Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Бикчентаев, Перестановочность проекторов и характеристизация следа на алгебрах фон Неймана. II, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 483–494

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8640>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:09:32

Перестановочность проекторов и характеристика следа на алгебрах фон Неймана. II

А. М. Бикчентаев

Получены новые необходимые и достаточные условия коммутирования проекторов в терминах операторных неравенств. Эти неравенства применены для характеристики следа на алгебрах фон Неймана в классе всех положительных нормальных функционалов.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Создание теории некоммутативного интегрирования было стимулировано задачами математического обоснования квантовой механики. основополагающими трудами явился цикл обширных работ Дж. фон Неймана по алгебрам операторов (30–40-е гг. XX в.), часть из которых выполнена в соавторстве с Ф. Дж. Мюрреем. Насыщенные новыми плодотворными идеями, эти работы составили основу общей теории интегрирования в алгебрах операторов. Оформление общей теории интегрирования относительно унитарно-инвариантных мер в полуконечных алгебрах фон Неймана было осуществлено И. Сигалом в 1953 г. Теория Сигала охватила теорию интегрирования относительно нормального следа. Он также осуществил вложение классической теории интегрирования на пространстве с мерой в построенную им схему.

В связи с прогрессом в теории алгебр фон Неймана и расширением сферы ее приложений встала проблема распространения теории интегрирования Сигала на нормальные веса в произвольных алгебрах фон Неймана. Решение этой проблемы (70–80-е гг. XX в.) опиралось на фундаментальные результаты общей теории алгебр фон Неймана (модулярная теория Томиты–Такесаки (1970 г.), характеристика нормальных весов У. Хаагерупом (1975 г.)), см., например, [1].

Исследования по задачам характеристики следов в классе нормальных весов или функционалов на алгебрах фон Неймана начались в 70-е гг. XX в.

Настоящая заметка является продолжением работ [2], [3], обозначений и терминологии которых мы придерживаемся. В [2] получен критерий перестановочности пары проекторов в терминах их верхней (нижней) грани в решетке всех проекторов алгебры и показано, что каждый косоэрмитов элемент собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ представляется в виде конечной суммы коммутаторов проекторов из $\mathcal{M}$. Невозможность таких представлений для конечной алгебры фон

Неймана связана с существованием нетривиального конечного следа на этой алгебре. В конечномерном случае в терминах конечных сумм коммутаторов проекторов описано множество операторов с нулевым каноническим следом tr .

В [3] получена характеристика следа на алгебрах фон Неймана в терминах коммутирования произведений проекторов под знаком веса.

В данной работе установлены новые критерии перестановочности проекторов в терминах операторных неравенств. Получены характеристики следа в классе всех положительных нормальных функционалов на алгебре фон Неймана.

Сведения о других характеристиках следа можно почерпнуть в [3]–[9], см. также библиографию в них.

2. Обозначения, некоторые определения и предварительные сведения.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и ϵ – тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Через $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ обозначим $*$ -алгебру всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Коммутантом множества $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется множество

$$X' = \{y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : xy = yx, x^*y = yx^*, x \in X\}.$$

$*$ -Подалгебра $\mathcal{M}$ алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется *алгеброй фон Неймана*, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, если $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$. Если $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то X' – алгебра фон Неймана, а X'' – наименьшая алгебра фон Неймана, содержащая X . Для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов в $\mathcal{H}$ через $\mathcal{M}^h$, $\mathcal{M}^u$, $\mathcal{M}^+$, $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ и $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ обозначим ее эрмитову, унитарную, положительную части, центр и решетку проекторов соответственно. Пусть $s_r(x)$ – носитель элемента $x \in \mathcal{M}^h$. Если оператор z принадлежит $\mathcal{M}$, то $|z| = (z^*z)^{1/2} \in \mathcal{M}^+$. Для $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ пишем $p \sim q$, если $p = u^*u$ и $q = uu^*$ с некоторым $u \in \mathcal{M}$; пусть $p^\perp = \epsilon - p$, $\mathcal{M}_p = \{px \mid p\mathcal{H} : x \in \mathcal{M}\}$ – редуцированная алгебра фон Неймана.

Весом на $\mathcal{M}$ называется отображение $\varphi: \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ такое, что

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x), \quad x, y \in \mathcal{M}^+, \quad \lambda \geq 0, \quad 0 \cdot \infty \equiv 0.$$

Вес φ на $\mathcal{M}$ называется *нормальным*, если $\varphi(x) = \sup \varphi(x_i)$, $x_i \nearrow x$, $x_i, x \in \mathcal{M}^+$; *конечным*, если $\varphi(\epsilon) < +\infty$; *следом*, если $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$, $x \in \mathcal{M}$. Вес φ корректно продолжается по линейности до функционала на $\text{Lin}\{x \in \mathcal{M}^+ : \varphi(x) < +\infty\}$. Такое продолжение позволяет отождествлять конечные веса с положительными функционалами на $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{M}_*^+$ – конус положительных нормальных функционалов на $\mathcal{M}$. Если $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ является следом, $z \in \mathcal{M}$ и числа $\alpha, \beta > 1$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$, то $|\varphi(z)| \leq \varphi(|z|)$ и выполняется

