Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, А. А. Воробьев, М. Ю. Романова, Гиперболические полугруппы операторов и уравнение Ляпунова, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 2, 190–203

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8634>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 17:08:31

Гиперболические полугруппы операторов и уравнение Ляпунова

А. Г. Баскаков, А. А. Воробьев, М. Ю. Романова

Получены необходимые и достаточные условия гиперболичности полугруппы операторов. При этом использовано операторное уравнение Ляпунова, построенное по ее генератору.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Пусть $\mathcal{H}$ – комплексное гильбертово пространство, $\text{End } \mathcal{H}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$. Сильно непрерывная полугруппа операторов $T: \mathbb{R}_+ = [0, \infty] \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, т.е. полугруппа класса C_0 , называется *гиперболической* (или допускающей экспоненциальную дихотомию), если $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, где $\sigma(T(1))$ – спектр оператора $T(1)$ и $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ – единичная окружность. Важность этого понятия связана с тем, что решения дифференциального уравнения

$$\dot{x} = Ax \tag{1.1}$$

с инфинитезимальным генератором A гиперболической полугруппы T допускают экспоненциальную дихотомию. Красивое истолкование второго метода Ляпунова с использованием нового скалярного произведения в $\mathcal{H}$ дано в монографии [1] для случая, когда $A \in \text{End } \mathcal{H}$ и $T(t) = \exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$, – группа операторов.

В [1] было установлено, что гиперболичность этой группы операторов эквивалентна существованию самосопряженного оператора $W \in \text{End } \mathcal{H}$ такого, что A равномерно W -диссипативен, т.е. $A^*W + WA = F \ll 0$, где символ $F \ll 0$ означает равномерную отрицательность оператора $F \in \text{End } \mathcal{H}$. В этом случае оператор W определяет квадратичную функцию Ляпунова $L: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $L(u) = (u, u)_W = (Wu, u)$, такую, что функция $t \mapsto L(u(t), u(t))$ монотонно убывает для каждого решения $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ уравнения (1.1).

В статье [2] и монографии [3] была сделана попытка перенести результаты Крейна для генераторов инфинитезимальных полугрупп класса C_0 [4]. Однако имеющиеся там неточности привели к тому, что соответствующие результаты не были достигнуты.

В данной статье результаты Крейна распространяются для генераторов сильно непрерывных групп операторов и для генераторов некоторых классов полугрупп

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00276).

операторов. Для генераторов полугрупп необратимых операторов они, как правило, оказываются неверными. Приведены приложения к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами.

2. О разрешимости уравнения Ляпунова. Символом $\mathbb{J}$ обозначим одно из множеств: $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}$. Пусть

$$\mathcal{U} : \Delta_{\mathbb{J}} = \{(t, s) \in \mathbb{J} \times \mathbb{J} : s \leq t\} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$$

– семейство эволюционных операторов, т.е. выполнены следующие условия:

- 1) отображение $\mathcal{U}$ сильно непрерывно;
- 2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$ для всех $0 \leq \tau \leq s \leq t$ из $\mathbb{J}$;
- 3) $\mathcal{U}(t, t) = I$ – тождественный оператор для всех $t \in \mathbb{J}$;
- 4) конечна величина $K = \sup_{0 \leq t-s \leq 1} \|\mathcal{U}(t, s)\|$.

Эволюционные семейства операторов естественным образом возникают в связи с представлением решений при $t \geq s$ абстрактной задачи Коши $x(s) = x_0 \in D(A(s))$ для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad s \leq t, \quad s, t \in \mathbb{J},$$

где

$$A(t) : D(A(t)) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad t \in \mathbb{J},$$

– семейство линейных замкнутых операторов, действующих в $\mathcal{H}$.

Пусть $L^2 = L^2(\mathbb{J}, \mathcal{H})$ – гильбертово пространство (классов эквивалентности) измеримых по Бохнеру и квадратично суммируемых функций, определенных на $\mathbb{J}$ со значениями в $\mathcal{H}$, со скалярным произведением $(x, y) = \int_{\mathbb{J}} (x(t), y(t)) dt$, $x, y \in L^2(\mathbb{J}, \mathcal{H})$.

По заданному семейству эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ построим линейный оператор

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$$

следующим образом (см. [5]). Функция $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) = L^2$ относится к области определения оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$, если существует функция $f \in L^2$ такая, что для почти всех $s \leq t$ из $\mathbb{R}$ верны равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad s \leq t, \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Следует отметить, что эти равенства надо понимать как равенства на представителях класса эквивалентных функций. Из (2.1) следует, что функция x почти всюду совпадает с непрерывной функцией и функция f единственна. Далее, полагается $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}x = f$. Отметим, что оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ замкнут.

Если рассматривается уравнение (1.1), где A – генератор полугруппы операторов $T : \mathbb{J} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, то соответствующее этому уравнению эволюционное семейство $\mathcal{U} : \Delta_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ имеет вид

$$\mathcal{U}(t, s) = T(t - s), \quad (t, s) \in \Delta_{\mathbb{R}},$$

а оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ будет далее обозначаться через $\mathcal{L}_T = -d/dt + A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множестве $\mathbb{J}$ с параметрами экспоненциальной дихотомии (M, γ) , где $M \geq 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, если существует сильно непрерывная ограниченная проекторнозначная функция $P: \mathbb{J} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ со следующими свойствами:

