которые получаются из одной функции с помощью сжатий, сдвигов и возведения в степень. Вначале определим оператор растяжения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $(G, \dot{+})$ – компактная нульмерная группа с базисной последовательностью $(g_n)_{n=0}^\infty$. Если $x \in G$ представлен в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n,$$

то определим оператор A равенством

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_{n-1}.$$

Если A аддитивен, то будем называть его *оператором растяжения*.

Отметим некоторые свойства оператора A :

- 1) если операция в G удовлетворяет условию $pg_n = g_{n+d}$, то A аддитивен;
- 2) $AG_{n+1} = G_n$, $n \geq 0$;
- 3) если $x \in G_n$, то $r_n(x) = r_0(A^n x)$.

Первое и второе свойства очевидны. Докажем третье. Если $x \in G_n$, то

$$x = a_n g_n \dot{+} a_{n+1} g_{n+1} \dot{+} a_{n+2} g_{n+2} \dot{+} \dots$$

Поэтому $r_n(x) = (r_n(g_n))^{a_n}$. По определению оператора A имеем

$$Ax = a_n g_{n-1} \dot{+} a_{n+1} g_n \dot{+} \dots,$$

и, значит,

$$r_{n-1}(Ax) = (r_{n-1}(g_{n-1}))^{a_n}.$$

Учитывая, что функции Радемахера выбраны так, что $r_k(g_k) = \exp(2\pi i/p)$, получаем равенство $r_n(x) = r_{n-1}(Ax)$. Отсюда и следует третье свойство.

Из отмеченных свойств сразу следует, что в компактной нульмерной группе с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$ и свойством $pg_n = g_{n+d}$ функции Хаара (2.5) можно записать в виде

$$H_{jp^n+k}(x) = p^{n/2} r_0^j(A^n(x \dot{-} q)) \mathbf{1}_{G_n+q}(x) = p^{n/2} r_0^j(A^n(x \dot{-} q)) \mathbf{1}_{G_0}(A^n(x \dot{-} q)). \quad (5.1)$$

Последнее равенство означает, что функции Хаара (5.1) могут быть получены из одной функции $r_0(x)$ с помощью сжатий, сдвигов и возведения в степень.

Будем строить систему Хаара на группе G с условием $pg_n = g_{n+d}$ по основной цепочке $(\tilde{G}_{md+l})$ и базисной системе $(\tilde{g}_{md+l})$, определенных равенствами (4.5) и (4.6).

ЛЕММА 5.1. *Если базисная система $(\tilde{g}_{md+l})$ определена равенствами (4.6), в которых числа*

$$a_{(m+1)d-1}^{(d-l)}, \quad a_{(m+1)d-2}^{(d-l)}, \quad \dots, \quad a_{md}^{(d-l)} \quad (5.2)$$

одинаковы при всех m , то $p\tilde{g}_{md+l} = \tilde{g}_{md+l+d}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $\tilde{g}_{md+l}$ следует

$$\begin{aligned} p\tilde{g}_{md+l} &= p(a_{d-1}^{(d-l)} g_{(m+1)d-1} + \dots + a_0^{(d-l)} g_{md}) \\ &= a_{d-1}^{(d-l)} g_{(m+2)d-1} + \dots + a_0^{(d-l)} g_{md+d} = \tilde{g}_{(m+1)d+l} = \tilde{g}_{md+l+d}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем будем предполагать, что базисная последовательность определена как в лемме 5.1, т.е. коэффициенты (5.2) не зависят от m . В этом случае совокупность подгрупп (4.5) и элементов (4.6) определяется матрицей

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{d-1}^{(1)}, & a_{d-2}^{(1)}, & \dots, & a_0^{(1)} \\ \vdots, & \vdots, & \vdots, & \vdots \\ a_{d-1}^{(d-1)}, & a_{d-2}^{(d-1)}, & \dots, & a_0^{(d-1)} \\ a_{d-1}^{(d)}, & a_{d-2}^{(d)}, & \dots, & a_0^{(d)} \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

одинаковой при всех m .

Укажем алгоритм построения матрицы $\mathcal{A}$.