– неравенство Гёльдера [10; гл. IX, теорема 2.13], [11; теорема 5]

$$\varphi(|xy|) \leq \varphi(x^\alpha)^{1/\alpha} \varphi(y^\beta)^{1/\beta} \quad \text{для всех } x, y \in \mathcal{M}^+;$$

– неравенство Коши–Буняковского–Шварца [12; теорема 4.21]

$$\varphi(|xy|^{1/2}) \leq \varphi(x)^{1/2} \varphi(y)^{1/2} \quad \text{для всех } x, y \in \mathcal{M}^+;$$

– неравенство Голдена–Томпсона [11; теорема 4]

$$\varphi(e^{x+y}) \leq \varphi(e^{x/2} e^y e^{x/2}) \quad \text{для всех } x, y \in \mathcal{M}^h.$$

Пусть (e_{ij}) – канонический набор матричных единиц $M_n(\mathbb{C})$. Мы отождествляем алгебру $M_n(\mathcal{M})$ $(n \times n)$ -матриц с элементами из $\mathcal{M}$ с тензорным произведением $M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}$, отождествляя матрицу $[a_{ij}]$ с $\sum_{i,j=1}^n e_{ij} \otimes a_{ij}$ в обычном смысле. Пусть $\mathcal{N}$ – алгебра фон Неймана с единицей $e_{\mathcal{N}}$ и $\delta \in \mathbb{C}$ с $|\delta| = 1$, $0 \leq t \leq 1$. Определим проектор $r^{(\delta,t)}$ в $M_2(\mathcal{N})$, положив

$$r^{(\delta,t)} = \begin{pmatrix} t \cdot e_{\mathcal{N}} & \delta t^{1/2}(1-t)^{1/2} \cdot e_{\mathcal{N}} \\ \bar{\delta} t^{1/2}(1-t)^{1/2} \cdot e_{\mathcal{N}} & (1-t) \cdot e_{\mathcal{N}} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

ЛЕММА 1 [13; гл. 5, п. (ii) теоремы 1.41]. *Если алгебра фон Неймана $\mathcal{N}$ порождена двумя проекторами $p, q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то существует единственный проектор $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{N})$ такой, что алгебра $\mathcal{N}_z$ имеет тип I_2 и $\mathcal{N}_{z^\perp}$ абелева, причем $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{N}_{z^\perp} \leq 4$.*

ЛЕММА 2 [14; теорема 2.3.3]. *Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{N}$ имеет тип I_n (n – кардинальное число). Тогда алгебра $\mathcal{N}$ *-изоморфна тензорному произведению $\mathcal{Z}(\mathcal{N}) \bar{\otimes} \mathcal{B}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство с $\dim \mathcal{H} = n$.*

Пусть Φ – класс всех измеримых вогнутых функций $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ с $f(0) = 0$, строго вогнутых на отрезке $[0, 1]$.

3. О перестановочности проекторов. Геометрический смысл перестановочности проекторов p и q состоит в том, что подпространства $p\mathcal{H} \ominus (p\mathcal{H} \cap q\mathcal{H})$ и $q\mathcal{H} \ominus (p\mathcal{H} \cap q\mathcal{H})$ ортогональны; при этом $pq = p \wedge q$.

ТЕОРЕМА 1. *Для $p, q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$ следующие условия эквивалентны:*

- (i) $e^{p+q} \leq e^{p/2} e^q e^{p/2}$;
- (ii) $e^{p/2} e^q e^{p/2} \leq e^{p+q}$;
- (iii) $e^{pq} \leq e^q$;
- (iv) $\text{Re } pq \leq |pq|$;
- (v) $f(p+q) \leq f(p) + f(q)$ для некоторой функции $f \in \Phi$;
- (vi) $pq = qp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (vi) $\Rightarrow$ (i)–(v). Абелева (т.е. коммутативная) алгебра фон Неймана $\{p, q\}''$ *-изоморфна алгебре $L_\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ на некотором локализуемом пространстве с мерой $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Существуют $A, B \in \mathfrak{A}$ такие, что $p = \chi_A$, $q = \chi_B$ и неравенства (i), (ii) и (iv) для индикаторов превращаются в равенства. Неравенство (iii) приобретает вид $e^{\chi_{A \cap B}} \leq e^{\chi_B}$. Неравенство $f(\chi_A + \chi_B) \leq f(\chi_A) + f(\chi_B)$ выполнено в силу полуаддитивности измеримой вогнутой функции $f(t)$, $t \geq 0$, см. [15; гл. VII, теорема 7.2.5].

Для проверки обратных импликаций заметим, что $e^{p/2} = e^{1/2}p + p^\perp$, $e^q = eq + q^\perp$. Свяжем с p и q порожденную ими алгебру фон Неймана $\mathcal{N} = \{p, q\}''$. По лемме 1 существует единственный проектор $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{N})$ такой, что алгебра $\mathcal{N}_z$ имеет тип I_2 и алгебра $\mathcal{N}_{z^\perp}$ абелева. Ясно, что проекторы $pz^\perp$ и $qz^\perp$ коммутируют. Из теоремы Гельфанда о представлении абелевой унитарной C^* -алгебры (см., например, [13; гл. 3, теорема 1.18]) следует, что алгебра $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_z)$ *-изоморфна C^* -алгебре $C(\Omega)$ всех комплекснозначных непрерывных функций на стоуновском пространстве Ω всех характеров алгебры $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_z)$. Теперь из леммы 2 следует, что алгебра $\mathcal{N}_z$ *-изоморфна матричной алгебре $M_2(C(\Omega))$.