- 1) $\mathcal{U}(t, s)P(s) = P(t)\mathcal{U}(t, s)$ для $s \leq t$ из $\mathbb{J}$;
- 2) $\|\mathcal{U}(t, s)P(s)\| \leq M \exp(\gamma(s - t))$, $s \leq t$, $s, t \in \mathbb{J}$;
- 3) при $s < t$, $s, t \in \mathbb{J}$, сужение $\mathcal{U}_{t,s}: H'(s) \rightarrow H'(t)$ оператора $\mathcal{U}(t, s)$ на образ $H'(s) = \text{Im } Q(s)$ дополнительного проектора $Q(s) = I - P(s)$ к проектору $P(s)$, является изоморфизмом пространств $H'(s)$ и $H'(t)$;
- 4) определим оператор $\mathcal{U}(s, t) \in \text{End } \mathcal{H}$ как оператор, совпадающий с $\mathcal{U}_{t,s}^{-1}$ на $H'(t)$ и являющийся нулевым на подпространстве $H(t) = \text{Im } P(t)$; тогда

$$\|\mathcal{U}(s, t)Q(t)\| \leq M' \exp(\gamma(s - t)), \quad s \leq t, \quad s, t \in \mathbb{J}.$$

Пару проекторнозначных функций P, Q , участвующих в определении 1, назовем *расщепляющей для семейства $\mathcal{U}$* . В [5], [6] и статье [7] для случая $\dim \mathcal{H} < \infty$ (подробная история вопроса освещена в [3]) получены следующие используемые здесь два результата.

ТЕОРЕМА 1. *Линейный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ (непрерывно) обратим тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}$. Если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}$, то обратный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{-1} \in \text{End } L^2$ определяется формулой*

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{-1}f)(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t, s)f(s) ds, \quad f \in L^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

где функция Грина $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ имеет вид

$$G(t, s) = \begin{cases} -\mathcal{U}(t, s)P(s), & s \leq t, \\ \mathcal{U}(t, s)Q(s), & s > t. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. *Если $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – генератор сильно непрерывной полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, то дифференциальный оператор*

$$\mathcal{L}_T = -\frac{d}{dt} + A: L^2 \rightarrow L^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$$

обратим тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

$$\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset; \quad (2.3)$$

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset, \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(A - i\lambda I)^{-1}\| = \gamma(A) < \infty. \quad (2.4)$$

Если выполнено одно из условий (2.3), (2.4), то полугруппа T гиперболична и обратный оператор $\mathcal{L}_T^{-1}$ определяется формулой (2.2), где $G(t, s) = G_A(t - s)$, $t, s \in \mathbb{R}$, и функция $G_A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ определяется равенствами

$$G_A(\tau) = \begin{cases} -T(\tau)P_{\text{int}}, & \tau \geq 0, \\ T(\tau)P_{\text{out}}, & \tau < 0. \end{cases}$$

В условиях теоремы $P_{\text{int}} \in \text{End } \mathcal{H}$ – проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(T(1)) : |\lambda| < 1\}$, и $P_{\text{out}} = I - P_{\text{int}}$ – дополнительный проектор. Символ $T(\tau)P_{\text{out}}$ для $\tau < 0$ обозначает оператор из $\text{End } \mathcal{H}$, однозначно определяемый из равенств

$$(T(\tau)P_{\text{out}})T(-\tau) = T(-\tau)(T(\tau)P_{\text{out}}) = P_{\text{out}}.$$

Таким образом, оператор $T(\tau)P_{\text{out}}$ является нулевым на подпространстве $H_{\text{int}} = \text{Im } P_{\text{int}}$ ($\text{Im } P_{\text{int}}$ – образ проектора P_{int}) и сужение $(T(\tau)P_{\text{out}})|_{H_{\text{out}}}$ оператора $T(\tau)P_{\text{out}}$ на подпространство $H_{\text{out}} = \text{Im } P_{\text{out}}$ совпадает с обратным к оператору $T(-\tau)|_{H_{\text{out}}}$. При этом в случае, если T – группа операторов, то $T(\tau)P_{\text{out}}$, $\tau < 0$, – произведение операторов $T(\tau)$ и P_{out} .

Подробное доказательство теоремы 2 имеется в статье [6].

ЛЕММА 1. *Имеет место оценка*

$$\|G_A(\tau)\| \leq M_0 e^{-\gamma_0 |\tau|}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

где $M_0 \geq 1$, $\gamma_0 > 0$ – некоторые постоянные.

Оценка (2.5) отмечалась, например, в [3], [5], [6].

Далее через $R_A: \rho(A) \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ будет обозначаться резольвента оператора A , т.е. $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, где $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ – его резольвентное множество.

ЛЕММА 2. *Если выполнено одно из условий (2.2), (2.3), то имеют место равенства*

$$\int_{\mathbb{R}} G_A(t) x e^{-i\lambda t} dt = R(i\lambda, A)x, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

$$\int_{\mathbb{R}} (G_A(t)x, G_A(t)y) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (R(i\lambda, A)x, R(i\lambda, A)y) d\lambda \quad (2.7)$$

для всех $x, y \in \mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (2.6), означающее, что резольвента оператора A является преобразованием Фурье функции G_A , непосредственно следует из определения функции G_A . Равенство (2.7) вытекает из тождества Планшереля для функций из $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. При этом важно отметить (для дальнейшего), что функции $\lambda \mapsto R(i\lambda, A)x: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, принадлежат $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Лемма доказана.

Теперь перейдем к исследованию уравнения Ляпунова

$$\mathcal{L}_A(X) = A^*X + XA = F \in \text{End } \mathcal{H}, \quad (2.8)$$

рассматриваемому в банаховой алгебре $\text{End } \mathcal{H}$. Предполагается, что $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – генератор гиперболической полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, и далее используются соответствующие обозначения.

