Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Федотов, Полуинварианты 2-представлений колчанов, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 1, 106–115

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8639>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:30:51

Полуинварианты 2-представлений колчанов

С. Н. Федотов

В работе получен аналог теоремы Прочези–Размыслова для алгебры полуинвариантов представлений произвольного колчана с вектором размерности $(2, 2, \dots, 2)$.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Колчан – это ориентированный граф Q , определяемый двумя конечными множествами Q_0 (множество “вершин”) и Q_1 (множество “стрелок”) и двумя отображениями $h, t: Q_1 \rightarrow Q_0$, которые каждой стрелке сопоставляют ее начало и конец. Зафиксируем некоторое поле $\mathbb{k}$ характеристики нуль. Представление (W, φ) колчана Q состоит из набора конечномерных $\mathbb{k}$ -векторных пространств W_v для каждой вершины $v \in Q_0$ и линейных отображений $\varphi_a: W_{ta} \rightarrow W_{ha}$ для каждой стрелки $a \in Q_1$. Вектором размерностей такого представления называется вектор $\alpha \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ с компонентами $\alpha_v = \dim_{\mathbb{k}} W_v$. Морфизм представлений $f: (W_v, \varphi_a) \rightarrow (U_v, \psi_a)$ – это набор линейных отображений $f_v: W_v \rightarrow U_v$ для каждой вершины $v \in Q_0$ таких, что $f_{ha}\varphi_a = \psi_a f_{ta}$ для всякой $a \in Q_1$. Ясно, что f является изоморфизмом тогда и только тогда, когда все f_v биективны.

При фиксированных векторных пространствах W_v размерностей α_v классы изоморфизма представлений колчана Q с вектором размерностей α находятся в естественной биекции с орбитами действия группы

$$\mathrm{GL}(\alpha) = \prod_{v \in Q_0} \mathrm{GL}(W_v)$$

в пространстве представлений

$$\mathrm{Rep}(Q, \alpha) = \bigoplus_{a \in Q_1} \mathrm{Hom}(W_{ta}, W_{ha}).$$

Это действие определяется как $(g \cdot \varphi)_a = g_{ha}\varphi_a g_{ta}^{-1}$, где $g = (g_v)_{v \in Q_0} \in \mathrm{GL}(\alpha)$. Заметим, что действие неэффективно. Если колчан связан, то ядром его является однопараметрическая подгруппа $\Delta = \{(tE, \dots, tE)\}$.

Далее, на пространстве $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$ действует группа $\mathrm{SL}(\alpha) = \prod_{v \in Q_0} \mathrm{SL}(W_v)$. Алгебра регулярных функций на $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$, инвариантных относительно этого действия, как линейное пространство порождена полуинвариантами, т.е. собственными

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-90416-Укр-ф-а).

векторами для действия $GL(\alpha)$. Поэтому ее обычно называют *алгеброй полуинвариантов*. Основной задачей работы является описание порождающих алгебры полуинвариантов $\mathbb{k}[\text{Rep}(Q, \alpha)]^{SL(\alpha)}$. Напомним, что порождающие алгебры $GL(\alpha)$ -инвариантных функций произвольного колчана описываются теоремой Размыслова–Прочези.

ТЕОРЕМА 1 [1; теорема 3.1]. *Для произвольного колчана Q и вектора размерности α алгебра $\mathbb{k}[\text{Rep}(Q, \alpha)]^{GL(\alpha)}$ порождена следами ориентированных циклов длины не больше $(\sum_v \alpha_v)^2$. При этом все соотношения между образующими являются следствиями теоремы Гамильтона–Кэли.*

Для полуинвариантов такого общего результата нет. Имеются лишь описания порождающих алгебры $\mathbb{k}[\text{Rep}(Q, \alpha)]^{SL(\alpha)}$ как векторного пространства; несколько основных подходов изложены в статьях [2]–[4]. В этой работе для алгебры полуинвариантов 2-представлений колчана, т.е. представлений с вектором размерности $(2, 2, \dots, 2)$, предъявлена система порождающих в духе теоремы Размыслова–Прочези.

