Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Борисенко, О локально выпуклых гиперповерхностях в многообразиях Адамара, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 498–507

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm864>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:53:41

УДК 514.772

О ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ В МНОГООБРАЗИЯХ АДАМАРА

А. А. Борисенко

Рассматриваются локально выпуклые компактные погруженные гиперповерхности в полем односвязном римановом пространстве неположительной секционной кривизны. Доказывается, что они есть выпуклые гиперповерхности, гомеоморфные сфере. Доказывается аналогичный результат для погруженных гиперповерхностей с неположительно определенной второй квадратичной формой, ранг которой не меньше единицы.

Библиография: 12 названий.

Ж. Адамар доказал следующую теорему. Пусть φ – погружение компактного ориентированного n -мерного многообразия в евклидово пространство E^{n+1} ($n \geq 2$) со всюду положительной гауссовой кривизной. Тогда $F(M)$ есть выпуклая гиперповерхность [1].

Чжень и Лашоф [2] обобщили эту теорему. Пусть φ – погружение компактного ориентированного n -мерного многообразия M в E^{n+1} . Тогда следующие два утверждения эквивалентны:

- 1) степень сферического отображения равна ± 1 , и гауссова кривизна не меняет знака (т.е. всюду ≥ 0 или ≤ 0);
- 2) $\varphi(M)$ есть выпуклая гиперповерхность.

Под гауссовой кривизной мы понимаем здесь произведение главных кривизн.

Топологическое погружение $f: N^n \rightarrow M$ многообразия N^n в риманово многообразие M называется *локально выпуклым* в точке $x \in N^n$, если у x есть окрестность U такая, что $f(U)$ является частью границы выпуклого множества в M .

Хейенорт доказал следующую теорему. Пусть $f: N^n \rightarrow E^{n+1}$, $n \geq 2$, – топологическое погружение связного многообразия N^n . Если f локально выпукло во всех точках и имеет хотя бы одну точку локальной строгой опорности, а N^n полно в индуцированной этим погружением метрике, то f есть вложение, а $F = f(N^n)$ – граница выпуклого тела [3].

В пространстве Лобачевского для h -локально выпуклых (т.е. таких, что в каждой точке гиперповерхности есть окрестность, которая лежит по одну сторону орисферы) регулярных гиперповерхностей эта теорема обобщалась в [4], для нерегулярных гиперповерхностей – в [5].

Наша цель обобщить эту теорему для компактного случая, когда объемлющим пространством является полное односвязное риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Такое многообразие мы будем называть *многообразием Адамара*.

Пусть M есть полное риманово многообразие. Ниже используем следующие определения [6].

1. Множество $A \subset M$ называется *абсолютно выпуклым*, если каждая геодезическая с концами в A целиком содержится в A .

2. $A \subset M$ называется *выпуклым*, если каждая кратчайшая с концами в A содержится в A .

3. $A \subset M$ называется *локально выпуклым*, если каждая точка $P \in A$ имеет в M окрестность U_P , для которой множество $U_P \cap A$ выпукло.

4. Множество $A \subset M$, $A \neq M$, называется *строго гранично выпуклым*, если у A в каждой граничной точке есть “внешняя вогнутая опора” и, кроме того, A – локально выпукло.

Топологическое погружение $f: N^n \rightarrow M$ многообразия N^n в риманово многообразие M называется *локально выпуклым* в точке $x \in N^n$, если у x есть окрестность U такая, что $f(U)$ является частью границы выпуклого множества в M .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f: N^n \rightarrow M^{n+1}$, $n \geq 2$, есть погружение компактного связного многообразия N^n в полное односвязное риманово многообразие неположительной секционной кривизны M^{n+1} . Если погружение f локально выпукло, то f есть вложение, а $f(N^n) = F$ есть граница выпуклого множества в M^{n+1} и $f(N^n) = F$ гомеоморфно сфере S^n .

ЛЕММА 1 [6]. В многообразии Адамара у непустого выпуклого множества B , отличного от M , внешние эквидистантные множества $B_\rho := \{x \in M \mid d(x, B) \leq \rho\}$ выпуклы, здесь $d(x, B)$ – расстояние точки от множества B .

Граница эквидистантного множества называется *внешней эквидистантной поверхностью* или просто *внешней эквидистантой*.