Под *решением* уравнения (2.8) понимается оператор $W \in \text{End } \mathcal{H}$, обладающий следующими свойствами:

- 1) $Wx \in D(A^*)$;
- 2) $A^*Wx + WAx = Fx$ для любого $x \in D(A)$.

Для исследования существования решения уравнения (2.8) рассмотрим более общий класс уравнений. Пусть $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$, – два гильбертова пространства и $A_i = D(A_i) \subset \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$ – два генератора полугрупп операторов $T_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$, (класса C_0) соответственно.

Пусть $\text{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов (гомоморфизмов), определенных на $\mathcal{H}_1$ со значениями в $\mathcal{H}_2$. Введем в рассмотрение трансформатор (терминология Крейна)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \text{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) &\rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \\ \mathcal{L}X &= A_2X + XA_1, \quad X \in D(\mathcal{L}),\end{aligned}$$

с областью определения

$$D(\mathcal{L}) = \{X \in \text{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) : Xx_1 \in D(A_2) \text{ для всех } x \in D(A_1)\}$$

и требованием, что оператор $A_2X + XA_1: D(A_1) \subset \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ ограничен на $D(A_1)$. Если $X \in D(\mathcal{L})$, то в силу плотности $D(A_1)$ в $\mathcal{H}_1$ расширение оператора $A_2X + XA_1$ на $\mathcal{H}_1$ определено корректно и будет обозначаться тем же символом $A_2X + XA_1$.

В пространстве $\text{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ рассмотрим полугруппу операторов

$$\begin{aligned}\tilde{T}: \mathbb{R}_+ &\rightarrow \text{End Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \\ \tilde{T}(t)X &= T_2(t)XT_1(t), \quad t \geq 0, \quad X \in \text{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2).\end{aligned}$$

Эта полугруппа непрерывна в сильной топологии пространства $\text{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Исходя из этого, ее генератор

$$\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset \text{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$$

определим следующим образом. Его область определения $D(\mathcal{A})$ состоит из таких операторов $X \in \text{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, для которых существует такой оператор $Y \in \text{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, что верны равенства

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T_2(t)XT_1(t)x - Xx}{t} = Yx, \quad x \in \mathcal{H}_1. \quad (2.9)$$

При этом полагается $\mathcal{A}X = Y$. Отметим, что для $\mathcal{A}$ верны обычные свойства генераторов полугрупп операторов класса C_0 .

ЛЕММА 3. Генератор $\mathcal{A}$ полугруппы операторов $\tilde{T}$ совпадает с трансформатором $\mathcal{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X \in D(\mathcal{A})$, $Y = \mathcal{A}X \in \text{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ и $x \in D(A_1)$. Из дифференцируемости функции $t \mapsto T_1(t)x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{H}_1$ и равенства (2.9) получаем

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T_2(t)Xx - Xx}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T_2(t)XT_1(t)x - Xx}{t} - \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T_2(t)XT_1(t)x - T_2(t)Xx}{t} \\ &= Yx - XA_1x.\end{aligned}$$

Следовательно, $Xx \in D(A_2)$ и $Yx = (A_2X + XA_1)x$. Таким образом, Y – расширение оператора $A_2X + XA_1: D(A_1) \rightarrow \mathcal{H}_2$ на $\mathcal{H}_1$. Итак, $X \in D(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}X = \mathcal{A}X = Y$.

Обратно, пусть $X \in D(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}X = Y$. Докажем, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T_2(t)XT_1(t)x - Xx}{t} = Yx, \quad x \in \mathcal{H}_1.$$

Если $x \in D(A_1)$, то $Xx \in D(A_2)$ и тогда

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T_2(t)XT_1(t)x - Xx}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T_2(t)XT_1(t)x - T_2(t)Xx}{t} + \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T_2(t)Xx - Xx}{t} \\ &= XA_1x + A_2Xx = (\mathcal{L}X)x = Yx. \end{aligned}$$

Если x — произвольный вектор из $\mathcal{H}_1$, то рассмотрим последовательность векторов $x_n = -nR(n, A)$, $n \geq 1$, из $D(A_1)$, сходящуюся к x . Тогда последовательность функций

$$y_n(t) = T_2(t)XT_1(t)x_n, \quad n \geq 1,$$

на каждом конечном промежутке $[0, a]$ обладает следующими свойствами:

- 1) (y_n) сходится к функции $y(t) = T_2(t)XT_1(t)x$, $t \in [0, a]$, равномерно;
- 2) последовательность

$$y'_n = T_2(t)(A_2X + XA_1)T_1(t)x_n = T_2(t)YT_1(t)x_n, \quad n \geq 1,$$

равномерно сходится к функции $z(t) = T_2(t)YT_1(t)x$, $t \in [0, a]$.

Следовательно, функция y дифференцируема и $y'(0) = Yx$. Поэтому $Y \in D(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}X = Y$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть полугруппы операторов $T_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$, экспоненциально убывают. Тогда трансформатор $\mathcal{L}$ обратим и обратный к нему трансформатор $\mathcal{L}^{-1}$ определяется формулой

$$(\mathcal{L}^{-1}Y)x = - \int_0^\infty T_2(t)YT_1(t)x dt, \quad Y \in \text{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \quad x \in \mathcal{H}_1. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно сослаться на лемму 3, а также учесть, что правая часть в (2.10) определяет обратный оператор к генератору $\mathcal{A}$ полугруппы $\tilde{T}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

Теперь вернемся к рассмотрению уравнения Ляпунова (2.8).