*Матрицей, присоединенной к данной квадратной матрице A , будем, как обычно, называть матрицу $\hat{A}$, составленную из алгебраических дополнений к элементам A^T . Удобно считать, что матрица, присоединенная к матрице линейного отображения $F: U \rightarrow V$, определяет линейное отображение из V в U . Рассмотрим произвольный колчан Q . Пусть $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ и $Q_1 = \{a_1, \dots, a_s\}$. Колчану Q сопоставим колчан $\tilde{Q}$, в котором $\tilde{Q}_0 = Q_0$ и $\tilde{Q}_1 = \{a_1, \dots, a_s\} \cup \{b_1, \dots, b_s\}$, причем $hb_i = ta_i$, $tb_i = ha_i$. Представлением колчана $\tilde{Q}$, ассоциированным с представлением (W, φ) колчана Q , назовем представление с теми же пространствами W_v и отображениями φ_{a_i} и $\varphi_{b_i} = \hat{\varphi}_{a_i}$. Маршрутом в колчане Q назовем ориентированный цикл в колчане Q . К примеру, любой цикл в Q – это маршрут. Назовем маршрут *простым*, если в отвечающем ему ориентированном цикле ни одно ребро не повторяется дважды. След маршрута – это след композиции линейных отображений, идущих по стрелкам соответствующего цикла в колчане $\tilde{Q}$ в ассоциированном представлении.*

ТЕОРЕМА 2. *Для произвольного колчана Q и вектора размерности $\alpha = (2, 2, \dots, 2)$ алгебра полуинвариантов $\mathbb{k}[\text{Rep}(Q, \alpha)]^{SL(\alpha)}$ порождена следами простых маршрутов.*

ПРИМЕР 1. Рассмотрим колчан Q вида

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2.$$

Будем обозначать определитель матрицы X через $|X|$. По теореме 2 алгебра полуинвариантов 2-представлений колчана Q порождена функциями $\text{tr } \varphi_a \hat{\varphi}_a = 2|\varphi_a|$, $\text{tr } \varphi_b \hat{\varphi}_b = 2|\varphi_b|$ и $\text{tr } \varphi_a \hat{\varphi}_b$ (по лемме 1 имеем $\text{tr } \varphi_b \hat{\varphi}_a = \text{tr } \widehat{\varphi_a \hat{\varphi}_b} = \text{tr } \varphi_a \hat{\varphi}_b$). Таким образом, если

$$\varphi_a = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad \varphi_b = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} & \mathbb{k}[\text{Rep}(Q, (2, 2))]^{SL(2) \times SL(2)} \\ &= \mathbb{k}[2x_{11}x_{22} - 2x_{12}x_{21}, 2y_{11}y_{22} - 2y_{12}y_{21}, x_{11}y_{22} - x_{12}y_{21} - x_{21}y_{12} + x_{22}y_{11}]. \end{aligned}$$

Наши рассуждения используют описание, предложенное Домокосом и Зубковым [3] для порождающих алгебры $\mathbb{k}[\text{Rep}(Q), \alpha]^{\text{SL}(\alpha)}$ как линейного пространства; мы кратко напоминаем их в разделе 2. В разделах 3 и 4 выводится формула, выражающая определитель 2-блочной матрицы через следы ассоциированных с ней маршрутов. Раздел 5 посвящен доказательству теоремы 2.

Полученные сведения о порождающих алгебры полуинвариантов автор надеется использовать для обобщения конструкции Кинга [5] в духе работы [6].

Препринт этой работы, появившийся в 2009 г., стимулировал дальнейшие исследования в этой области. Так, в 2010 г. Лопатиным [7] было получено аналогичное описание минимальной системы порождающих алгебры полуинвариантов колчана для векторов размерности, состоящих из единиц и двоек, над произвольным бесконечным полем.

2. Теорема Домокоса–Зубкова. Мы воспользуемся результатами работы [3]. Пусть $Q_0 = \{1, \dots, n\}$. Зафиксируем вектор размерности α и два таких набора $\bar{i} = (i_1, \dots, i_k)$ и $\bar{j} = (j_1, \dots, j_l)$ чисел от 1 до n (возможно, повторяющихся), что $(\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k}) = (\alpha_{j_1} + \dots + \alpha_{j_l})$ и рассмотрим всевозможные матрицы размера $(\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k}) \times (\alpha_{j_1} + \dots + \alpha_{j_l})$ вида

$$A_{\bar{i}\bar{j}} := \begin{matrix} & i_1 & \dots & i_s & \dots & i_k \\ \begin{matrix} j_1 \\ \vdots \\ j_r \\ \vdots \\ j_l \end{matrix} & \begin{pmatrix} y_{11}F_{11} & \dots & y_{1s}F_{1s} & \dots & y_{1k}F_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{r1}F_{r1} & \dots & y_{rs}F_{rs} & \dots & y_{rk}F_{rk} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{l1}F_{l1} & \dots & y_{ls}F_{ls} & \dots & y_{lk}F_{lk} \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (1)$$