ЛЕММА 2 [7]. Достаточно близкие к B внешние эквидистанты являются $C^{1,1}$ -гладкими поверхностями.

ЛЕММА 3 [6]. В многообразии Адамара шары любого радиуса абсолютно выпуклы, а ограничивающие их сферы являются выпуклыми гиперповерхностями, диффеоморфными стандартной сфере. Главные кривизны сферы радиуса r удовлетворяют неравенству $K \geq 1/r$.

ЛЕММА 4 [8]. Для любых геодезических $\gamma_1(t), \gamma_2(t): [0, 1] \rightarrow M$ в пространстве Адамара функция $f(t) = |\gamma_1(t), \gamma_2(t)|$ выпукла.

ЛЕММА 5 [6]. Пусть Ω открытое, но не обязательно связное множество в M , ограниченное в M гладкой связной гиперповерхностью F , все главные кривизны которой по отношению к направленным в Ω нормальям положительны. Тогда множества Ω и $\bar{\Omega}$ являются строго гранично выпуклыми.

ЛЕММА 6 [9]. Пусть F – гиперповерхность риманова многообразия M , $\tilde{F}$ – гиперповерхность риманова многообразия $\tilde{M}$. Пусть $\gamma: [0, a] \rightarrow M$, $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$ – геодезические, перпендикулярные F и $\tilde{F}$ соответственно, с начальными точками $P \in F$, $\tilde{P} \in \tilde{F}$ и параметризованные длиной дуги.

Пусть выполняются следующие условия:

- 1) для каждого $t \in [0, a]$ и любых двумерных направлений $\sigma \in T_{\gamma(t)}M$, $\tilde{\sigma} \in T_{\tilde{\gamma}(t)}\tilde{M}$, содержащих векторы $\gamma'(t) \in \sigma$, $\tilde{\gamma}'(t) \in \tilde{\sigma}$, выполняется неравенство $K_\sigma \leq K_{\tilde{\sigma}}$, где K_σ , $K_{\tilde{\sigma}}$ – секционные кривизны в направлении площадок σ , $\tilde{\sigma}$;
- 2) наибольшая главная кривизна гиперповерхности F не превосходит наименьшей главной кривизны $\tilde{F}$ соответственно в точках $P = \gamma(0)$, $\tilde{P} = \tilde{\gamma}(0)$, т.е. $k_{\max} \leq k_{\min}$;
- 3) на $\tilde{\gamma}$ нет фокальных точек для $\tilde{P} = \tilde{\gamma}(0)$.

Тогда на γ нет фокальных точек для $P = \gamma(0)$.

ЛЕММА 7. Пусть F есть гиперповерхность с неположительно определенной второй квадратичной формой в многообразии Адамара относительно единичного нормального векторного поля ξ . Тогда параллельная гиперповерхность F_ρ со сдвигом в направлении нормального векторного поля ξ также имеет неположительно вторую квадратичную форму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Соответствующие нормальные кривизны параллельных гиперповерхностей удовлетворяют уравнению [10]

$$k^1 = k^2 + f(t),$$

где $f(t) \leq 0$ в силу неположительности секционной кривизны объемлющего пространства, $k(0) \leq 0$ в силу неположительной определенности второй квадратичной формы.

Если положить $k = -u'/u$, то u удовлетворяет уравнению

$$u'' + f(t)u = 0$$

при начальных условиях $u(0) = 1$, $u'(0) = -k(0) \geq 0$. Отсюда следует, что u – выпуклая функция, $u'(t) \geq 0$, $u > 0$ и нормальные кривизны $k(t) \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $F = f(N)$ – локально выпуклое погружение n -мерного компактного многообразия N в $(n + 1)$ -мерное полное односвязное риманово многообразие M неположительной секционной кривизны. Несмотря на то, что мы имеем только погружение, а не вложение, мы можем определить внешнюю эквидистанту $f(N) = F$. Обозначим ее F_ρ . По лемме 1 F_ρ является локально выпуклой гиперповерхностью, и по лемме 2 она имеет гладкость класса $C^{1,1}$. Пусть S – сфера в M достаточно большого радиуса такого, что шар, который ограничивает эта сфера, содержит $f(N)$ и F_ρ при достаточно малом ρ .

