Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Галошкин, Ю. С. Семенов, Один пример, связанный со свойством Сидона для m -зависимых систем, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 3, 350–354

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8637>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 08:39:08

Один пример, связанный со свойством Сидона для m -зависимых систем

В. Ф. Гапошкин, Ю. С. Семёнов

Приводится достаточное условие, при котором m -зависимая система является системой Сидона. Доказана неусилимость этого условия при любом натуральном m . Доказательство основано на совместности некоторой системы квадратичных уравнений над полем $\mathbb{R}$.

Библиография: 1 название.

Пусть $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ – система случайных величин, обладающих свойствами

$$\mathbb{E}X_k = 0, \quad \mathbb{E}X_k^2 = 1, \quad |X_k| \leq M \quad \text{п.в.}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Эта система называется *системой Сидона*, если для некоторой постоянной $B > 0$ и любых чисел $a_1, \dots, a_n$ (n любое натуральное)

$$\sup_{\omega} \operatorname{vrai}_{\omega} \left| \sum_{k=1}^n a_k X_k(\omega) \right| \geq B \sum_{k=1}^n |a_k|. \quad (2)$$

В частности, всякая независимая система, удовлетворяющая (1), является системой Сидона.

Система $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ называется *m -зависимой* ($m = 1, 2, 3, \dots$), если при любом n независимы σ -алгебры $\mathcal{A}\{X_1, \dots, X_n\}$ и $\mathcal{A}\{X_{n+m+1}, X_{n+m+2}, \dots\}$.

В работе [1] исследовались условия, при которых m -зависимая система является системой Сидона. Пусть $\rho_{ij} = \mathbb{E}X_i X_j$ – ковариация X_i и X_j .

Основной результат работы [1] заключается в следующем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ – m -зависимая система, удовлетворяющая (1), и пусть

$$\theta_i = \sum_{j \neq i} |\rho_{ij}| \leq \theta < 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Тогда $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ – система Сидона.

Отсюда вытекает такое следствие.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ – m -зависимая система, удовлетворяющая (1), и пусть также для любого $i = 1, 2, \dots$ выполнены условия

- 1) $|\rho_{ij}| \leq 1/(2m)$, если $1 \leq |i - j| \leq m$;
- 2) $|\rho_{ij}| \leq \lambda < 1/(2m)$ хотя бы для одного из индексов j , $j = j(i)$.

Тогда $(X_k)_{k=1}^\infty$ – система Сидона.

Действительно, в силу m -зависимости выполнено условие (3):

$$\theta_i = \sum_{j \neq i} |\rho_{ij}| = \sum_{i, 1 \leq |i-j| \leq m} |\rho_{ij}| \leq \frac{2m-1}{2m} + \lambda = \theta < 1.$$

В работе [1] отмечалось, что при $m = 1, 2, 3$ этот результат неулучшаем. В данной заметке будет построен пример, показывающий неулучшаемость теоремы 2 при любом $m \geq 1$.

Рассмотрим систему случайных величин в $L_2[0, 1]$:

$$X_k = \alpha_0 r_k + \alpha_1 r_{k+1} + \cdots + \alpha_m r_{k+m}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (4)$$

Здесь $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ – фиксированные вещественные числа, $(r_k)_{k=1}^\infty$ – независимая система Радемахера, $r_k(x) = \text{sign} \sin(2^k \pi x)$, $x \in [0, 1]$.

Система $(X_k)_{k=1}^\infty$ является стационарной и m -зависимой. Если $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m = 0$, то она не является системой Сидона, так как при любом $n = 1, 2, \dots$

$$\left| \sum_{k=1}^n X_k(x) \right| \leq C \quad \text{п.в. на} \quad [0, 1],$$

где постоянная C зависит лишь от $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ и m .