где y_{rs} – формальные переменные, а в качестве матрицы F_{rs} можно подставлять либо 0, либо матрицу какого-либо отображения, идущего из вершины i_s в вершину j_r , либо единичную матрицу, если $i_s = j_r$. Для конкретного представления (W, φ) матрица вида (1) задает отображение из $W_{i_1} \oplus \dots \oplus W_{i_k}$ в $W_{j_1} \oplus \dots \oplus W_{j_l}$; кроме того, ее определитель будет многочленом относительно переменных y_{rs} с $\text{SL}(\alpha)$ -инвариантными коэффициентами: $|A_{\bar{i}\bar{j}}| = \sum_{\bar{\mu}} y^{\bar{\mu}} h_{\bar{\mu}}(x_{pq}^{rs})$, где $\bar{\mu} = (\mu_{ij})_{i,j=1}^{k,l}$ – мультистепени, а x_{pq}^{rs} – матричные элементы матриц F_{rs} .

ТЕОРЕМА 3 [3; теорема 4.1]. *Алгебра $\mathbb{k}[\text{Rep}(Q, \alpha)]^{\text{SL}(\alpha)}$ как линейное пространство порождена полуинвариантами вида $h_{\bar{\mu}}(x_{pq}^{rs})$.*

Итак, все базисные полуинварианты колчана Q получаются как коэффициенты при мономах от переменных y_{rs} в определителях блочных матриц вида (3). Далее мы укажем явный вид этих коэффициентов для $\alpha = (2, 2, \dots, 2)$.

3. Блочные матрицы и ассоциированные маршруты. Для матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

ее присоединенная матрица $\hat{X}$ равна

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix}.$$

В частности, мы сразу видим, что $\widehat{\widehat{X}} = X$.

ЛЕММА 1. Пусть $X, Y, Z \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k})$. Тогда

- (a) $\widehat{XY} = \widehat{Y}\widehat{X}$;
- (б) $\text{tr } X\widehat{Y} = \text{tr } \widehat{X}Y = \text{tr } X \text{tr } Y - \text{tr } XY$;
- (в) $\text{tr } X^2Y = \text{tr } X \text{tr } XY - |X| \text{tr } Y$;
- (г) $\text{tr } XYXZ = \text{tr } XY \text{tr } XZ - |X| \text{tr } Y\widehat{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что полиномиальное тождество, верное на открытом по Зарисскому подмножестве, верно всюду, поэтому в процессе доказательства можно считать все матрицы обратимыми. В этом предположении, как известно, выполнено соотношение $X^{-1} = |X|^{-1} \cdot \widehat{X}$. Отсюда получаем

$$\widehat{XY} = |XY| \cdot (XY)^{-1} = |XY| \cdot Y^{-1}X^{-1} = \widehat{Y}\widehat{X},$$

т.е. пункт (а) доказан. Далее, по теореме Гамильтона–Кэли для матриц порядка два имеем

$$X^2 - (\text{tr } X)X + |X|E = 0. \quad (2)$$

Умножая это равенство на оператор X^{-1} и рассмотрев след полученного произведения, мы приходим к соотношению $|X| \text{tr } X^{-1} = \text{tr } X$, т.е. $\text{tr } \widehat{X} = \text{tr } X$. Следовательно, $\text{tr } \widehat{X}\widehat{Y} = \text{tr } \widehat{XY} = \text{tr } \widehat{Y}X = \text{tr } X\widehat{Y}$. С другой стороны, умножая (2) на $X^{-1}Y$ и взяв след, мы получаем равенство

$$\text{tr } XY - \text{tr } X \text{tr } Y + |X| \text{tr } X^{-1}Y = 0,$$

что, очевидно, дает нам пункт (б) леммы. Теперь, умножая (2) на Y и снова рассматривая след, получаем пункт (в). При условии обратимости матрицы Y из него также следует