ТЕОРЕМА 4. Пусть полугруппа $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ экспоненциально убывает. Тогда уравнение (2.8) разрешимо для любого оператора $F \in \text{End } \mathcal{H}$, решение X_0 единственно и оно представимо в виде

$$X_0x = - \int_0^\infty T^*(t)FT(t)x dt, \quad x \in \mathcal{H}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение этой теоремы непосредственно следует из теоремы 3, если положить

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}, \quad T_1 = T, \quad T_2 = T^*.$$

Введем в рассмотрение замкнутые подпространства

$$\begin{aligned}\text{End}_* \mathcal{H} &= \{X \in \text{End } \mathcal{H} : P_{\text{int}}^* X P_{\text{out}} = P_{\text{out}}^* X P_{\text{int}} = 0\} \\ &= \{X \in \text{End } \mathcal{H} : P_{\text{int}}^* X P_{\text{int}} + P_{\text{out}}^* X P_{\text{out}} = X\}, \\ \text{End}_0 \mathcal{H} &= \{X \in \text{End } \mathcal{H} : P_{\text{int}} X P_{\text{out}}^* = P_{\text{out}} X P_{\text{int}}^* = 0\} \\ &= \{X \in \text{End } \mathcal{H} : P_{\text{int}} X P_{\text{int}}^* + P_{\text{out}} X P_{\text{out}}^* = X\}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть полугруппа $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ гиперболична. Тогда уравнение (2.8) разрешимо для любого оператора F из подпространства $\text{End}_* \mathcal{H}$, причем существует и единственно решение $W \in \text{End}_* \mathcal{H}$. Оно представимо формулой

$$\begin{aligned}Wx &= - \int_0^\infty G_A(t)^* F G_A(t) x dt + \int_{-\infty}^0 G_A(t)^* F G_A(t) x dt \\ &= - \int_0^\infty T(t)^* P_{\text{int}}^* F T(t) P_{\text{int}} x dt + \int_{-\infty}^0 (T(t) P_{\text{out}})^* F T(t) P_{\text{out}} x dt, \quad x \in \mathcal{H}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из разложения $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{int}} \oplus \mathcal{H}_{\text{out}}$ следует, что полугруппу операторов T можно записать в виде

$$\begin{aligned}T(t) &= T_{\text{int}}(t) \oplus T_{\text{out}}(t), \quad t \geq 0, \quad \text{где } T_{\text{int}}(t) = T(t)|_{\mathcal{H}_{\text{int}}}, \\ T_{\text{out}} &= T(t)|_{\mathcal{H}_{\text{out}}}, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Полугруппа $T_{\text{out}}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}_{\text{out}}$ состоит из обратимых операторов, т.е. является группой операторов, $\sigma(T_{\text{out}}(1)) = \sigma_{\text{out}}$, и, следовательно, полугруппы $T_{\text{int}}, T_{\text{out}}^{-1}(t) = T_{\text{out}}(-t), t \geq 0$, являются экспоненциально убывающими полугруппами. Соответственно проектор P_{int}^* осуществляет разложение

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{int}}' \oplus \mathcal{H}_{\text{out}}', \quad \mathcal{H}_{\text{int}}' = \text{Im } P_{\text{int}}^*, \quad \mathcal{H}_{\text{out}}' = \text{Im } P_{\text{out}}^*,$$

гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Тогда оператор $T^*(t) = T(t)^*$, запишется в виде

$$T^*(t) = T'_{\text{int}}(t) \oplus T'_{\text{out}}(t), \quad \text{где } T'_{\text{int}}(t) = T(t)^*|_{\mathcal{H}_{\text{int}}'}, \quad T'_{\text{int}}(t) = T(t)^*|_{\mathcal{H}_{\text{int}}'}, \quad t \geq 0,$$

причем T'_{out} – полугруппа обратимых операторов. Полугруппы $T'_{\text{out}}, (T'_{\text{out}})^{-1}(t) = T'_{\text{out}}(t)^{-1}, t \geq 0$, экспоненциально убывают. Поскольку $F \in \text{End}_* \mathcal{H}$ и решение X ищется в том же подпространстве, то

$$F(\mathcal{H}_{\text{int}}) \subset \mathcal{H}_{\text{int}}', \quad F(\mathcal{H}_{\text{out}}) \subset \mathcal{H}_{\text{out}}'$$

и таким же свойством обладает решение X (если оно существует).

Все сказанное позволяет записать уравнение Ляпунова (2.8) в виде системы двух уравнений вида

$$\begin{aligned}A'_{\text{int}} X_{\text{int}} + X_{\text{int}} A_{\text{int}} &= F_{\text{int}} \in \text{Hom}(\mathcal{H}_{\text{int}}, \mathcal{H}_{\text{int}}'), \\ (-A'_{\text{out}}) X_{\text{out}} + X_{\text{out}} (-A'_{\text{out}}) &= -F_{\text{out}} \in \text{Hom}(\mathcal{H}_{\text{out}}, \mathcal{H}_{\text{out}}'),\end{aligned}$$

где $A_{\text{int}}, A'_{\text{int}}, -A_{\text{out}}, -A'_{\text{out}}$ – генераторы полугрупп операторов $T_{\text{int}}, T'_{\text{int}}, T_{\text{out}}^{-1}, (T'_{\text{out}})^{-1}$ соответственно и

$$F_{\text{int}} x_1 = F x_1, \quad x_1 \in \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad F_{\text{out}} x_2 = F x_2, \quad x_2 \in \mathcal{H}_{\text{out}}.$$

К каждому из этих уравнений применима теорема 3. Следовательно, имеют место представления

$$\begin{aligned} W_{\text{int}}x_1 &= - \int_0^\infty T'_{\text{int}}(t)F_{\text{int}}T_{\text{int}}(t)x_1 dt, & x_1 &\in \mathcal{H}_{\text{int}}, \\ W_{\text{out}}x_2 &= \int_0^\infty (T'_{\text{out}})^{-1}(t)F_{\text{out}}T_{\text{out}}(t)x_2 dt, & x_2 &\in \mathcal{H}_{\text{out}}. \end{aligned}$$

Теперь ясно, что решение $W_0 \in \text{End}_* \mathcal{H}$ уравнения (2.8) единственно и имеет вид

$$W_0x = W_{\text{int}}x_1 + W_{\text{out}}x_2, \quad x \in \mathcal{H}, \quad x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad x_2 \in \mathcal{H}_{\text{out}}.$$

Непосредственно из определения всех введенных в рассмотрение операторов и полугрупп теперь следует, что W_0 представимо в виде (2.11). Теорема доказана.