В каждой точке F_ρ есть внешняя нормаль ξ . Выпустим в этом направлении геодезический луч до пересечения со сферой S . Тем самым, мы зададим отображение

$$\nu : F_\rho \rightarrow S.$$

Покажем, что это накрытие.

Пусть P_1, Q_1 две точки F_ρ , которые лежат на одной локально выпуклой гиперповерхности, γ_1, γ_2 – геодезические лучи, выпущенные в направлении внешних нормалей из точек P_1, Q_1 ; P_2, Q_2 – точки пересечения лучей с гиперсферой S . Заметим, что величина углов $\angle Q_1 P_1 P_2$ и $\angle P_1 Q_1 Q_2$ не меньше $\pi/2$, так как в силу локальной выпуклости

F_ρ кратчайшая P_1P_2 проходит внутри внешнего эквидистантного множества (не исключая выхода на границу).

Применим лемму 4 к случаю, когда $\gamma_1 = P_1P_2$, $\gamma_2 = Q_1Q_2$, $f(t) = |P(t)Q(t)|$, где $P(t) \in \gamma_1$, $Q(t) \in \gamma_2$. В силу формулы первой вариации длины и оценок на углы $f'(0) \geq 0$. Поэтому из выпуклости f следует, что $|P_2Q_2| \geq |P_1Q_1|$. Отсюда следует, что локально различные точки переходят в различные точки. Так как F_ρ имеет регулярность класса $C^{1,1}$, то если $Q_1 \xrightarrow{\rho} P_1$, то $Q_2 \rightarrow P_2$. Поэтому отображение $\nu : F_\rho \rightarrow S$ локально является топологическим отображением и, следовательно, ν есть накрытие. Так как при $n > 1$ сфера является односвязной, то эквидистанта F_ρ гомеоморфна S и этот гомеоморфизм задается отображением ν .

Вне шара D нормальные лучи к F_ρ не могут пересекаться. Допустим противное. Пусть лучи из точек P_1, Q_1 пересекаются в точке Q , которая лежит вне шара D . Проведем через Q сферу S_Q , концентричную S , с тем же центром O . И зададим то же отображение ν . Тогда отображение ν на сферу S_Q не является гомеоморфизмом. Это противоречит выше доказанному.

Возьмем поверхность $F_{\rho+t_0}$, параллельную F_ρ , так, чтобы она лежала вне шара D . Локально она является эквидистантой F , поэтому она локально выпукла. Кроме того, $F_{\rho+t_0}$ уже является вложенной поверхностью, поверхностью без самопересечений, а также границей некоторого тела.

Аналогично доказательству теоремы Титце мы получим, что тело, ограниченное поверхностью $F_{\rho+t_0}$, выпукло, а $F_{\rho+t_0}$ является компактной выпуклой гиперповерхностью, гомеоморфной сфере. Теперь берем поверхности $F_{\rho+t_0-t}$, параллельные $F_{\rho+t_0}$ и лежащие внутри тела $D_{\rho+t_0}$, ограниченного $F_{\rho+t_0}$. При малых t поверхность $F_{\rho+t_0-t}$ является вложенной, локально выпуклой при всех $t < \rho + t_0$, а значит, глобально выпуклой. Обозначим через t_1 точную верхнюю грань таких t ($0 \leq t \leq \rho + t_0$), что поверхность $F_{\rho+t_0-t}$ является вложенной, а значит, и выпуклой поверхностью. Пусть $t_1 < \rho + t_0$. Тело $D_{\rho+t_0-t_1}$, ограниченное $F_{\rho+t_0-t_1}$, является выпуклым телом, а $F_{\rho+t_0-t_1}$ является выпуклой поверхностью. На ней должны быть точки самокасания $F_{\rho+t_0-t_1}$. Возможны два случая самокасания: внутреннее и внешнее. Первый случай невозможен, так как при внутреннем самокасании отображение ν не было бы гомеоморфизмом. Второй случай невозможен из-за выпуклости тела $D_{\rho+t_0-t_1}$. Отсюда следует, что $t_1 = \rho + t_0$ и F является границей абсолютно выпуклого тела. Взяв точку внутри тела, мы покажем, что гиперповерхность F гомеоморфна сфере.

Пусть $f : N^n \rightarrow M^{n+1}$ есть погружение класса C^2 в риманово пространство M^{n+1} . Тогда в каждой точке можно определить *гауссову кривизну* как произведение главных кривизн: $K = k_1 k_2 \cdots k_n$.