$$\begin{aligned} \text{tr } XYXZ &= \text{tr } ((XY)^2Y^{-1}Z) = \text{tr } XY \text{tr } (XY \cdot Y^{-1}Z) - |XY| \text{tr } Y^{-1}Z \\ &= \text{tr } XY \text{tr } (XZ) - |X| \text{tr } Y\widehat{Z}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Пусть дана блочная матрица $Z \in \text{Mat}_{2k \times 2k}(\mathbb{k})$, составленная из блоков X_{ij} размера 2×2 . Сопоставим ей колчан Γ , в котором $\Gamma_0 = \{1, \dots, k\} \cup \{-1, \dots, -k\}$, $\Gamma_1 = \{a_{ij} \mid i, j = 1, \dots, k\}$, $ha_{ij} = i$ и $ta_{ij} = -j$. По маршруту в колчане Γ определим последовательность матриц: если стрелка идет из $-j$ в i , то берем X_{ij} , а если из k в $-l$, то $\widehat{X}_{kl}$. Последовательности, полученные таким образом, мы будем называть *маршрутами в матрице* Z . Маршрутом, *присоединенным* к данному маршруту $P = (X_1, \dots, X_N)$ назовем $\widehat{P} = (\widehat{X}_N, \dots, \widehat{X}_1)$. Заметим, что циклическая перестановка сомножителей, как и взятие присоединенного маршрута, не изменяет следа произведения матриц маршрута. Будем называть маршруты, получающиеся друг из друга такими преобразованиями, *эквивалентными*. Мы покажем, что определитель матрицы Z является многочленом от следов ее маршрутов. Для этого нам нужно будет ввести следующую конструкцию.

КОНСТРУКЦИЯ. Определитель матрицы Z равен

$$|Z| = \sum_{\sigma \in S_{2k}} (-1)^\sigma z_{1\sigma(1)} \cdot z_{2\sigma(2)} \cdots z_{2k\sigma(2k)}.$$

Всякому слагаемому $z_\sigma := z_{1\sigma(1)} \cdot z_{2\sigma(2)} \cdots z_{2k\sigma(2k)}$ мы сопоставим *ассоциированный набор маршрутов* $\mathcal{P}_\sigma$ по следующему индуктивному правилу. Пусть $z_{1\sigma(1)}$ лежит в блоке X_{1s_1} .

1а) если $z_{2\sigma(2)}$ лежит в том же блоке, что и $z_{1\sigma(1)}$, то добавляем к $\mathcal{P}_\sigma$ маршрут $(\hat{X}_{1s_1}, X_{1s_1})$ и переходим к рассмотрению подматрицы $Z_{\sigma(1)\sigma(2)}^{12}$, дополнительной к блоку X_{1s_1} ;

1б) пусть $z_{2\sigma(2)}$ лежит в каком-то другом блоке X_{1s_2} . В этом случае мы рассматриваем сомножитель $z_{t_3\sigma(t_3)}$, попадающий в тот же блочный столбец, что и $z_{2\sigma(2)}$, т.е. в некоторый блок $X_{r_3s_2}$;

2) далее, рассматриваем сомножитель $z_{t_4\sigma(t_4)}$, лежащий в той же блочной строке, что и предыдущий – т.е. в некотором блоке $X_{r_3s_4}$;

3) пока возможно продолжаем этот процесс, чередуя сдвиги по горизонтали и по вертикали;

4) наступает момент, когда не удастся совершить очередной N -й сдвиг. Если мы должны были бы двигаться по вертикали (соответственно, по горизонтали) – это значит, что мы во второй раз попали в какой-то p -й блочный столбец (соответственно, в p -ю блочную строку). Однако в каждом блочном столбце (кроме s_1 -го) и в каждой блочной строке мы выбирали сразу два блока подряд (в частности, два подряд сомножителя z_σ), поэтому невозможно попасть туда снова. Значит, перед обрывом цепочки мы оказались в s_1 -м столбце. Отсюда, во-первых, N чётно (так как последний выполненный сдвиг был по горизонтали), а, во-вторых, последний рассмотренный нами блок имеет вид $X_{r_Ns_1}$;

5) рассмотрим маршрут $P = (\hat{X}_{1s_1}, X_{1s_2}, \hat{X}_{r_3s_2}, X_{r_3s_4}, \dots, X_{r_Ns_1})$ (все нечетные сомножители берутся присоединенными). Его мы добавляем к $\mathcal{P}_\sigma$ и переходим к рассмотрению подматрицы $Z_{\bar{P}}$ размера $(k - N) \times (k - N)$, содержащей все не использованные ранее сомножители в z_σ .