Для $\tilde{r} \in \mathbb{M}_2(C(\Omega))^{\text{pr}}$ определим области постоянства ранга (или, что то же самое, области постоянства канонического следа tr)

$$\Omega_j(\tilde{r}) = \{\omega \in \Omega \mid \tilde{r}_{11}(\omega) + \tilde{r}_{22}(\omega) = j\}, \quad j \in \{0, 1, 2\}.$$

Множества $\Omega_j(\tilde{r})$ замкнуты (как прообразы замкнутых множеств $\{j\} \subset \mathbb{C}$ при непрерывном отображении) и образуют дизъюнктное покрытие пространства Ω .

Проекторы pz и qz отождествляются с $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{M}_2(C(\Omega))^{\text{pr}}$ соответственно. Пусть

$$\Omega_{ij} = \Omega_i(\tilde{p}) \cap \Omega_j(\tilde{q}), \quad i, j \in \{0, 1, 2\}.$$

Все девять множеств Ω_{ij} открыто-замкнуты и образуют дизъюнктное покрытие пространства Ω . Если $\omega \in \Omega \setminus \Omega_{11}$, то $\tilde{p}\tilde{q}(\omega) = \tilde{q}\tilde{p}(\omega)$.

ЛЕММА 3 [16; следствие 3.3]. Для каждого $x \in \mathbb{M}_n(C(\Omega))^{\text{h}}$ существует такой $u \in \mathbb{M}_n(C(\Omega))^{\text{u}}$, что матрица $u^*xu(\omega)$ диагональна для всех $\omega \in \Omega$.

Из леммы 3 вытекает, что существует такой $u \in \mathbb{M}_2(C(\Omega))^{\text{u}}$ и такое замкнутое подмножество $\Omega'_1(\tilde{p}) \subset \Omega_1(\tilde{p})$, что

$$\begin{aligned} u^*(\omega)\tilde{p}(\omega)u(\omega) &= \text{diag}(1, 0) && \text{для всех } \omega \in \Omega'_1(\tilde{p}), \\ u^*(\omega)\tilde{p}(\omega)u(\omega) &= \text{diag}(0, 1) && \text{для всех } \omega \in \Omega_1(\tilde{p}) \setminus \Omega'_1(\tilde{p}). \end{aligned}$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай $p = \text{diag}(1, 0)$, $q = r^{(\delta, t)}$, $\delta \in \mathbb{C} \mid |\delta| = 1$ и $0 \leq t \leq 1$, см. (1). Найдем спектральное представление для $p + q$. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1+t-\lambda & \delta t^{1/2}(1-t)^{1/2} \\ \bar{\delta} t^{1/2}(1-t)^{1/2} & 1-t-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - t = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm t^{1/2}$. Следовательно,

$$p + q = (1 + t^{1/2})r^{(w, a)} + (1 - t^{1/2})r^{(-w, 1-a)},$$

где $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$ и $0 \leq a \leq 1$. Из равенств

$$1 + t = (1 + t^{1/2})a + (1 - t^{1/2})(1 - a), \quad \delta f(t) = 2t^{1/2}wf(a)$$

последовательно находим $a = (1 + t^{1/2})/2$, $w = \delta$. Поэтому

$$\begin{aligned} e^{p+q} &= e^{1+\sqrt{t}r^{(\delta, (1+\sqrt{t})/2)}} + e^{1-\sqrt{t}r^{(-\delta, (1-\sqrt{t})/2)}} \\ &= \begin{pmatrix} e^{1+\sqrt{t}} \frac{1+\sqrt{t}}{2} + e^{1-\sqrt{t}} \frac{1-\sqrt{t}}{2} & * \\ * & e^{1+\sqrt{t}} \frac{1-\sqrt{t}}{2} + e^{1-\sqrt{t}} \frac{1+\sqrt{t}}{2} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

здесь и далее символ “*” обозначает элементы матрицы, значения которых нам не понадобятся. Имеем $e^{p/2} = \text{diag}(e^{1/2}, 1)$ и

$$e^{p/2}e^qe^{p/2} = \begin{pmatrix} e(et - t + 1) & * \\ * & e(1 - t) + t \end{pmatrix}.$$

(i) $\Rightarrow$ (vi). Неравенство

$$e^{1+\sqrt{t}} \frac{1-\sqrt{t}}{2} + e^{1-\sqrt{t}} \frac{1+\sqrt{t}}{2} \leq e(1-t) + t \quad (2)$$