Как следствие теоремы 1 мы получим обобщение теоремы Адамара.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f : N^n \rightarrow M^{n+1}$, $n \geq 2$, – регулярное класса C^2 погружение компактного связного многообразия N^n в полное односвязное риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Если гауссова кривизна положительна, то $F = f(N^n)$ есть выпуклая гиперповерхность, гомеоморфная сфере.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – сфера, описанная вокруг гиперповерхности $f(N^n) = F$, ее радиус равен r , P – точка соприкосновения. Тогда в окрестности P поверхность F лежит внутри сферы S . Ее главные кривизны в точке P не меньше, чем главные кривизны

сферы в этой точке. По лемме 3 для сферы они оцениваются снизу через $1/r$, где r – радиус сферы. Поэтому для F в точке P главные кривизны $k_i \geq 1/r$ и они одного знака. В силу знакопостоянства гауссовой кривизны K главные кривизны нигде не обращаются в нуль. Поэтому во всех точках F главные кривизны одного знака. Тогда из леммы 5 следует, что F является локально выпуклой гиперповерхностью. Применяя теорему 1, мы получим утверждение теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f: N^n \rightarrow M^{n+1}$, $n \geq 2$, – регулярное класса C^2 погружение компактного связного многообразия N^n в полное односвязное риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Если в каждой точке вторая квадратичная форма при выборе соответствующей нормали неположительно определена и ранг второй квадратичной формы ≥ 1 , то $F = f(N^n)$ есть выпуклая гиперповерхность, диффеоморфная сфере.

ЗАМЕЧАНИЕ. Когда работа была сдана в печать, автор узнал, что теорема 3 фактически доказана С. Александер в [11], но предлагаемое доказательство основано на другой идее, которая дает подход к решению проблемы без условия на ранг второй квадратичной формы.

Нам кажется, что теорема 3 справедлива без условия на ранг второй квадратичной формы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Выберем в каждой точке гиперповерхности $F = f(N^n)$ единичную нормаль таким образом, чтобы вторая квадратичная форма погруженной гиперповерхности F относительно этой нормали была неположительно определена. В силу условия на ранг второй квадратичной формы такая нормаль определяется единственным образом. Таким образом, на F мы получили единичное поле нормалей ξ . Возьмем сферу S достаточно большого радиуса r такую, что погруженная гиперповерхность F лежит внутри шара D , ограниченного сферой S . Выпустим из точек F в направлении единичных нормалей ξ геодезические лучи $\gamma(\xi)$. Из леммы 6 следует, что на этих геодезических лучах нет фокальных точек. В качестве пространства сравнения $\widetilde{M}$ берем евклидово пространство. Поэтому отображение $\nu: (0, \infty) \times F \rightarrow M$, когда нормали $t\xi$, $t > 0$, ставится в соответствие точка $\exp t\xi$ на геодезическом луче $\gamma(\xi)$, является локальным гомеоморфизмом.

Оценим угол, который образуют лучи $\gamma(\xi)$ с внешними нормальными сферы S достаточно большого радиуса в точке пересечения. Погруженная гиперповерхность $F = f(N^n)$ содержится внутри шара, ограниченного этой сферой. Пусть расстояние точек $P \in F$ от точек сферы $\geq r_0$, радиус сферы равен r . Рассмотрим $\triangle POQ$, где O – центр сферы, $P \in F$, Q – точка пересечения луча $\gamma(\xi)$ со сферой. Этот луч выходит из точки P . Тогда $|PQ| \geq r_0$, $|OP| \leq r$, $|OQ| = r$, где r – радиус сферы, $\alpha = \angle PQO$.