Стоит отметить, что построение неоднозначно: можно варьировать начальный элемент и направление обхода. Это соответствует циклическим перестановкам маршрутов набора и/или взятию присоединенного маршрута, т.е. не выводит из их классов эквивалентностей.

ПРИМЕР 2. Проиллюстрируем нашу конструкцию на примере блочной матрицы $Z = (X_{rs})_{r,s=1}^3$ и подстановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$:

Слагаемое z_σ равно $z_{13}z_{24}z_{31}z_{45}z_{52}z_{66}$. Начиная с z_{13} , следующим берем сомножитель z_{24} . Поскольку оба они лежат в одном блоке X_{12} , добавляем к $\mathcal{P}_\sigma$ маршрут $(\hat{X}_{12}, X_{12})$ и переходим к подматрице $Z_{34}^{12} = \begin{pmatrix} X_{21} & X_{23} \\ X_{31} & X_{33} \end{pmatrix}$. Здесь мы начинаем с z_{31} , затем берем z_{45} . Этот элемент лежит во втором блочном столбце матрицы Z_{34}^{12} ; мы должны взять другой сомножитель, лежащий в этом столбце – т.е. z_{66} , а затем – второй сомножитель, попадающий в ту же блочную строку, что и z_{66} – им будет z_{52} . Таким образом, в $\mathcal{P}_\sigma$ добавляется маршрут $(\hat{X}_{21}, X_{23}, \hat{X}_{33}, X_{31})$. Окончательно, $\mathcal{P}_\sigma = \{(\hat{X}_{12}, X_{12}), (\hat{X}_{21}, X_{23}, \hat{X}_{33}, X_{31})\}$.

Отметим, что различным подстановкам могут соответствовать одинаковые ассоциированные наборы маршрутов. Так, для $k = 1$ имеются две подстановки и только один маршрут. Назовем два набора маршрутов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{S}$ *эквивалентными*, если маршруты, их составляющие, попарно эквивалентны. Обозначим через $\mathcal{P}_k$ некоторую совокупность представителей классов эквивалентности наборов маршрутов, полученных при помощи нашей конструкции из матриц вида (1).

4. Выражение для определителя 2-блочной матрицы. Определим *функцию длины* $l(P)$, которая маршруту P сопоставляет количество его элементов, а также *индекс*

$$\nu(P) = \begin{cases} 1, & \text{если } P \text{ имеет вид } (\hat{X}_{ij}, X_{ij}) \text{ или } (X_{ij}, \hat{X}_{ij}), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для 2-блочной матрицы $Z = (X_{rs})_{r,s=1}^k \in \text{Mat}_{2k \times 2k}(\mathbb{k})$ имеет место равенство

$$|Z| = \sum_{P \in \mathcal{P}_k} \prod_{P \in \mathcal{P}} (-1)^{l(P)/2-1} 2^{-\nu(P)} \text{tr } P. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обеих частях (3) стоят многочлены от матричных элементов X_{ij} . Мы докажем, что коэффициенты при соответствующих одночленах в правой и левой частях совпадают.

ЛЕММА 2. Произведение $\prod_{P \in \mathcal{P}} 2^{-\nu(P)} \text{tr } P$ равно сумме одночленов $\pm z_\sigma$, где подстановки σ таковы, что каждый из $z_{p,\sigma(p)}$ попадает в один из элементов какого-то маршрута $P \in \mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем лемму для случая $\mathcal{P} = \{P\}$, $\nu(P) = 0$.

Заметим, что перестановка блочных строк или столбцов не изменит как $|Z|$, так и правую часть (3). Поэтому можно считать, что P имеет вид $(\hat{X}_{11}, X_{12}, \hat{X}_{22}, X_{23}, \dots, \hat{X}_{kk}, X_{k1})$.