обращается в равенство при $t \in \{0, 1\}$. Разделив обе части неравенства (2) на e и заменив t на t^2 , получаем

$$e^t \frac{1-t}{2} + e^{-t} \frac{1+t}{2} \leq 1 - t^2 + e^{-1} t^2,$$

т.е. $\text{ch}(t) - t \text{sh}(t) \leq 1 - t^2 + e^{-1} t^2$. Покажем, что при $0 < t < 1$ выполнено противоположное к (2) неравенство

$$0 < \text{ch}(t) - t \text{sh}(t) - 1 + t^2 - e^{-1} t^2 \equiv h(t).$$

Заменив $\text{ch}(t)$ и $\text{sh}(t)$ соответствующими рядами по степеням t , имеем

$$h(t) = (2^{-1} - e^{-1})t^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k-1)!} \right) t^{2k} = (2^{-1} - e^{-1})t^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-2k}{(2k)!} t^{2k}.$$

Разделив при $0 < t < 1$ на t^2 , получим

$$h(t) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g(t) \equiv \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k-1}{(2k)!} t^{2k-2} < 2^{-1} - e^{-1}.$$

Имеем

$$g(1) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = -1 + \text{sh}(1) - (-1 - 2^{-1} + \text{ch}(1)) = 2^{-1} - e^{-1}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (vi). Неравенство

$$e^2 t - e t + e \leq e^{1+\sqrt{t}} \frac{1+\sqrt{t}}{2} + e^{1-\sqrt{t}} \frac{1-\sqrt{t}}{2} \quad (3)$$

обращается в равенство при $t \in \{0, 1\}$. Разделив обе части неравенства (3) на e и заменив t на t^2 , получим

$$1 + (e-1)t^2 \leq e^t \frac{1+t}{2} + e^{-t} \frac{1-t}{2},$$

т.е. $1 + (e-1)t^2 \leq \text{ch}(t) + t \text{sh}(t)$. Покажем, что при $0 < t < 1$ выполнено противоположное к (3) неравенство

$$0 < 1 + (e-1)t^2 - \text{ch}(t) - t \text{sh}(t) \equiv h_1(t).$$

Заменив $\text{ch}(t)$ и $\text{sh}(t)$ соответствующими рядами по степеням t , имеем

$$h_1(t) = \left(e - \frac{5}{2} \right) t^2 - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k)!} + \frac{1}{(2k-1)!} \right) t^{2k} = \left(e - \frac{5}{2} \right) t^2 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+1}{(2k)!} t^{2k}.$$

Разделив при $0 < t < 1$ на t^2 , получаем

$$h_1(t) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g_1(t) \equiv \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+1}{(2k)!} t^{2k-2} < e - \frac{5}{2}.$$

Имеем

$$g_1(1) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = -1 + \operatorname{sh}(1) - 1 - \frac{1}{2} + \operatorname{ch}(1) = e - \frac{5}{2}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (vi). Имеем $pqp = tp$, поэтому $e^{pqp} = e^{tp} = \operatorname{diag}(e^t, 1)$,

$$e^q = eq + q^\perp = \begin{pmatrix} 1 + (e-1)t & (e-1)\delta t^{1/2}(1-t)^{1/2} \\ (e-1)\bar{\delta} t^{1/2}(1-t)^{1/2} & e - (e-1)t \end{pmatrix}.$$

При $0 \leq t \leq 1$ имеем $e^t \leq 1 + (e-1)t$ (отрезок $y(t) = 1 + (e-1)t$ является хордой к графику выпуклой функции $x(t) = e^t$ в точках с абсциссами $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$) и $1 \leq e - (e-1)t$. Поэтому неравенство (iii) выполнено тогда и только тогда, когда

$$(1 + (e-1)t - e^t)(e-1 - (e-1)t) - (e-1)^2 t(1-t) \geq 0.$$

Разделив обе части этого неравенства на $e-1$, получаем

$$(1 + (e-1)t - e^t)(1-t) - (e-1)t(1-t) \geq 0.$$

Если $t = 1$, то $p = q = pq = qp$; при $0 \leq t < 1$ разделив обе части последнего неравенства на $1-t$, получим $1 - e^t \geq 0$. Следовательно, $t = 0$ и $q = p^\perp$, т.е. $pq = qp = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (vi). Имеем $pqp = tq$, поэтому $|pq| = t^{1/2}q$ и

$$\operatorname{Re} pq = \begin{pmatrix} t & \delta t^{1/2}(1-t)^{1/2}/2 \\ \bar{\delta} t^{1/2}(1-t)^{1/2}/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad |pq| - \operatorname{Re} pq = \begin{pmatrix} t^{3/2} - t & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Тогда $t^{3/2} - t \geq 0$ и $t \in \{0, 1\}$, таким образом, $pq = qp$.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Пусть проекторы p, q, r одномерны, $p+q = \lambda r + (2-\lambda)r^\perp$ – спектральное представление, $0 \leq \lambda \leq 2$. Тогда

$$f(p+q) = f(\lambda)r + f(2-\lambda)r^\perp, \quad f(p) + f(q) = f(1)(p+q).$$

По предположению

$$f(\lambda)r + f(2-\lambda)r^\perp \leq f(1)(\lambda r + (2-\lambda)r^\perp). \quad (4)$$

Пусть $0 \leq \lambda \leq 1$. Умножив обе части (4) слева и справа на r , получаем неравенство $f(\lambda) \leq f(1)\lambda$. Отрезок $y(\lambda) = f(1)\lambda$ является хордой к графику строго вогнутой функции $f(\lambda)$ в точках с абсциссами $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$. Поэтому неравенство $f(\lambda) \leq f(1)\lambda$ выполнено только при $\lambda \in \{0, 1\}$, т.е. при $p = q$ или $p = q^\perp$.