Рассмотрим на евклидовой плоскости треугольник $\triangle \bar{P}\bar{O}\bar{Q}$ с теми же длинами сторон. По теореме сравнения $\angle \bar{P}\bar{Q}\bar{O} = \bar{\alpha} \geq \alpha = \angle PQO$. Оценим угол $\bar{\alpha}$. Поскольку $|\bar{P}\bar{O}|^2 = r^2 + |\bar{P}\bar{Q}|^2 - 2r|\bar{P}\bar{O}| \cos \bar{\alpha}$, то

$$\cos \bar{\alpha} = \frac{r^2 + |\bar{P}\bar{Q}|^2 - |\bar{P}\bar{O}|^2}{2r|\bar{P}\bar{Q}|} \geq \frac{r_0}{2r}.$$

Так как $\cos \alpha \geq \cos \bar{\alpha}$, то $\cos \alpha \geq r_0/(2r)$, $\alpha \leq \arccos r_0/(2r)$. Из этого неравенства и из факта отсутствия фокальных точек следует, что локально отображение $\nu: F \rightarrow S$,

когда точке $P \in F$ ставится в соответствие точка Q пересечения геодезического луча $\gamma(\xi)$ со сферой S , является гомеоморфизмом.

Отсюда вытекает, что отображение ν является накрытием. Из односвязности сферы следует, что отображение ν задает гомеоморфизм F на S . Отсюда параллельные поверхности F_ρ при достаточно большом ρ являются вложенными гиперповерхностями.

Допустим, что вложенная гиперповерхность F_ρ невыпуклая. Возьмем выпуклую оболочку такой гиперповерхности. Пусть $\overline{G}$ – связная область на выпуклой оболочке $\overline{F}_\rho$, которая не лежит на гиперповерхности F_ρ , G – соответствующая по гомеоморфизму на S невыпуклая область, имеющая с $\overline{G}$ общую границу. Через каждую внутреннюю точку области $\overline{G}$ проходит отрезок кратчайшей объемлющего пространства, который полностью принадлежит $\overline{G}$, с концами на границе области. Область G лежит внутри выпуклой оболочки. Отображение по лучам $\gamma(\xi)$, когда ставятся в соответствие точки пересечения луча с G и $\overline{G}$, задает гомеоморфизм этих областей. Возьмем внешние эквидистанты $G_{\rho+t}$ области G . Найдется такое значение t_0 , что $G_{\rho+t_0}$ лежит вне внутренности тела, ограниченного выпуклой оболочкой $\overline{F}_\rho$, но имеет общие точки с внутренностью области $\overline{G}$. Пусть это будет точка $P_0 \in \overline{G} \cap G_{\rho+t_0}$.

В точке P_0 относительно внешней нормали ξ вторая квадратичная форма неположительно определенная. Это следует из леммы 7. Отрезок кратчайшей l , который лежит на $\overline{G}$, имеет концы на границе области G_ρ . Поэтому своими концами он уходит внутрь тела, ограниченного гиперповерхностью $F_{\rho+t_0}$.

Внешняя нормаль ξ к поверхности $G_{\rho+t_0}$ в точке P_0 одновременно будет нормалью к выпуклой оболочке F_ρ , касательный вектор геодезической l будет лежать в касательной плоскости. Параллельно перенесем ξ в объемлющем пространстве и в направлении векторного поля $\xi(t)$, где t – параметр длины на l , выпустим геодезические. Мы получим двумерную поверхность F^2 , которая пересекает поверхность $G_{\rho+t_0}$ по регулярной кривой L . Это есть аналог нормального сечения. На поверхности F^2 кривая L лежит по одну сторону геодезической l в полуплоскости, куда направлена нормаль ξ , и полностью не совпадает с l . Не ограничивая общности, будем считать, что при $t > 0$ точки L лежат выше геодезической l . Возьмем на L точку P , лежащую справа от точки P_0 . Проведем отрезок кратчайшей l_1 , соединяющий эти точки. Вместе с дугой P_1P_2 кривой L этот отрезок ограничивает на F^2 односвязную область α (может быть, это будет меньший отрезок). Это аналог отрезания шапочки в евклидовом пространстве.

По теореме Гаусса–Бонне для области α выполняется соотношение

$$\int_{l_1} k_g ds = - \int K dS + \alpha_1 + \alpha_2,$$

где K – гауссова кривизна F^2 , k_g – геодезическая кривизна кривой L , $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ – углы между кривой L и геодезической l_1 . Поверхность F^2 – линейчатая. Поэтому ее гауссова кривизна не больше кривизны объемлющего пространства. Отсюда $K \leq 0$ и $\int_{l_1} k_g ds > 0$. Значит, найдется точка на кривой L , геодезическая кривизна которой на F^2 больше нуля. И такая точка найдется в сколь угодно малой окрестности точки P .