Отметим, что достаточно подробный обзор результатов по разрешимости рассматриваемых здесь уравнений имеется в статье [8]. Теорема о спектре трансформатора $\mathcal{L}$ в случае, когда A_1, A_2 – генераторы аналитических полугрупп операторов, приведена в [9; теорема 13.35].

3. Теорема Крейна для генераторов групп и некоторых классов полугрупп операторов. Следующая теорема является одним из основных результатов статьи.

ТЕОРЕМА 6. *Для того, чтобы сильно непрерывная группа операторов $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ была гиперболической, необходимо и достаточно, чтобы существовали равномерно отрицательно определенные операторы $F \ll 0, F_* \ll 0$ из алгебры $\text{End } \mathcal{H}$ такие, что уравнение (2.8) и уравнение*

$$AX + XA^* = F_* \tag{3.1}$$

имели соответствующие им самосопряженные решения $W, W_ \in \text{End } \mathcal{H}$. Если $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } H$ – гиперболическая полугруппа операторов, то для любых равномерно отрицательных операторов $F \in \text{End}_* \mathcal{H}, F_* \in \text{End } \mathcal{H}$ уравнения (2.8) и (3.1) имеют единственные самосопряженные решения $W \in \text{End}_* \mathcal{H}, W_* \in \text{End } \mathcal{H}$. Эти операторы обратимы и представимы формулами*

$$\begin{aligned} Wx &= - \int_0^\infty G_A(t)^* F G_A(t)x dt + \int_{-\infty}^0 G_A(t)^* F G_A(t)x dt \\ &= - \int_0^\infty T(t)^* P_{\text{int}}^* F P_{\text{int}} T(t)x dt + \int_0^\infty (T(-t)P_{\text{out}})^* F P_{\text{out}} T(-t)x dt, & x &\in \mathcal{H}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$W_*x = - \int_0^\infty G_A(t)F_*G_A(t)^*x dt + \int_{-\infty}^0 G_A(t)F_*G_A(t)^*x dt, \quad x \in \mathcal{H}. \tag{3.3}$$

Подпространства $\mathcal{H}_{\text{int}}$ и $\mathcal{H}_{\text{out}}$ являются соответственно W -положительными и W -отрицательными, причем они взаимно W -ортогональны (терминология взята из [1]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть группа операторов $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ гиперболическа. Тогда из теоремы 5 следует разрешимость в подпространстве $\text{End}_* \mathcal{H}$

уравнения (2.8) с $F \in \text{End}_* \mathcal{H}$ и представление его решения формулой (3.2). Применение теоремы 5 к сопряженной полугруппе приводит к формуле (3.3). Из формул (3.2), (3.3) очевидным образом следует самосопряженность операторов W и W^* .

Докажем обратимость оператора W . Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} & (T(1)^*WT(1) - W)x \\ &= - \int_1^\infty G_A(t)^*FG_A(t)x \, dt + \int_{-\infty}^0 T(1)^*(T(t)P_{\text{out}})^*F(T(t)P_{\text{out}})T(1)x \, dt \\ & \quad + \int_0^\infty G_A(t)^*FG_A(t)x \, dt - \int_{-\infty}^0 (T(t)P_{\text{out}})^*FT(t)P_{\text{out}}x \, dt \\ &= \int_0^1 (T(t)P_{\text{int}})^*FT(t)P_{\text{int}}x \, dt + \int_0^1 (T(t)P_{\text{out}})^*FT(t)P_{\text{out}}x \, dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & ((T(1)^*WT(1) - W)x, x) \\ &= - \left(\int_0^1 \|(-F)^{1/2}T(t)P_{\text{int}}x\|^2 \, dt + \int_0^1 \|(-F)^{1/2}T(t)P_{\text{out}}x\|^2 \, dt \right) \\ &\leq -\delta \left(\int_0^1 \|T(t)P_{\text{int}}x\|^2 \, dt + \int_0^1 \|T(t)P_{\text{out}}x\|^2 \, dt \right), \quad x \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

где $\delta = \min_{\lambda \in \sigma((-F)^{1/2})} |\lambda|$. Поскольку T – группа операторов, то для всех $x \in \mathcal{H}$ и $t \in [0, 1]$ имеем

$$\|x\| = \|T(-t)T(t)x\| \leq \left(\sup_{\tau \in [0, 1]} \|T(-\tau)\| \right) \|T(t)x\| = M\|T(t)x\|.$$

Следовательно,

$$\|T(t)x\| \geq M^{-1}\|x\|, \quad t \in [0, 1], \quad x \in \mathcal{H}.$$

Из этих оценок теперь получаем

$$\begin{aligned} ((T(1)^*WT(1) - W)x, x) &\leq -\delta M^{-2}(\|P_{\text{int}}x\|^2 + \|P_{\text{out}}x\|^2) \\ &\leq -\frac{\delta}{4} M^{-2}\|P_{\text{int}}\|^{-2}\|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

где последнее неравенство получено с использованием оценки

$$\|P_{\text{int}}x\|^2 + \|P_{\text{out}}x\|^2 \geq \frac{1}{4}\|P_{\text{int}}\|^{-2}\|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}.$$

В свою очередь, она следует из монографии [10; § 4.4].