1-й шаг. Первую строчку матрицы $\mathcal{A}$ выбираем произвольно с одним ограничением: не все $a_k^{(1)} = 0$.

2-й шаг. Вторую строчку надо выбрать так, чтобы

$$(a_{d-1}^{(2)}, a_{d-2}^{(2)}, \dots, a_0^{(2)}) \neq (j_1 a_{d-1}^{(1)} \bmod p, j_1 a_{d-2}^{(1)} \bmod p, \dots, j_1 a_0^{(1)} \bmod p)$$

при любых $j_1 \in [0, p-1]$.

ν -й шаг. Если первые $\nu-1$ строк матрицы $\mathcal{A}$ уже построены, то ν -я строка должна удовлетворять условию

$$(a_{d-1}^{(\nu)}, a_{d-2}^{(\nu)}, \dots, a_0^{(\nu)}) \neq \left(\sum_{\gamma=1}^{\nu-1} j_\gamma a_{d-1}^{(\gamma)} \bmod p, \sum_{\gamma=1}^{\nu-1} j_\gamma a_{d-2}^{(\gamma)} \bmod p, \dots, \sum_{\gamma=1}^{\nu-1} j_\gamma a_0^{(\gamma)} \bmod p \right)$$

при любых $j_1, j_2, \dots, j_{\nu-1} \in [0, p-1]$.

Следующая теорема очевидна.

ТЕОРЕМА 5.1. *Каждая матрица $\mathcal{A}$, построенная по приведенному алгоритму, определяет базисную систему $(\tilde{g}_{md+l})$, а значит, и оператор растяжения A определяется равенством*

$$A(x) = \sum_{m,l} a_{md+l} \tilde{g}_{md+l-1} \quad (5.4)$$

при $x = \sum a_{md+l} \tilde{g}_{md+l} \in \tilde{G}_1$. Каждый такой оператор растяжения определяет функции Хаара равенствами

$$\tilde{H}_0(x) \equiv 1, \quad H_{jp^n+k}(x) = p^{n/2} r_0^j(A^n(x \dot{-} \tilde{q})) \mathbf{1}_{\tilde{G}_0}(A^n(x \dot{-} \tilde{q})), \quad (5.5)$$

где k и $\tilde{q}$ по-прежнему связаны соотношением (4.8).

Используя теорему 5.1, можно получать различные системы Хаара на $\mathbb{Z}_p^d$. Приведем в качестве примера одну из них, которая соответствует единичной матрице $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathfrak{G} = \mathbb{Z}_p$ – группа целых p -адических чисел, $(\mathfrak{G}_n)_{n=0}^\infty$ – основная цепочка в $\mathfrak{G}$, $(g_n)_{n=0}^\infty$ – базисная последовательность в $\mathfrak{G}$. Обозначим

$$G = \mathfrak{G}^d = \mathbb{Z}_p^d, \quad G_{md+l} = \mathfrak{G}_{m+1}^l \times \mathfrak{G}_m^{d-l}, \quad \mathbf{g}_{md+l} = \underbrace{(0, \dots, 0, g_m, 0, \dots, 0)}_l.$$

Как было отмечено в п. 3, (G_{md+l}) есть основная цепочка в G , $(\mathbf{g}_{md+l})$ – соответствующая базисная система, $p\mathbf{g}_n = \mathbf{g}_{n+d}$. Выберем матрицу $\mathcal{A} = E$ и построим по ней систему $\tilde{\mathbf{g}}_{md+l}$ и цепочку подгрупп $\tilde{G}_{md+l}$. Так как $\mathcal{A}$ – единичная матрица, то $\tilde{\mathbf{g}}_{md+l} = \mathbf{g}_{md+l}$, $\tilde{G}_{md+l} = G_{md+l}$. Пусть A_d – d -мерный оператор растяжения. Найдем его выражение через одномерный оператор A . Если

$$\mathbf{x} = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(d-1)}) = \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_{md+l} \mathbf{g}_{md+l} \in G_1 \subset \mathbb{Z}_p^d,$$