Пусть $\lambda \in (1, 2]$. Умножив обе части неравенства (4) слева и справа на $r^\perp$, получаем $f(2-\lambda) \leq f(1)(2-\lambda)$. Заменяя здесь $2-\lambda$ на t , имеем $f(t) \leq f(1)t$, $0 \leq t < 1$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем $t = 0$, т.е. $\lambda = 2$ и $p = q$. Теорема доказана.

4. Характеризации следа на алгебре фон Неймана.

ТЕОРЕМА 2. Для функционала $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ следующие условия эквивалентны:

- (i) для некоторых чисел $\alpha, \beta > 1$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$, $\alpha \neq 2$, для любых $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ выполняется неравенство $|\varphi(pq)| \leq \varphi(p)^{1/\alpha} \varphi(q)^{1/\beta}$;
- (ii) для некоторых чисел $\alpha, \beta > 1$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$, $\alpha \neq 2$, для любых $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ выполняется неравенство Гёльдера $\varphi(|pq|) \leq \varphi(p)^{1/\alpha} \varphi(q)^{1/\beta}$;
- (iii) для любых $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ выполняется неравенство Коши–Буняковского–Шварца $\varphi(|pq|^{1/2}) \leq \varphi(p)^{1/2} \varphi(q)^{1/2}$;
- (iv) для любых $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ выполняется неравенство Голдена–Томпсона $\varphi(e^{p+q}) \leq \varphi(e^{p/2} e^q e^{p/2})$;
- (v) для любых $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ выполняется неравенство $\varphi(e^{qpq}) \leq \varphi(e^p)$;
- (vi) для любых $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ выполняется неравенство $\varphi(\operatorname{Re} pq) \geq 0$;
- (vii) для любых $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ выполняется неравенство $\varphi(\operatorname{Re} pq) \leq \varphi(|pq|)$;
- (viii) для любых $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ выполняется неравенство $\varphi(\operatorname{Im} pq) \geq 0$;
- (ix) для любых $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ выполняется неравенство $\varphi(f(p+q)) \leq \varphi(f(p)) + \varphi(f(q))$, где $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ – вогнутая функция с $f(0) = 0$, дифференцируемая в точке $t = 1$ с $f'(1) \neq f(1)$;
- (x) φ является следом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации (x) $\Rightarrow$ (i)–(iv) следуют из приведенных в п. 2 неравенств Гёльдера, Коши–Буняковского–Шварца и Голдена–Томпсона, соответственно.

(x) $\Rightarrow$ (v). Имеем сходящиеся по норме ряды

$$e^p = \mathbf{e} + p + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \dots + \frac{p^n}{n!} + \dots = ep + p^\perp,$$

$$e^{qpq} = \mathbf{e} + qpq + \frac{(qpq)^2}{2!} + \frac{(qpq)^3}{3!} + \dots + \frac{(qpq)^n}{n!} + \dots.$$

Поскольку $(qpq)^n \leq qpq$, справедлива оценка $\varphi((qpq)^n) \leq \varphi(qpq) = \varphi(pqp) \leq \varphi(p)$, $n \in \mathbb{N}$. Остается учесть, что функционал φ непрерывен по норме.

(x) $\Rightarrow$ (vi). Известно [9] более общее неравенство

$$\varphi(\operatorname{Re} xy) = \operatorname{Re} \varphi(xy) = \operatorname{Re} \varphi(x^{1/2} y x^{1/2}) = \varphi(x^{1/2} y x^{1/2}) \geq 0, \quad x, y \in \mathcal{M}^+.$$

(x) $\Rightarrow$ (vii). Существует частичная изометрия $u \in \mathcal{M}$ такая, что $\operatorname{Re} pq \leq u|pq|u^*$ (см. [17]). Поэтому

$$\varphi(\operatorname{Re} pq) \leq \varphi(u|pq|u^*) = \varphi((|pq|^{1/2} u^*)^* |pq|^{1/2} u^*) = \varphi(|pq|^{1/2} u^* u |pq|^{1/2}) \leq \varphi(|pq|).$$

(x) $\Rightarrow$ (viii). Имеем $2\varphi(\operatorname{Im} pq) = i(\varphi(qp) - \varphi(pq)) = 0$.

(x) $\Rightarrow$ (ix). См., например, [18; теорема 4].

Ниже показывается, что аналогично тому, как было проделано в ряде других подобных случаев (см. [4] или [5]), доказательство обратных импликаций для произвольной алгебры фон Неймана сводится к случаю алгебры $M_2(\mathbb{C})$.

Известно [4], что $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ является следом тогда и только тогда, когда $\varphi(p) = \varphi(q)$ для всех $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ с $pq = 0$ и $p \sim q$ (см. также [5; лемма 2]). Пусть $*$ -алгебра $\mathcal{N}$

в редуцированной алгебре $\mathcal{M}_{p+q}$ порождена частичной изометрией $v \in \mathcal{M}$, реализующей эквивалентность p и q . Тогда $\mathcal{N}$ *-изоморфна $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, а неравенства в (i)–(ix) остаются справедливыми для операторов из $\mathcal{N}$ и ограничения функционала $\varphi|_{\mathcal{N}}$. Мы покажем, что такое ограничение является следовым функционалом на $\mathcal{N}$, поэтому $\varphi(p) = \varphi(q)$.