Введем в объемлющем пространстве вдоль геодезической l систему координат Ферми следующим образом: на геодезической l введем параметризацию $l(t)$ с помощью длины дуги, отсчитываемой от P_0 вдоль l . Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ есть ортонормированный репер в точке P_0 , причем вектор e_1 касается геодезической l , e_2 направлен по нормали ξ . Обозначим $e_i(t)$ векторы, полученные из векторов e_i путем параллельного переноса вдоль l

в точку $l(t)$. Пусть Q – произвольная точка объемлющего пространства M^{n+1} вблизи l . Найдем на l точку $l(t_0)$, ближайшую Q . Соединим Q и $l(t_0)$ кратчайшей. Обозначим через η^i координаты единичного вектора, касательного к кратчайшей $l(t_0)Q$ в точке $l(t_0)$ относительно репера $\{e_i(t_0)\}$. Положим $x^1 = t_0$, $x^i = \eta^i |l(t_0)Q|$, где $|l(t_0)Q|$ – длина отрезка геодезической.

Полученная таким образом система координат есть нормированная система координат Ферми. В этой системе координат вдоль l коэффициенты метрического тензора $g_{ij} = \delta_{ij}$ и символы Кристоффеля $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Поверхность F^2 в этой системе координат задается уравнением $x^3 = \dots = x^{n+1} = 0$. Вдоль геодезической l коэффициенты вторых квадратичных форм F имеют вид:

$$b_{ij}^\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3}; \quad \alpha = 3, \dots, n+1; \quad i, j = 1, 2. \quad (1)$$

Они равны нулю вдоль l .

Пусть для кривой L геодезическая кривизна $k_g > 0$ в точке P_0 . В силу вполне геодезичности F^2 вдоль l вектор главной кривизны L как кривой в объемлющем пространстве M^{n+1} совпадает с вектором главной кривизны L как кривой на F^2 , и он совпадает с нормалью ξ . Геодезическая кривизна k_g совпадает с нормальной кривизной гиперповерхности $G_{\rho+t_0}$ в точке P_0 в направлении l . Поэтому нормальная кривизна положительна в этом направлении. Но это противоречит неположительной определенности второй квадратичной формы $G_{\rho+t_0}$ относительно нормали ξ . Рассмотрим второй случай, когда $k_g = 0$ в точке P_0 . Тогда в окрестности P_0 кривая L задается в виде:

$$\begin{aligned} x^2 &= f(x^1); & f > 0, & \text{ если } x^1 > 0; \\ f(0) &= f'(0) = f''(0) = 0; & x^3 &= \dots = x^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Тогда существует последовательность точек $P_n \rightarrow P$ на L с координатой $x_n^1 \rightarrow 0$ таких, что

$$\lim_{x_n^1 \rightarrow 0} \frac{f''(x_n^1)}{f} = +\infty. \quad (2)$$

Пусть в точках $P_n \rightarrow P$ геодезическая кривизна $k_g > 0$. Вектор главной кривизны ν_1 кривой L как кривой на F^2 имеет координаты

$$\begin{cases} Y^\sigma = \frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{ij\backslash\alpha}^\sigma \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}; \\ Y^\alpha = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $i, j, \sigma = 1, 2$; $\alpha = 3, \dots, n+1$; $\Gamma_{ij\backslash\alpha}^\sigma$ – символы Кристоффеля метрики F^2 ; s – длина кривой L .

Вектор главной кривизны ν кривой L как кривой в римановом многообразии M^{n+1} имеет вид:

$$\begin{cases} Y^\sigma = \Gamma_{ij\backslash g}^\sigma \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \quad (\sigma = 1, 2); \\ Y^\alpha = \Gamma_{ij\backslash g}^\alpha \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \quad (\alpha = 3, \dots, n+1), \end{cases} \quad (4)$$

где $\Gamma_{ij\backslash g}^\sigma$, $\Gamma_{ij\backslash g}^\alpha$ – символы Кристоффеля метрики объемлющего пространства. Координаты единичного касательного вектора к L имеют вид

$$\left(\frac{dx^1}{ds}, \frac{dx^2}{ds}, 0, \dots, 0\right), \quad \left(\frac{dx^1}{ds}(0)\right) = 1, \quad \left(\frac{dx^2}{ds}(0)\right) = 0,$$

и для них выполняется соотношение

$$g\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 = 1, \quad (5)$$

где $ds^2 = g(dx^1)^2 + (dx^2)^2$ есть первая квадратичная форма поверхности F^2 .