то

$$x^{(l)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{md+l} g_m \quad \text{при } l > 0, \quad x^{(0)} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{md} g_m.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A_d \mathbf{x} &= \sum_l \sum_m a_{md+l} \mathbf{g}_{md+l-1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{md} \mathbf{g}_{(m-1)d+(d-1)} + \sum_{l=1}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_{md+l} \mathbf{g}_{md+l-1} \\ &= (0, \dots, 0, Ax^{(0)}) \dot{+} (x^{(1)}, 0, \dots, 0) \dot{+} (0, x^{(2)}, 0, \dots, 0) \dot{+} \dots \dot{+} (0, \dots, 0, x^{(d-1)}, 0) \\ &= (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d-1)}, Ax^{(0)}). \end{aligned}$$

Так как $G_0 = \mathfrak{G}_0^d$, $G_1 = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_0^{d-1}$, то функция $\mathbf{r}_0(\mathbf{x}) \stackrel{\text{df}}{=} r_0(x^{(0)}) \cdot 1^{d-1}$, где $r_0(x^{(0)})$ – одномерная функция Радемахера, будет функцией Радемахера на $G = \mathbb{Z}_p^d$, соответствующей основной цепочке $G_{md+l} = \mathfrak{G}_{m+1}^l \times \mathfrak{G}_m^{d-l}$. Подставляя $\mathbf{r}_0(\mathbf{x})$ в (5.5), получаем для $n = md + l$

$$H_{jp^n+k}(\mathbf{x}) = p^{n/2} \mathbf{r}_0^j(A_d^n(\mathbf{x} \dot{-} \mathbf{q})) \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p^d}(A_d^n(\mathbf{x} \dot{-} \mathbf{q})). \quad (5.6)$$

Осталось найти зависимость между k и $\mathbf{q}$. Учитывая, что $n = md + l$, записываем $\mathbf{q}$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= a_{md+l-1}\mathbf{g}_{md+l-1} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{md}\mathbf{g}_{md} \dot{+} a_{(m-1)d+d-1}\mathbf{g}_{(m-1)d+d-1} \dot{+} \cdots \\ &\quad \dot{+} a_{(m-1)d+l-1}\mathbf{g}_{(m-1)d+l-1} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{(m-1)d}\mathbf{g}_{(m-1)d} \dot{+} \cdots \\ &\quad \dot{+} a_{0d+d-1}\mathbf{g}_{0d+d-1} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{0d+l-1}\mathbf{g}_{0d+l-1} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{0d}\mathbf{g}_{0d} \\ &= \sum_{\nu=0}^{m-1} a_{\nu d+d-1}\mathbf{g}_{\nu d+d-1} \dot{+} \cdots \dot{+} \sum_{\nu=0}^{m-1} a_{\nu d+l}\mathbf{g}_{\nu d+l} \dot{+} \sum_{\nu=0}^m a_{\nu d+l}\mathbf{g}_{\nu d+l} \dot{+} \cdots \dot{+} \sum_{\nu=0}^m a_{\nu d}\mathbf{g}_{\nu d} \\ &= (q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(d-1)}), \end{aligned}$$

где

$$q^{(\alpha)} = \begin{cases} \sum_{\nu=0}^m a_{\nu d+\alpha} g_{\nu} & \text{при } \alpha = 0, \dots, l-1, \\ \sum_{\nu=0}^{m-1} a_{\nu d+\alpha} g_{\nu} & \text{при } \alpha = l, \dots, d-1. \end{cases}$$

Учитывая зависимость между k и $\mathbf{q}$, записываем k в виде $k = k^{(0)} + k^{(1)} + \dots + k^{(d-1)}$, где

$$k^{(\alpha)} = \begin{cases} \sum_{\nu=0}^m a_{\nu d+\alpha} p^{\nu d+\alpha} & \text{при } \alpha = 0, \dots, l-1, \\ \sum_{\nu=0}^{m-1} a_{\nu d+\alpha} p^{\nu d+\alpha} & \text{при } \alpha = l, \dots, d-1. \end{cases}$$

Заметим, наконец, что равенство (5.6) можно записать в виде

$$H_{jp^{md+l+k}}(\mathbf{x}) = p^{(md+l)/2} r_0^j(A_1^m(x^{(l)} \dot{+} q^{(l)})) \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p^d}(A_d^{md+l}(\mathbf{x} \dot{+} \mathbf{q})),$$

где A_1 – одномерный оператор растяжения, r_0 – одномерная функция Радемахера. Как отметила Скопина, в случае $p = d = 2$ функции Хаара (5.6) могут быть получены в рамках сепарабельного КМА, описанного в [11].