Таким образом, оператор $T(1)^*WT(1) - W$ является равномерно отрицательно определенным. Поскольку выполнено условие (2.2), то осталось сослаться на теорему 7.1' из главы 1 монографии [1], из которой следует обратимость оператора W , а также следует W -положительность подпространства $\mathcal{H}_{\text{int}}$, W -отрицательность подпространства $\mathcal{H}_{\text{out}}$ и W -ортогональность этих подпространств. Точно таким же образом устанавливаются соответствующие свойства оператора, определенного формулой (3.3). При этом применяется теорема 5 к сопряженной полугруппе T^* .

Достаточность условий теоремы доказана в работах [2], [3]. Мы воспроизведем доказательство достаточности в следующей теореме при других более общих условиях. Теорема доказана.

Если полугруппа операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ не является группой (состоит из необратимых операторов), то утверждение теоремы 6 (в части необходимости условий) перестает быть верным.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathcal{H}$ – бесконечномерное гильбертово пространство, A – генератор полугруппы $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ компактных операторов и полугруппа T является гиперболической (например, выполнены условия (2.4)). Такая полугруппа непрерывна в равномерной операторной топологии при $t > 0$ [11]. Поэтому участвующие в формулах (3.2), (3.3) операторные функции непрерывны в равномерной операторной топологии при $t > 0$ и их значения являются компактными операторами. Следовательно, операторы W и W_* являются компактными и, значит, необратимыми. Более конкретным примером может являться любой отрицательно определенный оператор $A = A^*: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ с компактной резольventой.

Несмотря на пример 1, все-таки существуют классы полугрупп операторов, для которых имеет место близкий аналог теоремы 6. Два таких класса будут описаны ниже.

Оператор $B \in \text{End } \mathcal{H}$ назовем *корректным* (или *равномерно инъективным*), если выполнено условие

$$\alpha(B) = \inf_{\|x\|=1} \|Bx\| > 0.$$

Полугруппу $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ класса C_0 назовем *полугруппой корректных операторов*, если оператор $T(1)$ является корректным оператором.

Для любого $t_0 \in [0, 1]$ и любого $x \in \mathcal{H}$ с $\|x\| = 1$ верны оценки

$$\begin{aligned} \alpha(T(1)) &\leq \|T(1)x\| = \|T(1 - t_0)T(t_0)x\| \leq \|T(1 - t_0)\| \|T(t_0)x\| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|T(t)\| \|T(t_0)x\| = M \|T(t_0)x\|, \end{aligned}$$

из которых получаем, что

$$\sup_{t_0 \in [0, 1]} \alpha(T(t_0)) \geq M^{-1} \alpha(T(1)). \quad (3.4)$$

Следовательно, если $T(1)$ – корректный оператор, то корректными являются и все операторы $T(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Поскольку $\alpha(T(t_1 + t_2)) \geq \alpha(T(t_1))\alpha(T(t_2))$ для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, то все операторы $T(t)$, $t \geq 0$, корректны.

Полугруппу $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ назовем полугруппой *сюрьективных операторов*, если оператор $T(1)$ сюрьективен.

Сюрьективность оператора $T(1)$ влечет корректность оператора $T(1)^*$, и, следовательно, сопряженная полугруппа $T^*: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ операторов является группой корректных операторов.

Отметим, что используемый далее символ $B < 0$ для $B \in \text{End } \mathcal{H}$ означает отрицательную определенность оператора B . Для такого оператора его ядро $\text{Ker } B$ нулевое.

ТЕОРЕМА 7. *Для того, чтобы полугруппа $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ корректных операторов была гиперболической, необходимо и достаточно, чтобы существовали равномерно отрицательный оператор $F \ll 0$ и отрицательный оператор $F_* < 0$ из алгебры $\text{End } \mathcal{H}$ такие, что уравнения (2.8) и (3.1) имели бы соответствующие им самосопряженные решения $W, W_* \in \text{End } \mathcal{H}$.*

Если полугруппа T гиперболична, то для любых равномерно отрицательных операторов $F \in \text{End}_ \mathcal{H}$, $F_* \in \text{End } \mathcal{H}$ уравнения (2.8) и (3.1) имеют единственные самосопряженные решения $W \in \text{End}_* \mathcal{H}$, $W_* \in \text{End}_0 \mathcal{H}$; при этом оператор W обратим, а W_* инъективен и они представимы в виде (3.2) и (3.3) соответственно. Подпространства $\mathcal{H}_{\text{int}}$ и $\mathcal{H}_{\text{out}}$ являются соответственно W -положительными и W -отрицательными, причем они взаимно W -ортогональны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство необходимости условия дублирует доказательство теоремы 6, кроме заключительной ее части. Теперь оценка

$$\begin{aligned} & - \left(\int_0^1 \|T(t)P_{\text{int}}x\|^2 dt + \int_0^1 \|T(t)P_{\text{out}}x\|^2 dt \right) \\ & \geq -M^{-2}(\alpha(T(1)))^2 (\|P_{\text{int}}x\|^2 + \|P_{\text{out}}x\|^2) \\ & \geq -\frac{1}{4}M^{-2}\alpha(T(1))^2 \|P_{\text{int}}\|^{-2}\|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

будет следовать из (3.4) (см. доказательство необходимости теоремы 6). Итак, $T(1)^*WT(1) - W \ll 0$. Осталось воспользоваться теоремой 7.1' из монографии [1], из которой следуют указанные в условиях теоремы свойства оператора W .