Многочлен $\text{tr } P$ равен сумме одночленов от матричных элементов блоков X_{ij} вида

$$(\hat{X}_{11})_{p_1 p_2} (X_{12})_{p_2 p_3} (\hat{X}_{22})_{p_3 p_4} (X_{23})_{p_4 p_5} \cdots (\hat{X}_{k,k})_{p_{2k-1} p_{2k}} (X_{k,1})_{p_{2k} p_1}. \quad (5)$$

Это произведение равно некоторому z_σ в том и только том случае, если среди его сомножителей никакие два не лежат в одном столбце или в одной строке. В то же время, по построению маршрута P в одном блочном столбце лежат только пары вида $(X_{q,q+1})_{p_{2q} p_{2q+1}}$ и $(\hat{X}_{q+1,q+1})_{p_{2q+1} p_{2q+2}} = (X_{q+1,q+1})_{\bar{p}, \bar{q}}$ соответственно; в один

обычный столбец они попадут, только если $\tilde{q} = 2q + 1$. Но для матриц $X, Y \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k})$ имеем

$$X\hat{Y} = \begin{pmatrix} x_{11}y_{22} - x_{12}y_{21} & -x_{11}y_{12} + x_{12}y_{11} \\ x_{21}y_{22} - x_{22}y_{21} & -x_{21}y_{12} + x_{22}y_{11} \end{pmatrix},$$

и $b \neq d$ во всех возникших здесь произведениях $x_{ab}y_{cd}$. Аналогично доказывается, что никакие два сомножителя из (5) не попадают в одну и ту же строку.

Если же $\nu(P) = 1$, т.е. $P = (\hat{X}_{rs}, X_{rs})$, имеем $\text{tr } P = 2|X_{rs}|$, чем и объясняется наличие в (3) множителей $2^{-\nu(P)}$.

В случае, если маршрутов в $\mathcal{P}$ более одного, всякий набор $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_m\}$ определяет набор таких блочных подматриц $Z_{P_1}, \dots, Z_{P_m}$, что каждый P_i лежит в Z_{P_i} , и любой блочный столбец и любая блочная строка Z содержат элементы только одной из матриц Z_{P_i} . Перестановками блочных строк и столбцов можно добиться того, чтобы все Z_{P_i} оказались на диагонали. Теперь уже очевидно, что $\prod_{P \in \mathcal{P}} 2^{-\nu(P)} \text{tr } P$ есть сумма произведений вида $z_{\sigma_1} \dots z_{\sigma_m}$, где z_{σ_q} — слагаемые $|Z_{P_q}|$ и σ_j отвечает P_j . Лемма 2 доказана.

Итак, правая часть (3) есть линейная комбинация одночленов z_σ .

ЛЕММА 3. *Всякий одночлен z_σ входит в $\prod_{P \in \mathcal{P}_\sigma} 2^{-\nu(P)} \text{tr } P$ с коэффициентом, равным 1 или -1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{P}_\sigma = \{P\}$, где $P = (\hat{X}_{r_1 s_1}, X_{r_1 s_2}, \hat{X}_{r_3 s_2}, \dots, X_{r_{2k} s_1})$. Через $z_{\sigma, q}$ обозначим сомножитель z_σ , содержащийся в q -м блоке маршрута. Зафиксировав строку, в которой лежит $z_{\sigma, 1}$, мы также автоматически определяем, в какую строку попадет $z_{\sigma, 2}$: это будет вторая строка из пары $(2r_1 - 1, 2r_1)$. Аналогично, выбор столбца, содержащего $z_{\sigma, 2}$, однозначно задает, в каком столбце лежит $z_{\sigma, 3}$. И так далее, вплоть до $z_{\sigma, 2k}$: зная столбец, в который попадает этот элемент, мы получаем, в каком столбце лежит $z_{\sigma, 1}$. Следовательно, все такие подстановки τ , что $\mathcal{P}_\tau = \mathcal{P}_\sigma$, параметризуются наборами $\xi(\tau) = (\xi_1, \dots, \xi_k) \in (\mathbb{Z}_2)^{2k}$. При этом, если поменять местами $(2r_1 - 1)$ -ю и $2r_1$ -ю строки матрицы Z , то ξ_1 превратится в $1 - \xi_1$, а остальные элементы набора останутся прежними. Значит, всякие z_σ и z_τ с одинаковыми ассоциированными наборами можно перевести друг в друга такими перестановками соседних строк и столбцов, полностью сохраняющими блочную структуру, и последующим переименовыванием переменных. Осталось понять, как изменится при этом $\text{tr } P$. Ясно, что достаточно рассмотреть случаи однократной перестановки двух строк или столбцов.