6. Функции Хаара на $\mathbb{Z}_p^2$. Применим изложенные выше методы для построения систем Хаара на $\mathbb{Z}_p^2$ и опишем все двумерные системы Хаара. Для этого выпишем все системы Хаара на нульмерной группе $(G, \dot{+})$ с условием $pg_n = g_{n+2}$. Из конструкции, приведенной в п. 4, следует, что функции Хаара $H_{jp^{2n+k}}(x)$ и $H_{jp^{2n+1+k}}(x)$ определяются подгруппами $G_{2(n+1)} \subset \tilde{G}_{2n+1} \subset G_{2n}$. Согласно замечанию к лемме 5.1 для построения $\tilde{G}_{2n+1}$ нужно выбрать матрицу $\mathcal{A}$, первая строка которой $(a_1^{(1)}, a_0^{(1)})$ удовлетворяет условиям

$$a_j^{(1)} = 0, \dots, p-1, \quad a_1^{(1)} + a_0^{(1)} \neq 0.$$

По этой матрице строим элемент $\tilde{g}_{2n+1} = a_1^{(1)} g_{2n+1} \dot{+} a_0^{(1)} g_{2n}$ и подгруппу

$$\tilde{G}_{2n+1} = \bigsqcup_{l=0}^{p-1} (G_{2(n+1)} \dot{+} l\tilde{g}_{2n+1}).$$

ЛЕММА 6.1. Обозначим через $\tilde{G}_{2n+1}(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta = 0, \dots, p-1$, группу, состоящую из смежных классов

$$G_{2(n+1)} \dot{+} l(\alpha g_{2n+1} \dot{+} \beta g_{2n}), \quad l = 0, \dots, p-1.$$

Если $\alpha, \beta \geq 1$, то существует $\beta' \in \{1, \dots, p-1\}$ такое, что

$$\tilde{G}_{2n+1}(\alpha, \beta) = \tilde{G}_{2n+1}(1, \beta').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = 1$ утверждение очевидно. Пусть $\alpha > 1$. Из условия $pg_k = g_{k+2}$ следует, что существует $l_0 = 1, \dots, p-1$, при котором

$$G_{2(n+1)} \dot{+} l_0(\alpha g_{2n+1} \dot{+} \beta g_{2n}) = G_{2(n+1)} \dot{+} (g_{2n+1} \dot{+} l_0 \beta g_{2n}) = G_{2(n+1)} \dot{+} (g_{2n+1} \dot{+} \beta' g_{2n}),$$

где $\beta' = l_0 \beta \bmod p$. Так как группа $\tilde{G}_{2n+1}(\alpha, \beta)$ имеет простой порядок p , то любой ее элемент является образующим, в том числе $G_{2(n+1)} \dot{+} (g_{2n+1} \dot{+} \beta' g_{2n})$. Это означает, что $\tilde{G}_{2n+1}(\alpha, \beta)$ состоит из смежных классов

$$l(G_{2(n+1)} \dot{+} l_0(\alpha g_{2n+1} \dot{+} \beta g_{2n})) = G_{2(n+1)} \dot{+} l(g_{2n+1} \dot{+} \beta' g_{2n}), \quad l = 0, \dots, p-1.$$

СЛЕДСТВИЕ. Все подгруппы $\tilde{G}_{2n+1}$, лежащие между G_{2n} и $G_{2(n+1)}$ имеют вид

$$\tilde{G}_{2n+1} = \bigsqcup_{l=0}^{p-1} (G_{2(n+1)} \dot{+} l(g_{2n+1} \dot{+} \nu g_{2n})), \quad \nu = 0, 1, \dots, p-1 \quad (6.1)$$