Пусть функционал φ задается оператором плотности $s_\varphi = \text{diag}(1/2 + s, 1/2 - s)$, $0 \leq s \leq 1/2$, т.е. $\varphi(x) = \text{tr}(xs_\varphi)$, $x \in \mathcal{N}$. Рассмотрим два проектора $p = r^{(1, 1/2-\varepsilon)}$, $q = r^{(1, 1/2+\varepsilon)}$, $0 \leq \varepsilon \leq 1/2$, и пусть $h = 1/4 - \varepsilon^2$.

(i) $\Rightarrow$ (x). Поскольку

$$pq = \begin{pmatrix} 2h & (1-2\varepsilon)h^{1/2} \\ (1+2\varepsilon)h^{1/2} & 2h \end{pmatrix}, \quad s_\varphi pq = \begin{pmatrix} (1+2s)h & * \\ * & (1-2s)h \end{pmatrix},$$

имеем $\varphi(pq) = 2h$. Пусть $\beta > \alpha > 1$. Имеем $\varphi(p) = 1/2 - 2s\varepsilon$, $\varphi(q) = 1/2 + 2s\varepsilon$. Неравенство $|\varphi(pq)| \leq \varphi(p)^{1/\alpha} \varphi(q)^{1/\beta}$ переписывается в виде

$$\frac{1}{2} - 2\varepsilon^2 \leq \left(\frac{1}{2} - 2s\varepsilon\right)^{1/\alpha} \left(\frac{1}{2} + 2s\varepsilon\right)^{1/\beta}.$$

Умножив обе части этого неравенства на $2 = 2^{1/\alpha} 2^{1/\beta}$, получим

$$1 - 4\varepsilon^2 \leq (1 - 4s\varepsilon)^{1/\alpha} (1 + 4s\varepsilon)^{1/\beta}. \quad (5)$$

Формула Тейлора дает асимптотические равенства

$$(1 - 4s\varepsilon)^{1/\alpha} = 1 - \frac{4s}{\alpha} \varepsilon + o(\varepsilon), \quad (1 + 4s\varepsilon)^{1/\beta} = 1 + \frac{4s}{\beta} \varepsilon + o(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0+$, и правая часть неравенства (5) равна

$$1 - \frac{4(\beta - \alpha)s}{\alpha\beta} \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Так как $s \geq 0$, (5) выполнено для всех $0 < \varepsilon \leq 1/2$ только при $s = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (x), (iii) $\Rightarrow$ (x). Имеем $qpq = 4hq$, поэтому $|pq| = (qpq)^{1/2} = 2h^{1/2}q$, $|pq|^{1/2} = (4h)^{1/4}q$,

$$\varphi(|pq|) = h^{1/2}(1 + 4s\varepsilon), \quad \varphi(|pq|^{1/2}) = (4h)^{1/4} \left(\frac{1}{2} + 2s\varepsilon\right).$$

Неравенства Гёльдера и Коши–Буняковского–Шварца имеют вид

$$1 - 4\varepsilon^2 \leq \left(\frac{1 - 4s\varepsilon}{1 + 4s\varepsilon}\right)^{2/\alpha}, \quad 1 - 4\varepsilon^2 \leq (1 + 4s\varepsilon)^{-4} \quad (6)$$

соответственно. Формула Тейлора дает

$$\left(\frac{1 - 4s\varepsilon}{1 + 4s\varepsilon}\right)^{2/\alpha} = 1 - \frac{16}{\alpha} s\varepsilon + o(\varepsilon), \quad (1 + 4s\varepsilon)^{-4} = 1 - 16s\varepsilon + o(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Поэтому неравенства (6) выполнены для всех $0 < \varepsilon \leq 1/2$ только при $s = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (x). Пусть $r = r^{(1,1/2)}$, тогда $p + q = (1 + 2h^{1/2})r + (1 - 2h^{1/2})r^\perp$ – спектральное представление. Легко видеть, что $e^{p+q} = e^{1+2\sqrt{h}}r + e^{1-2\sqrt{h}}r^\perp$,

$$e^{p/2}e^qe^{p/2} = e^2pqp + e^{3/2}(pqp^\perp + p^\perp qp) + e(pq^\perp p + p^\perp qp^\perp) + e^{1/2}(pq^\perp p^\perp + p^\perp q^\perp p) + p^\perp q^\perp p^\perp,$$

$$\begin{aligned} pqp &= \begin{pmatrix} 2h(1-2\varepsilon) & * \\ * & 2h(1+2\varepsilon) \end{pmatrix}, & pqp^\perp &= \begin{pmatrix} 4h\varepsilon & * \\ * & -4h\varepsilon \end{pmatrix}, \\ pq^\perp p &= \begin{pmatrix} 2\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 & * \\ * & 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 \end{pmatrix}, & pq^\perp p^\perp &= \begin{pmatrix} 4\varepsilon^3 - \varepsilon & * \\ * & \varepsilon - 4\varepsilon^3 \end{pmatrix}, \\ p^\perp qp^\perp &= \begin{pmatrix} 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 & * \\ * & 2\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 \end{pmatrix}, & p^\perp q^\perp p^\perp &= \begin{pmatrix} 2h(1+2\varepsilon) & * \\ * & 2h(1-2\varepsilon) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Неравенство Голдена–Томпсона перепишем в виде

$$e^{1+2\sqrt{h}} + e^{1-2\sqrt{h}} \leq 4e^2h(1-4s\varepsilon) + 32e^{3/2}hs\varepsilon + 8e\varepsilon^2 - 32e^{1/2}hs\varepsilon + 4h(1+4s\varepsilon).$$