Если мы меняем местами $(2s_q - 1)$ -й и $2s_q$ -й столбцы, то это отразится только на одном участке маршрута: $(X_{r_q - 2s_q}, \hat{X}_{r_q s_q})$. Однако для матриц $X, Y \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k})$ имеем

$$X\hat{Y} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}y_{22} - x_{12}y_{21} & -x_{11}y_{12} + x_{12}y_{11} \\ x_{21}y_{22} - x_{22}y_{21} & -x_{21}y_{12} + x_{22}y_{11} \end{pmatrix},$$

а после перестановки получаем

$$\begin{pmatrix} x_{12} & x_{11} \\ x_{22} & x_{21} \end{pmatrix} \widehat{\begin{pmatrix} y_{12} & y_{11} \\ y_{22} & y_{21} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x_{12}y_{21} - x_{11}y_{22} & -x_{12}y_{11} + x_{11}y_{12} \\ x_{22}y_{21} - x_{21}y_{22} & -x_{22}y_{11} + x_{21}y_{12} \end{pmatrix}.$$

Тем самым, оба произведения содержат одни и те же члены, но с разными знаками, т.е. перестановка умножает $\text{tr } P$ на (-1) . Для преобразований строк доказательство аналогично. Таким образом, все z_τ , для которых $\mathcal{P}_\tau = \{P\}$, входят в $\text{tr } P$ с коэффициентом, равным 1 или -1 . Лемма 3 доказана.

Ясно, что одно и то же z_σ не может входить в $\prod_{S \in \mathcal{S}} 2^{-\nu(S)} \text{tr } S$ и $\prod_{P \in \mathcal{P}} 2^{-\nu(P)} \text{tr } P$ для двух различных наборов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{S}$ из $\mathcal{P}_{2k}$. Значит, любое z_σ встречается в обеих частях (3), притом с коэффициентом ± 1 . Осталось доказать, эти знаки будут одинаковы.

Как прежде, можно считать, что $\mathcal{P}_\sigma = P$, где $P = \hat{X}_{11} X_{12} \hat{X}_{22} \cdots X_{l(P),1}$. Мы знаем, что если $\mathcal{P}_\tau = \mathcal{P}_\sigma$, то z_σ и z_τ переводятся друг в друга такими перестановками строк и столбцов матрицы Z , которые обе части (3) умножают на одно и то же число, равное ± 1 . Поэтому достаточно определить коэффициент при некотором z_{σ_0} . Рассмотрим цикл $\sigma_0 = (1, 2, 3, \dots, 2l(P) - 1, 2l(P))$. В левой части коэффициент при z_{σ_0} равен $(-1)^{\text{sgn}(\sigma_0)} = -1$. Что касается правой части, умножим слагаемое

$$\begin{aligned} & \pm z_{12} z_{23} \cdots z_{2l(P)-1, 2l(P)} z_{2l(P), 1} \\ & = (\hat{X}_{11})_{21} (X_{12})_{21} (\hat{X}_{22})_{21} (X_{23})_{21} \cdots (\hat{X}_{l(P), l(P)})_{21} (X_{l(P), 1})_{21} \end{aligned}$$

на коэффициент $(-1)^{l(P)/2-1}$. Имеем $(X_{q,q+1})_{21} = z_{2q, 2q+1}$ и $(\hat{X}_{qq})_{21} = -z_{2q-1, 2q}$, поэтому коэффициент при z_{σ_0} равен $(-1)^{l(P)/2-1} (-1)^{l(P)/2} = -1$. Это завершает доказательство утверждения 1.

5. Доказательство теоремы 2. Образующими алгебры $\mathbb{k}[\text{Rep}(Q, \alpha)]^{\text{SL}(\alpha)}$ по теореме 3 являются коэффициенты при одночленах от y_{rs} в определителях всевозможных матриц вида (1). Мы покажем, что произведения следов, построенных по этим матрицам маршрутов, и будут теми самыми коэффициентами.