или

$$\tilde{G}_{2n+1} = \bigsqcup_{l=0}^{p-1} (G_{2(n+1)} \dot{+} l(g_{2n})). \quad (6.2)$$

Отметим, что если $\tilde{G}_{2n+1}$ задается равенством (6.1) с $\nu = 0$, то это означает, что мы оставляем как исходную цепочку подгрупп $(G_n)_{n=0}^\infty$, так и базисную последовательность $(g_n)_{n=0}^\infty$. Если $\tilde{G}_{2n+1}$ задается равенством (6.2), то мы меняем G_{2n+1} на $\tilde{G}_{2n+1}$ так, что при этом в основной цепочке меняются местами g_{2n} и g_{2n+1} , т.е. базисная последовательность принимает вид

$$g_1, g_0, g_3, g_2, \dots, g_{2n+1}, g_{2n}, g_{2n+3}, g_{2(n+1)}, \dots$$

Используя лемму 6.1 и то, что $\mathbb{Z}_p^2$ есть компактная нульмерная группа $(G, \dot{+})$ с условием $pg_n = g_{n+2}$, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $(\mathfrak{G}, \dot{+}) = (\mathbb{Z}_p, \dot{+})$, $(\mathfrak{G}_n)_{n=0}^\infty$ – основная цепочка в $\mathfrak{G}$, $(g_n)_{n=0}^\infty$ – базисная последовательность, соответствующая $(\mathfrak{G}_n)_{n=0}^\infty$. Тогда подгруппы

$$G_{2n} = \mathfrak{G}_n \times \mathfrak{G}_n, \quad G_{2n+1} = \bigsqcup_{l=0}^{p-1} (\mathfrak{G}_{n+1} \times \mathfrak{G}_{n+1} \dot{+} l(\nu g_n, g_n))$$

образуют при каждом $\nu = 0, \dots, p-1$ основную цепочку в $\mathbb{Z}_p^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся обозначениями теоремы 3.2 и обозначим

$$\mathbf{g}_{2n} = (g_n, 0), \quad \mathbf{g}_{2n+1} = (0, g_n), \quad G_{2n} = \mathfrak{G}_n \times \mathfrak{G}_n, \quad G_{2n+1} = \mathfrak{G}_{n+1} \times \mathfrak{G}_n.$$

Учитывая, что $\mathbf{g}_{2n+1} \dot{+} \nu \mathbf{g}_{2n} = (\nu g_n, g_n)$, из предыдущего замечания получаем утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. В силу симметрии основную цепочку образуют подгруппы

$$G_{2n} = \mathfrak{G}_n \times \mathfrak{G}_n, \quad G_{2n+1} = \bigsqcup_{l=0}^{p-1} (\mathfrak{G}_{n+1} \times \mathfrak{G}_{n+1} \dot{+} l(g_n, \nu g_n))$$

при каждом $\nu = 1, \dots, p-1$. Базисную последовательность в этом случае образуют элементы

$$\mathbf{g}_{2n+1} = (g_n, \nu g_n), \quad \mathbf{g}_{2n} = (g_n, 0).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Еще две базисные последовательности задаются равенствами

$$\mathbf{g}_{2n+1} = (g_n, 0), \quad \mathbf{g}_{2n} = (0, g_n) \quad \text{и} \quad \mathbf{g}_{2n+1} = (0, g_n), \quad \mathbf{g}_{2n} = (g_n, 0).$$

В этом случае соответствующие двумерные операторы растяжения A_2 выражаются через одномерный оператор A равенствами

$$A_2(x^{(0)}, x^{(1)}) = (x^{(1)}, Ax^{(0)}) \quad \text{и} \quad A_2(x^{(0)}, x^{(1)}) = (Ax^{(1)}, x^{(0)}).$$