ТЕОРЕМА 3. Существует t -зависимая система $(X_k)_{k=1}^\infty$, удовлетворяющая (1) и не являющаяся системой Сидона, для которой выполнены условия

$$|\rho_{ij}| = \frac{1}{2m}, \quad \text{если } 1 \leq |i - j| \leq m.$$

Таким образом, в теореме 2 нельзя обойтись без условия 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве $(X_k)_{k=1}^\infty$ можно взять систему (4), если удастся найти вещественные числа $\alpha_0, \dots, \alpha_m$, являющиеся решением системы уравнений второго порядка

[illegible]

Действительно, тогда $EX_k = 0$, $EX_k^2 = 1$ и $\rho_{ij} = -1/(2m)$ при условии $1 \leq |i-j| \leq m$. Кроме того, если выполнены соотношения (5), то

$$\left(\sum_{i=0}^m \alpha_i\right)^2 = \sum_{i=0}^m \alpha_i^2 + 2 \cdot \sum_{0 \leq i < j \leq m} \alpha_i \alpha_j = 1 - 2m \cdot \frac{1}{2m} = 0.$$

Существование вещественного решения системы (5) утверждается в следующей теореме, которая на наш взгляд представляет и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 4. *Для любого $m = 1, 2, \dots$ система (5) совместна над $\mathbb{R}$, причем число ее решений конечно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \geq 1$ фиксировано. Рассмотрим кольцо $\mathbb{R}[q, q^{-1}]$ многочленов Лорана – кольцо рациональных функций от переменной q вида $\sum_{j=l}^k b_j q^j$, где l и k – целые числа, коэффициенты b_j вещественные. Теорема 4 эквивалентна следующему утверждению: *существует конечное отличное от нуля число многочленов $P(q) = \alpha_0 + \alpha_1 q + \dots + \alpha_m q^m$ с вещественными коэффициентами таких, что в кольце многочленов Лорана $\mathbb{R}[q, q^{-1}]$ выполнено равенство*

$$\begin{aligned} P(q)P(q^{-1}) &= (\alpha_0 + \alpha_1 q + \dots + \alpha_m q^m)(\alpha_0 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_m q^{-m}) \\ &= 1 - \frac{1}{2m}(q + q^{-1}) - \dots - \frac{1}{2m}(q^m + q^{-m}). \end{aligned} \quad (6)$$

Действительно, если в равенстве (6) раскрыть скобки и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной q , то получится система (5).

Исследуем корни многочлена Лорана в правой части равенства (6). Они, очевидно, также являются корнями уравнения

$$2mq^m = 1 + q + q^2 + \dots + q^{m-1} + q^{m+1} + \dots + q^{2m},$$

или же уравнения

$$(2m+1)q^m = 1 + q + q^2 + \dots + q^{2m}. \quad (7)$$

Отметим, что все корни уравнения (7) ненулевые.

ЛЕММА. *Корни $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ уравнения (7) удовлетворяют следующим свойствам:*

- 1) *все корни являются простыми, кроме корня $q = 1$, который имеет кратность 2;*
- 2) *если корень q лежит на единичной окружности $|q| = 1$, то $q = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Сначала рассмотрим корень $q = 1$. Дважды дифференцируя уравнение (7) по q и подставляя $q = 1$, убеждаемся, что $q = 1$ – двукратный корень (7) при любом m .

Покажем теперь, что любой комплексный корень $q \neq 1$ уравнения (7) является простым. Умножим уравнение (7) на $q - 1$. Получим уравнение

$$(2m+1)(q^{m+1} - q^m) = q^{2m+1} - 1 \quad (8)$$

с неединичными корнями той же кратности, что и в уравнении (7). Дифференцируя (8) по q и сокращая на $(2m+1)q^{m-1}$, получим, что для кратного корня $q \neq 1$ также должно выполняться условие

$$q^{m+1} = (m+1)q - m. \quad (9)$$

Покажем, что уравнения (8) и (9) не имеют общих корней, отличных от 1. Действительно, умножим уравнение (8) на q и подставим в новое уравнение выражение (9) для q^{m+1} . Тогда для q должно выполняться равенство

$$(2m+1)((m+1)q-m)(q-1) = ((m+1)q-m)^2 - q = (q-1)((m+1)^2q-m^2),$$

из которого при $q \neq 1$ следует равенство $(2m+1)((m+1)q-m) = (m+1)^2q-m^2$. Но последнее равенство при $q \neq 1$ не выполняется. Утверждение 1) леммы доказано.