При рассмотрении оператора $T(1)W_*T(1)^* - W_*$ мы получим

$$\begin{aligned} & ((T(1)W_*T(1)^* - W_*)x, x) \\ & = - \left(\int_0^1 \|(-F_*^{1/2})T^*(t)P_{\text{int}}^*x\|^2 dt + \int_0^1 \|(-F_*^{1/2})T^*(t)P_{\text{out}}^*x\|^2 dt \right) < 0, \\ & \quad 0 \neq x \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Отличие от нуля при $x \neq 0$ правой части этого равенства следует из отличия от нуля в некоторой окрестности нуля из $[0, 1]$ одной из подынтегральных функций (используется свойство сильной непрерывности полугруппы и равенства $T^*(0)x = x$, $x \in \mathcal{H}$). Таким образом, оператор $G = T(1)W_*T(1)^* - W_*$ — отрицательно определенный с нулевым ядром. Теперь, следуя доказательству теоремы 7.1' из [1], рассмотрим, используя условие (2.3), оператор

$$B = (T(1) + I)(T(1) - I)^{-1} \in \text{End } \mathcal{H}.$$

Из отрицательной определенности оператора G следует, что $\text{Re}(W_*B) < 0$ и, следовательно, $\text{Ker } W_* = \{0\}$, т.е. W_* — инъективный оператор.

Достаточность. Пусть существует оператор $F \ll 0$ такой, что уравнение (2.8) имеет решение $W = W^* \in \text{End } \mathcal{H}$. Тогда для любого $x \in D(A)$ верна оценка

$$2\text{Re}(Ax, Wx) = ((WA + A^*W)x, x) = (Fx, x) \leq \lambda_{\max}(F)\|x\|^2,$$

где $\lambda_{\max}(F) = \max_{\lambda \in \sigma(F)} \lambda$. Таким образом, A равномерно W -диссипативен. Далее, используя свойство

$$(Wx, x) \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{H},$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in D(A)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\lambda_{\max}(F)| \|x\|^2 &= |\operatorname{Re}(Ax, Wx)| = |\operatorname{Re}((A - i\lambda I)x, Wx)| \\ &\leq |((A - i\lambda I)x, Wx)| \leq \|(A - i\lambda I)x\| \|W\| \|x\|. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\gamma(A) = \inf_{x \in D(A), \|x\|=1} \|(A - i\lambda I)x\| \geq \frac{|\lambda_{\max}(F)|}{2} \|W\|^{-1} \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Поэтому операторы $A - i\lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, корректны. Следовательно, их область значений замкнута. Для доказательства обратимости этих операторов достаточно установить (в силу альтернативы Фредгольма), что ядра $\operatorname{Ker}(A^* - i\lambda I)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, сопряженных к ним операторов $A^* - i\lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, нулевые. Для операторов A^* , W_* , F_* верны оценки

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\lambda_{\max}(F_*)| \|x\|^2 &= |\operatorname{Re}(A^*x, W_*x)| = \operatorname{Re}((A^* - i\lambda I)x, W_*x) \\ &\leq \|(A^* - i\lambda I)x\| \|W_*x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in D(A^*). \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{Ker}(A^* - i\lambda I) = \{0\}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, то операторы $A - i\lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, обратимы. Теперь из (3.5) получаем оценку

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(A - i\lambda I)^{-1}\| \leq 2(\lambda_{\max}(F))^{-1} \|W\| \gamma(A) = 2\|F\|^{-1} \|W\| \gamma(A). \quad (3.6)$$

Итак, выполнены условия теоремы 2 и, следовательно, полугруппа T является гиперболической.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Соответствующий аналог теоремы 7 верен для полугруппы $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{H}$ сюръективных операторов. В данном случае в ее формулировке оператор W будет инъективным, а оператор W^* – обратимым. Доказательство соответствующего результата сводится к рассмотрению сопряженной полугруппы операторов T^* , которая является полугруппой корректных операторов.

4. Теорема Крейна для гиперболической полугруппы Хоулэнда. Как отмечалось, эволюционные семейства операторов появляются в связи с представлением решений при $t \geq s$ абстрактной задачи Коши $x(s) = x_0 \in D(A(s))$ для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad t \geq s, \quad (4.1)$$

где $A(t): D(A(t)) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$, – семейство линейных замкнутых операторов, действующих в $\mathcal{H}$.

Если $\mathcal{U}: \Delta_{\mathbb{R}} \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{H}$ – соответствующее уравнению (4.1) семейство эволюционных операторов, то оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ также будем обозначать символом $-d/dt + A(t)$ и называть *дифференциальным*.

Заданному семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_{\mathbb{R}} \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{H}$ сопоставим сильно непрерывную группу операторов

$$(T_{\mathcal{U}}(t)x)(s) = \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad x \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}).$$

Эту группу операторов называют *группой операторов Хоулэнда* [3]. Отметим следующие два важных для дальнейшего результата.