Формула Тейлора при $\varepsilon \rightarrow 0+$ дает

$$\begin{aligned} e^{1-2\sqrt{h}} &= e^{1-\sqrt{1-4\varepsilon^2}} = 1 - \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) = 1 + o(\varepsilon), \\ e^{1+2\sqrt{h}} &= e^2 \cdot e^{\sqrt{1-4\varepsilon^2}-1} = e^2(1 + 2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)) = e^2 + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} a &\equiv -2e^2 + 4e^{3/2} - 4e^{1/2} + 2 = 4e\left(2\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{sh}(1)\right) \\ &= 4e\left(2\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right) - 2\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 8e\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)\right) < 0, \end{aligned}$$

и неравенство $0 \leq as\varepsilon + o(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0+$, выполнено для всех $0 < \varepsilon \leq 1/2$ только при $s = 0$.

(v) $\Rightarrow$ (x). Имеем $qpq = 4hq$ и $e^{qpq} = e^{4h}q + q^\perp$. Неравенство $\varphi(e^{qpq}) \leq \varphi(e^p)$ с учетом формулы Тейлора перепишется в виде

$$es\varepsilon \leq 2s\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Оно выполнено для всех $0 < \varepsilon \leq 1/2$ только при $s = 0$.

(vi) $\Rightarrow$ (x). Положим $p = r^{(1,1/2-\varepsilon)}$, $q = r^{(-1,1/2-\varepsilon)}$, $0 \leq \varepsilon \leq 1/2$. Тогда

$$pq = \begin{pmatrix} 2\varepsilon^2 - \varepsilon & 2\varepsilon h^{1/2} \\ -2\varepsilon h^{1/2} & 2\varepsilon^2 + \varepsilon \end{pmatrix},$$

$\operatorname{Re} pq = \operatorname{diag}(2\varepsilon^2 - \varepsilon, 2\varepsilon^2 + \varepsilon)$, и если $s \neq 0$, то $\varphi(\operatorname{Re} pq) = 2\varepsilon(\varepsilon - s) < 0$ при $0 < \varepsilon < s$.

(vii) $\Rightarrow$ (x). Положим $p = r^{(1,1/2+\varepsilon)}$, $q = r^{(1,1/2-\varepsilon)}$, $0 \leq \varepsilon \leq 1/2$. Тогда

$$\operatorname{Re} pq = 2 \begin{pmatrix} h & h^{1/2} \\ h^{1/2} & h \end{pmatrix},$$

$qpq = 4hq$, поэтому $|pq| = 2h^{1/2}q$. Неравенство $\varphi(\operatorname{Re} pq) \leq \varphi(|pq|)$ перепишется в виде

$$1 - 4\varepsilon^2 \leq 1 - 8s\varepsilon + 16s^2\varepsilon^2.$$

Оно выполнено для всех $0 < \varepsilon \leq 1/2$ только при $s = 0$.

(viii) $\Rightarrow$ (x). Положим $p = r^{(-i, 1/2)}$, $q = r^{(1, 1/2)}$. Тогда $\operatorname{Im} pq = \operatorname{diag}(-1/4, 1/4)$ и $2\varphi(\operatorname{Im} pq) = -s \geq 0$, т.е. $s = 0$.

(ix) $\Rightarrow$ (x). Пусть $r = \operatorname{diag}(1, 0)$ и $0 \leq \lambda \leq 2$. Существуют одномерные проекторы p, q такие, что $p + q = \lambda r + (2 - \lambda)r^\perp$ — спектральное представление. Неравенство (ix) принимает вид

$$f(\lambda)\left(\frac{1}{2} + s\right) + f(2 - \lambda)\left(\frac{1}{2} - s\right) \leq f(1)\left(\lambda\left(\frac{1}{2} + s\right) + (2 - \lambda)\left(\frac{1}{2} - s\right)\right),$$

что равносильно неравенству

$$(f(\lambda) - f(1)\lambda)\left(\frac{1}{2} + s\right) \leq (f(1)(2 - \lambda) - f(2 - \lambda))\left(\frac{1}{2} - s\right).$$

Существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f(t) \neq tf(1)$ при $t \in \check{U}_\varepsilon(1) = (1 - \varepsilon, 1) \cup (1, 1 + \varepsilon)$. Действительно, в противном случае найдется последовательность $t_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, $t_n \neq 1$ и $f(t_n) = t_n f(1)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f'(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(t_n) - f(1)}{t_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(t_n - 1)f(1)}{t_n - 1} = f(1)$$