Легко видеть, что в определителе матрицы $(y_{rs} X_{rs})_{r,s=1}^k$ при $y_{r_1 s_1} \cdots y_{r_k s_k}$ стоит альтернированная сумма всех таких z_σ , что найдется $\tau \in S_{2k}$, для которой каждый элемент $z_{p \sigma(p)}$ лежит в блоке $X_{r_{\tau(p)} s_{\tau(p)}}$. При этом в любой блочной строке и в любом блочном столбце находится ровно два блока $X_{r_p s_p}$ и, следовательно, эти блоки являются в точности элементами маршрутов некоторого набора $\mathcal{P}$. Из доказательства утверждения 1 следует, что коэффициент при $y_{r_1 s_1} \cdots y_{r_k s_k}$ равен

$$\prod_{P \in \mathcal{P}} (-1)^{l(P)/2-1} 2^{-\nu(P)} \text{tr } P.$$

Покажем, что следы маршрутов являются полуинвариантами. Если $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_N$ – все присоединенные матрицы, входящие в маршрут P (с учетом кратности), то

$$\text{tr } P = \text{tr } \hat{X}_1 P_1 \cdots \hat{X}_N P_N = |X_1| \cdots |X_N| \text{tr } X_1^{-1} P_1 \cdots X_N^{-1} P_N,$$

где P_i – произведения оставшихся элементов маршрута. Так как $\text{tr } X_1^{-1} P_1 \cdots X_N^{-1} P_N$ является рациональным инвариантом, вес $\text{tr } P$ совпадает с весом $|X_1| \cdots |X_N|$.

Если в маршруте P какой-то элемент X встретился дважды, то по лемме 1

$$\text{tr } P = \text{tr } X P_1 X P_2 = \text{tr } X P_1 \text{tr } X P_2 - \frac{1}{2} \text{tr } \hat{X} X \text{tr } P_1 \hat{P}_2.$$

и вектор размерности $(3, 3, 3, 3)$. Коэффициент F при $\prod_{i,j} y_{ij}$ определителя блочной матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} y_{11}\varphi_a & y_{12}E & y_{13}\varphi_{b_2} \\ y_{21}\varphi_u & y_{22}\varphi_{b_1} & y_{23}E \\ y_{31}\varphi_d & y_{32}\varphi_v & y_{33}\varphi_c \end{pmatrix}$$

не является инвариантом, и если рассмотреть его как многочлен от матричных элементов какой-либо из матриц φ (например, φ_a), то его степень равна 1. С другой стороны, след маршрута не будет инвариантом в том и только том случае, когда маршрут содержит хотя бы одну присоединенную матрицу. Суммарная степень следа как многочлена от элементов этой матрицы будет не ниже двух. Таким образом, подалгебра, порожденная следами маршрутов, не содержит функции F .

Автор благодарен И. В. Аржанцеву за постановку задачи и ценные обсуждения. Кроме того, автор благодарен рецензенту, сделавшему ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Le Bruyn, C. Procesi, “Semisimple representations of quivers”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **317**:2 (1990), 585–598.
- [2] H. Derksen, J. Weyman, “Semi-invariants of quivers and saturation for Littlewood–Richardson coefficients”, *J. Amer. Math. Soc.*, **13**:3 (2000), 467–479.
- [3] M. Domokos, A. N. Zubkov, “Semi-invariants of quivers as determinants”, *Transform. Groups*, **6**:1 (2001), 9–24.
- [4] A. Schofield, M. van den Bergh, “Semi-invariants of quivers for arbitrary dimension vectors”, *Indag. Math. (N.S.)*, **12**:1 (2001), 125–138.
- [5] A. D. King, “Moduli of representations of finite-dimensional algebras”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **45**:180 (1994), 515–530.
- [6] I. V. Arzhantsev, J. Hausen, “Geometric invariant theory via Cox rings”, *J. Pure Appl. Algebra*, **213**:1 (2009), 154–172.
- [7] A. A. Lopatin, “Minimal generating set for semi-invariants of quivers of dimension two”, *Linear Algebra Appl.*, **434**:8 (2011), 1920–1944.

С. Н. Федотов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: glwrath@yandex.ru

Поступило

17.11.2009

Исправленный вариант

21.11.2011