Можно указать еще несколько случаев, когда двумерный оператор растяжения выражается через одномерный.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть базисная последовательность в $\mathbb{Z}_p^2$ задана равенствами

$$\mathbf{g}_{2n+1} = (g_n, \nu g_n), \quad \mathbf{g}_{2n} = (g_n, g_{n+1}), \quad (6.3)$$

где $\nu \mid p-1$. Обозначим $p-1 = \nu\alpha$. Тогда соответствующий оператор растяжения A_2 задается равенством

$$A_2(x^{(0)}, x^{(1)}) = (Ax^{(0)} \dot{+} \alpha Ax^{(1)}, \nu Ax^{(0)} \dot{-} Ax^{(1)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что последовательность

$$\mathbf{g}_{2n+1} = (g_n \dot{+} \alpha g_{n+1}, \nu g_n \dot{-} g_{n+1}), \quad \mathbf{g}_{2n} = (g_n, \nu g_{n+1})$$

порождает ту же основную цепочку, что и (6.3), а значит, соответствующий оператор растяжения порождает ту же систему Хаара. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что

$$A_2 \mathbf{g}_{2(n+1)} = \mathbf{g}_{2n+1}, \quad A_2 \mathbf{g}_{2n+1} = \mathbf{g}_{2n}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} A_2 \mathbf{g}_{2(n+1)} &= A_2(g_{n+1}, g_{n+1}) = (g_n \dot{+} \alpha g_{n+1}, \nu g_n \dot{-} g_{n+1}) = \mathbf{g}_{2n+1}, \\ A_2 \mathbf{g}_{2n+1} &= A_2(g_n \dot{+} \alpha g_{n+1}, \nu g_n \dot{-} g_{n+1}) = (g_{n-1}(1 + \alpha\nu), g_n(1 + \alpha\nu)) \\ &= (pg_{n-1}, pg_n) = (g_n, g_{n+1}) = \mathbf{g}_{2n}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. В работе [7] при построении КМА в $L_2(\mathbb{Q}_2^2)$ рассмотрен оператор растяжения A_2 задаваемый матрицей

$$A_2(x^{(0)}, x^{(1)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ x^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Так как умножение на $1/2$ есть одномерный оператор растяжения в группе диадических чисел, то в наших обозначениях

$$A_2(x^{(0)}, x^{(1)}) = (Ax^{(1)} + Ax^{(0)}, Ax^{(1)} - Ax^{(0)}). \quad (6.4)$$

С точностью до порядка аргументов это есть оператор растяжения (6.3) при $\alpha = \nu = 1$. Более того, операторы (6.3) и (6.4) порождают одну и ту же основную цепочку (G_{2n+l}) , а значит, и одну и ту же систему Хаара.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. В. Козырев, “Теория всплесков как p -адический спектральный анализ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 149–158.
- [2] С. В. Козырев, “ p -адические псевдодифференциальные операторы и p -адические всплески”, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 383–394.
- [3] S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, “ p -Adic multiresolution analysis and wavelet frames”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **16**:5 (2010), 693–714.
- [4] V. Shelkovich, M. Skopina, “ p -Adic Haar multiresoluton analysis and pseudo-differential operators”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **15**:3 (2009), 366–393.
- [5] A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, M. A. Skopina, “ p -adic refinable functions and MRA-based wavelets”, *J. Approx. Theory*, **161**:1 (2009), 226–238.
- [6] S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, “ p -Adic nonorthogonal wavelet bases”, *Избранные вопросы математической физики и p -адического анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **265**, МАИК, М., 2009, 7–18.
- [7] E. J. King, M. A. Skopina, “Quincunx multiresolution analysis for $L^2(\mathbb{Q}_2^2)$ ”, *p -Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **2**:3 (2010), 222–231.
- [8] С. Ф. Лукомский, “О рядах Хаара на компактной нуль-мерной группе”, *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **9**:1 (2009), 14–19.
- [9] Г. Н. Агеев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафари, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах*, ЭЛМ, Баку, 1981.
- [10] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, Наука, М., 1982.
- [11] И. Я. Новиков, И. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.

С. Ф. Лукомский

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: lukomskiisf@info.sgu.ru

Поступило

16.12.2009

Исправленный вариант

08.11.2010