ТЕОРЕМА 8 [5]. *Оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ является генератором группы операторов T .*

ТЕОРЕМА 9 [3], [5]. *Группа операторов Хоулэнда гиперболична тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных (в силу теоремы 2) условий:*

- 1) *оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset L^2 \rightarrow L^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ обратим;*
- 2) *семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}$.*

Пусть $C_{\text{bs}}(\mathbb{R}, \text{End } \mathcal{H})$ – банахова алгебра ограниченных и сильно непрерывных на $\mathbb{R}$ операторнозначных функций $X: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ с нормой $\|X\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|X(t)\|$. Символом $\mathcal{B}(L^2)$ обозначим замкнутую подалгебру из банаховой алгебры $\text{End } L^2$, которая состоит из операторов умножения на функции из $C_{\text{bs}}(\mathbb{R}, \text{End } \mathcal{H})$. Если $\tilde{B} \in \mathcal{B}(L^2)$ имеет вид

$$(\tilde{B}y)(t) = B(t)y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in L^2, \quad B \in C_{\text{bs}}(\mathbb{R}, \text{End } \mathcal{H}),$$

то его равномерная отрицательность в L^2 означает существование $\delta > 0$ такого, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (B(t)x, x) \leq -\delta \|x\|^2 \quad \text{для всех } x \in \mathcal{H}.$$

Следующая теорема является непосредственным следствием теоремы 6 (при этом используются теоремы 8, 9).

ТЕОРЕМА 10. *Для того, чтобы группа операторов Хоулэнда $T_{\mathcal{U}}: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } L^2$ была гиперболической, необходимо и достаточно, чтобы существовали равномерно отрицательно определенные операторы $\tilde{F}, \tilde{F}_* \in \mathcal{B}(L^2)$ такие, что уравнения*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^* X + X \mathcal{L}_{\mathcal{U}} = \tilde{F}, \quad \mathcal{L}_{\mathcal{U}} X + X \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^* = \tilde{F}_* \quad (4.2)$$

имели бы соответствующие самосопряженные решения $\tilde{W}, \tilde{W}_ \in \mathcal{B}(L^2)$.*

Если полугруппа $T_{\mathcal{U}}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } L^2$ гиперболическая, то для любых самосопряженных равномерно отрицательных операторов $\tilde{F}, \tilde{F}_ \in \mathcal{B}(L^2)$ вида*

$$(\tilde{F}x)(s) = F(s)x(s), \quad (\tilde{F}_*x)(s) = F_*(s)x(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad x \in L^2,$$

уравнения (4.2) имеют единственные самосопряженные решения $\tilde{W}, \tilde{W}_ \in \mathcal{B}(L^2)$ вида*

$$(\tilde{W}x)(s) = W(s)x(s), \quad (\tilde{W}_*x)(s) = W_*(s)x(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad x \in L^2.$$

Операторнозначные функции $W, W_ \in C_{\text{bs}}(\mathbb{R}, \text{End } \mathcal{H})$ обратимы в $C_{\text{bs}}(\mathbb{R}, \text{End } \mathcal{H})$ и представимы формулами (интеграл понимается в сильном смысле)*

$$\begin{aligned} W(s) = & - \int_0^{\infty} \mathcal{U}(t+s, s)^* P_{\text{int}}(s+t)^* F(s+t) P_{\text{int}}(s+t) \mathcal{U}(t+s, s) dt \\ & + \int_0^{\infty} \mathcal{U}(s-t, s)^* P_{\text{out}}(s-t)^* F(s-t) P_{\text{out}}(s-t) \mathcal{U}(s-t, s) dt, \end{aligned}$$

$$W_*(s) = - \int_0^\infty [\mathcal{U}(s, s-t)P_{\text{int}}(s-t)F_*(s-t)P_{\text{out}}(s-t)^*\mathcal{U}(s, s-t)^* \\ + \mathcal{U}(s, s+t)P_{\text{out}}(s+t)F_*(s+t)P_{\text{out}}(s+t)^*\mathcal{U}(s, s+t)^*] dt,$$

где $s \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ – непрерывная ограниченная функция и

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dt} + A(t): W_2^1(\mathbb{R}, H) \subset L^2 \rightarrow L^2,$$

то уравнения (4.2) в алгебре $\mathcal{B}(L^2)$ имеют вид

$$-\dot{X}(t) + A(t)^*X(t) + X(t)A(t) = F(t), \quad -\dot{X}(t) + A(t)X(t) + X(t)A(t)^*, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Здесь $W_2^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}) = \{x \in L^2 : x \text{ абсолютно непрерывна и } \dot{x} \in L^2\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1970.
- [2] C. Chicone, Y. Latushkin, “Hyperbolicity and dissipativity”, *Evolution Equations* (Baton Rouge, LA, 1992), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **168**, Marcel Dekker, New York, 1995, 95–106.
- [3] C. Chicone, Yu. Latushkin, *Evolution Semigroup in Dynamical Systems and Differential Equations*, Math. Surveys Monogr., **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [4] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
- [5] А. Г. Баскаков, “Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **30:3** (1996), 1–11.
- [6] А. Г. Баскаков, Ю. Н. Синтяев, “Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов: оценки решений”, *Дифференц. уравнения*, **46:2** (2010), 210–219.
- [7] A. Ben-Artzi, I. Gohberg, “Dichotomy of systems and invertibility of linear ordinary differential operators”, *Time-Variant Systems and Interpolation*, Oper. Theory Adv. Appl., **56**, Birkhäuser, Basel, 1992, 90–119.
- [8] R. Bhatia, P. Rosenthal, “How and why to solve the operator equation $AX - XB = Y$ ”, *Bull. London Math. Soc.*, **29:1** (1997), 1–21.
- [9] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [10] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [11] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Grad. Texts in Math., **194**, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [12] R. T. Rau, “Hyperbolic evolution semigroups on vector valued function spaces”, *Semigroup Forum*, **48:1** (1994), 107–118.

А. Г. Баскаков

Воронежский государственный университет
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Поступило

17.02.2009

А. А. Воробьев

Воронежский государственный университет
E-mail: antonvsu@gmail.com

М. Ю. Романова

Воронежский государственный университет
E-mail: maria.romanovaru@mail.ru