В точках P_n кривой L геодезическая кривизна k_g на поверхности F^2 имеет порядок $k_g \approx f''(x^1)$. Это непосредственно следует из формулы для геодезической кривизны. Символы Кристоффеля имеют порядок

$$\Gamma_{ij\backslash a}^\sigma(x^1, x^2) \approx 0(f(x_1)).$$

Подставим в (5) $x^2 = f(x^1)$. Мы получим

$$\begin{aligned} g\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + (f(x^1))^2\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 &= 1; \\ \left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 &= \frac{1}{g + (f'(x_1))^2}; \quad \frac{dx^2}{ds} = f'(x_1)\frac{dx^1}{ds}. \end{aligned}$$

Продифференцируем (5) по s . Имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial x^2} f'(x^1) \frac{dx^1}{ds}\right) \left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + 2g \frac{dx^1}{ds} \frac{d^2 x^1}{ds^2} \\ + 2 \frac{dx^2}{ds} f''(x^1) \left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + 2 \frac{dx^2}{ds} f'(x^1) \frac{d^2 x^1}{ds^2} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{d^2 x^1}{ds^2} \left(2g \frac{dx^1}{ds} + 2 \frac{dx^1}{ds} (f')^2\right) + \left(\frac{dg}{dx^1} \frac{dx^1}{ds} + \frac{dg}{dx^2} f' \frac{dx^1}{ds}\right) \left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + 2f' f'' \left(\frac{dx^1}{ds}\right)^3 = 0.$$

Учитывая, что в окрестности точки P_0 $\partial g / \partial x^1 \approx f(x^1)$; $\partial g / \partial x^2 \approx f(x^1)$, мы получим, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^1}{ds^2} &\approx f + \frac{1}{2} f f' + f' f''; \\ \frac{d^2 x^2}{ds^2} &= f'' \left(\frac{dx^1}{ds}\right) + f' \frac{d^2 x^1}{ds^2} \approx f''. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (3) следует, что координаты вектора ν_1 имеют порядок

$$\begin{cases} Y^1 \approx f + f' f''; \\ Y^2 \approx f''; \\ Y^\alpha \approx 0 \end{cases} \quad (\alpha = 3, \dots, n+1).$$

Из (2) следует, что в точках P_n $\lim_{P_n \rightarrow P_0} Y^1/Y^2 = 0$, т.е. вектор главной нормали $\nu_1(P_n)$ стремится к направлению вектора нормали ξ в точке P_0 . Отсюда вытекает, что при достаточно большом n вектор $\nu_1(P_n)$ образует малый угол с внешней нормалью $\xi(P_n)$ гиперповерхности $G_{\rho+t_0}$, который стремится к нулю при $P_n \rightarrow P_0$.

Аналогично из (4) следует, что координаты вектора главной кривизны ν кривой L как кривой в объемлющем римановом пространстве имеют порядок

$$\begin{cases} Y^1 \approx f + f'f''; \\ Y^2 \approx f''; \\ Y^\alpha \approx f. \end{cases}$$

Из (2) также вытекает, что вектор ν при $P_n \rightarrow P_0$ стремится к направлению вектора нормали ξ в точке P_0 . Отсюда следует, что $\nu(P_n)$ образует малый угол, стремящийся к нулю при $P_n \rightarrow P_0$, с внешней нормалью $\xi(P_n)$ гиперповерхности $G_{\rho+t_0}$, относительно которой вторая квадратичная форма гиперповерхности неположительно определенная.

В точках P_n вектор $\nu_1(P_n)$ отличен от нуля. Вектор $\nu(P_n)$ есть ортогональная проекция вектора $\nu(P_n)$ на касательную плоскость к поверхности F^2 , поэтому он также отличен от нуля. Так как угол между $\nu(P_n)$ и единичной нормалью $\xi(P_n)$ малый, то нормальная кривизна гиперповерхности $G_{\rho+t_0}$ в направлении вектора касательной кривой L в точке P_n больше нуля при достаточно большом n . Это противоречит неположительной определенности второй квадратичной формы.