Для доказательства утверждения 2) заметим, что в равенстве (7) при $|q| = 1$ модуль левой части равен $2m+1$, в то время как модуль правой части не превосходит этого числа и совпадает с ним только при $q = 1$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать в дополнение к лемме, что при нечетном m у уравнения (7) нет вещественных корней, отличных от 1, а при m четном имеется лишь одна пара неединичных вещественных корней, причем эти корни отрицательны.

Продолжим доказательство теоремы 4. Поскольку уравнение

$$P(q)P(q^{-1}) = 1 - \frac{1}{2m}(q+q^{-1}) - \dots - \frac{1}{2m}(q^m+q^{-m}) = 0 \quad (10)$$

имеет вещественные коэффициенты и не меняется при замене $q \rightarrow q^{-1}$, то по лемме его вещественные корни, отличные от 1, образуют r пар вида $\{q_1, q_1^{-1}\}, \dots, \{q_r, q_r^{-1}\}$, а комплексные корни, не являющиеся вещественными, образуют c четверок вида

$$\{q_{r+1}, \bar{q}_{r+1}, q_{r+1}^{-1}, \bar{q}_{r+1}^{-1}\}, \dots, \{q_{r+c}, \bar{q}_{r+c}, q_{r+c}^{-1}, \bar{q}_{r+c}^{-1}\},$$

причем $2 + 2r + 4c = 2m$, т.е. $m = 1 + r + 2c$.

Положим

$$W(q) = (q-1)(q-q_1) \dots (q-q_r) \cdot (q-q_{r+1})(q-\bar{q}_{r+1}) \dots (q-q_{r+c})(q-\bar{q}_{r+c}).$$

Заметим, что многочлен $W(q)$ имеет вещественные коэффициенты. Из равенства (6) и дальнейших рассуждений вытекает, что

$$P(q)P(q^{-1}) = \alpha_m^2 W(q)W(q^{-1}),$$

т.е. можно положить $P(q) = \alpha_m W(q)$.

Осталось определить (с точностью до знака ± 1) константу α_m . Ввиду (6)

$$P^2(-1) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \text{ четное,} \\ 1 + \frac{1}{m}, & \text{если } m \text{ нечетное.} \end{cases}$$

По лемме $W(-1) \neq 0$. Отсюда получаем, что $\alpha_m = \pm |P(-1)|/W(-1)$.

В окончательном виде

$$\begin{aligned} P(q) &= \alpha_m (q-1)(q-q_1) \dots (q-q_r)(q-q_{r+1})(q-\bar{q}_{r+1}) \dots (q-q_{r+c})(q-\bar{q}_{r+c}) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 q + \dots + \alpha_m q^m, \end{aligned}$$

что позволяет определить числа $\alpha_0, \dots, \alpha_m$, являющиеся решениями системы (5).

В заключение доказательства теоремы 4 отметим, что все остальные решения получаются за счет другого выбора основного корня в каждой паре взаимно обратных вещественных корней и основной пары комплексно-сопряженных корней в каждой четверке не вещественных корней уравнения (7) (или уравнения (10)). Поэтому число решений всегда конечно.

Теорема 4, а вместе с ней и теорема 3, доказаны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ф. Гапошкин, “Свойство Сидона для m -зависимых систем”, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, № 7, 8–11.

В. Ф. Гапошкин

Московский государственный университет путей сообщения
(МИИТ)

E-mail: gaposhkin@hotmail.com

Поступило

26.06.2009

Ю. С. Семёнов

Московский государственный университет путей сообщения
(МИИТ)

E-mail: yuri_semenoff@mail.ru