— противоречие. Итак, если $2 - \lambda \in \check{U}_\varepsilon(1)$, то $f(1)(2 - \lambda) \neq f(2 - \lambda)$ и неравенство (ix) равносильно неравенству

$$\frac{f(\lambda) - f(1)\lambda}{f(1)(2 - \lambda) - f(2 - \lambda)}\left(\frac{1}{2} + s\right) \leq \frac{1}{2} - s. \quad (7)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 1-} \frac{f(\lambda) - f(1)\lambda}{f(1)(2 - \lambda) - f(2 - \lambda)} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(1 - t) - f(1)(1 - t)}{f(1)(1 + t) - f(1 + t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(f(1)(1 - t) - f(1 - t))/(-t)}{(f(1)(1 + t) - f(1 + t))/t} \\ &= \frac{(f(1)x - f(x))'|_{x=1}}{(f(1)x - f(x))'|_{x=1}} = 1. \end{aligned}$$

Поэтому неравенство (7) выполнено для всех $0 \leq \lambda < 1$ только при $s = 0$. Теорема доказана.

При $\alpha = 2$ п. (i) теоремы 2 теряет силу. В предельном случае из неравенства $|\varphi(xy)| \leq \varphi(x^\alpha)^{1/\alpha} \varphi(y^\beta)^{1/\beta}$, $x, y \in \mathcal{M}^+$, для $\beta = 1$ имеем неравенство $|\varphi(yx)| \leq \|y\|\varphi(x)$; в [9] показано, что оно эквивалентно характеристике Гарднера [4] неравенством

$$|\varphi(x)| \leq \varphi(|x|), \quad x \in \mathcal{M}.$$

ЛЕММА 4. Если функция $f \in \Phi$ дифференцируема в точке $t = 1$, то $f'(1) < f(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \geq 0$. Хорошо известно, что функция f на $(0, \infty)$ абсолютно непрерывна; она имеет производную всюду, за исключением счетного множества точек. Эта производная является убывающей функцией. Существует представление

$$f(t) = f(0+) + \int_0^t g(x) dx, \quad 0 < t < \infty,$$

где $g(t)$ – правая производная функции $f(t)$. По предположению $g(t)$ убывает на $(0, \infty)$ и строго убывает на $(0, 1)$. Имеем

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0+) + \int_0^1 g(x) dx > f(0+) + \int_0^{1/2} g(1/2) dx + \int_{1/2}^1 g(1) dx \\ &= f(0+) + \frac{g(1/2)}{2} + \frac{g(1)}{2} > g(1) = f'(1). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Н. Шерстнев, *Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла*, Физматлит, М., 2008.
- [2] А. М. Бикчентаев, “О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов. III. Коммутаторы в C^* -алгебрах”, *Матем. сб.*, **199**:4 (2008), 3–20.
- [3] А. М. Бикчентаев, “Перестановочность проекторов и характеристика следа на алгебрах фон Неймана. I”, *Изв. вузов. Матем.*, 2009, № 12, 80–83.
- [4] L. T. Gardner, “An inequality characterizes the trace”, *Canad. J. Math.*, **31**:6 (1979), 1322–1328.
- [5] O. E. Tikhonov, “Subadditivity inequalities in von Neumann algebras and characterization of tracial functionals”, *Positivity*, **9**:2 (2005), 259–264.
- [6] A. M. Bikchentaev, O. E. Tikhonov, “Characterization of the trace by Young’s inequality”, *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **6**:2 (2005), Article 49.
- [7] A. M. Bikchentaev, O. E. Tikhonov, “Characterization of the trace by monotonicity inequalities”, *Linear Algebra Appl.*, **422**:1 (2007), 274–278.
- [8] А. М. Бикчентаев, “Об одном свойстве L_p -пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана”, *Матем. заметки*, **64**:2 (1998), 185–190.
- [9] G. K. Pedersen, E. Størmer, “Traces on Jordan algebras”, *Canad. J. Math.*, **34**:2 (1982), 370–373.
- [10] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. II*, Encyclopaedia Math. Sci., **125**, Operator algebras and noncommutative geometry, 6, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [11] M. B. Ruskai, “Inequalities for traces on von Neumann algebras”, *Comm. Math. Phys.*, **26**:4 (1972), 280–289.
- [12] S. M. Manjegani, *Inequalities in Operator Algebras*, Ph.D. Thesis, The University of Regina, Regina, Canada, 2004.
- [13] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. I*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [14] S. Sakai, *C^* -algebras and W^* -algebras*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **60**, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [15] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.

- [16] D. Deckard, C. Pearcy, “On matrices over the ring of continuous complex valued functions on a Stonian space”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**:2 (1963), 322–328.
- [17] C. A. Akemann, J. Anderson, G. K. Pedersen, “Triangle inequalities in operator algebras”, *Linear and Multilinear Algebra*, **11**:2 (1982), 167–178.
- [18] О. Е. Тихонов, “Выпуклые функции и неравенства для следа”, *Конструктивная теория функций и функциональный анализ*, Вып. 6, Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1987, 77–82.

А. М. Бикчентаев

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Airat.Bikchentaev@ksu.ru

Поступило

23.06.2009

Исправленный вариант

22.04.2010