Тем самым, предположив, что F_ρ невыпуклая гиперповерхность, мы пришли к противоречию. Далее, следуя ходу доказательства теоремы 1, отступая назад, мы докажем выпуклость гиперповерхности F .

Пусть σ есть двумерная площадка, касательная к гиперповерхности F . *Внешней кривизной* в направлении площадки σ называется

$$K(\sigma) = K(\sigma)_{\setminus F} - K(\sigma)_{\setminus M},$$

где $K(\sigma)_{\setminus F}$ – секционная кривизна гиперповерхности F в направлении этой площадки, $K(\sigma)_{\setminus M}$ – секционная кривизна объемлющего пространства M .

Если для компактной погруженной гиперповерхности во всех точках и всех двумерных направлениях внешняя секционная кривизна положительна, то из формулы Гаусса следует, что вторая квадратичная форма будет знакоопределена, и из теоремы 3 следует, что гиперповерхность есть выпуклая гиперповерхность, диффеоморфная сфере.

Пусть τ есть касательный вектор к гиперповерхности F , $R(\tau)_{/F}$ – кривизна Риччи гиперповерхности F в направлении τ , $R(\tau)_{/M}$ – ограничение кривизны Риччи объемлющего пространства на касательное пространство к F , т.е.

$$\text{Ric } \tau_{/M} = \sum_{i=2}^n K(\tau, e_i)_{/M},$$

где τ, e_i ($i = 2, \dots, n$) – ортонормированный репер касательного пространства к F , $K(\tau, e_i)$ – секционные кривизны M по площадкам, натянутым на векторы τ, e_i .

Внешняя кривизна Риччи поверхности F в направлении τ определяется равенством

$$\overline{\text{Ric}}\tau = \text{Ric } \tau_{/F} - \text{Ric } \tau_{/M}.$$

Внешняя скалярная кривизна поверхности F определяется равенством:

$$\overline{R} = R_F - R_M,$$

где R_F – скалярная кривизна F , а

$$R_M = \sum_{\substack{i < j \\ i, j=1}}^n K_M(e_i, e_j),$$

где e_i – ортонормированный базис касательного пространства к F .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f: N^n \rightarrow M^{n+1}$, $n \geq 2$, – регулярное класса C^2 погружение компактного связного многообразия N^n в полное односвязное риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Если внешняя кривизна Риччи поверхности $F = f(N^n)$ в каждой точке неотрицательна, а внешняя скалярная кривизна положительна, то $F = f(N^n)$ – гиперповерхность, диффеоморфная сфере.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия на внешнюю кривизну Риччи следует, что вторая квадратичная форма в каждой точке при соответствующем выборе нормали неположительно определена [12]. Из положительности внешней скалярной кривизны и из формулы Гаусса следует, что ранг второй квадратичной формы ≥ 2 . Применяя теорему, мы получим требуемое утверждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Стенберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.
- [2] Chern S. S., Lashof R. K. The total curvature of immersed manifolds // Amer. J. Math. 1957. V. 79. P. 308–318.
- [3] Heijenoort S. On locally convex manifolds // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1952. V. 5. P. 223–242.
- [4] Currier C. On hypersurfaces of Hyperbolic space infinitesimally supported by horospheres // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 313. № 1. P. 420–431.
- [5] Борисенко А. А., Власенко Д. И. Выпуклые поверхности в пространстве Лобачевского // Математ. физика, анализ, геометрия. 1997. Т. 4. № 3. С. 278–285.
- [6] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Введение в риманову геометрию. М.: Наука, 1994.
- [7] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Выпуклые множества в римановых пространствах // Успехи матем. наук. 1977. Т. 47. № 2. С. 3–5.
- [8] Gromov M. Lectures on manifolds of nonpositive curvature. Boston, 1985.
- [9] Alexander S. Locally convex hypersurfaces of negatively curved spaces // Proc. AMS. 1977. V. 64. № 2. P. 321–325.
- [10] Борисенко А. А. Внешняя геометрия сильно параболических многомерных подмногообразий // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52. № 6(318). С. 3–52.
- [11] Warner F. W. Extensions of the Rauch comparison theorem to submanifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 122. № 2. P. 341–356.
- [12] Грей А. Трубки. М.: Мир, 1993.

Харьковский государственный университет

Поступило

07.12.1999

Исправленный вариант

30.11.1999