Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Чехлов, О некоторых классах нильгрупп, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 2, 297–304

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8642>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:57:20

О некоторых классах нильгрупп

А. Р. Чехлов

Найдены необходимые и достаточные условия, при которых прямое произведение (при дополнительном условии неизмеримости некоторых подмножеств) связанных групп является нильгруппой.

Библиография: 12 названий.

Все группы в статье абелевы. Через $\mathbb{Z}$ обозначается аддитивная группа (или кольцо) целых чисел, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ – группа (или кольцо) целых p -адических чисел, $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел. Если A – группа, p – простое число, то $p^\omega A = \bigcap_{n=1}^{\infty} p^n A$; $\Pi(A)$ – множество всех простых чисел p со свойством $pA \neq A$; $r_p(A)$ – p -ранг группы A , т.е. ранг ее факторгруппы A/pA ; $E(A)$ – кольцо эндоморфизмов группы A . Подгруппа G группы A называется *чистой* (*p -чистой*), если $nG = G \cap nA$ (соответственно $p^n G = G \cap p^n A$) для каждого $n \in \mathbb{N}$. Группа без кручения A называется *квазиоднородной*, если $\Pi(A) = \Pi(G)$ для любой ее ненулевой чистой подгруппы G .

Напомним, что функция $\mu: A \times A \rightarrow A$ называется *умножением* на группе A , если $\mu(a, b + c) = \mu(a, b) + \mu(a, c)$ и $\mu(b + c, a) = \mu(b, a) + \mu(c, a)$ для всех $a, b, c \in A$. Всякое кольцо (под кольцом в данном случае подразумевается не обязательно ассоциативное или коммутативное кольцо, но умножение всегда дистрибутивно с двух сторон относительно сложения) на группе A задает некоторое умножение μ , а именно $\mu(a, b) = ab$, и это соответствие между кольцевыми структурами и умножениями на группе A биективно. Если μ и ν – умножения на группе A , то их *сумма* $\mu + \nu$ определяется по правилу

$$(\mu + \nu)(a, b) = \mu(a, b) + \nu(a, b)$$

для всех $a, b \in A$. Относительно введенной операции сложения все умножения на группе A образуют абелеву группу, *группу умножений* на A , $\text{Mult } A$. Отметим, что для каждой группы A имеют место изоморфизмы [1; теорема 118.1]

$$\text{Mult } A \cong \text{Hom}(A \otimes A, A) \cong \text{Hom}(A, E(A)^+).$$

Всякая группа A может быть тривиальным образом снабжена кольцевой структурой, если все произведения ее элементов положить равными нулю. Такое кольцо называется *нуль-кольцом*. Нуль-группы $\text{Mult } A$ – это умножение, соответствующее

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 г.).

нуль-кольцу на A . Группа A называется *нильгруппой* [1; § 120], если на A не существует никаких колец, отличных от нуль-кольца, т.е. $\text{Mult } A = 0$. Всякая периодическая делимая группа является нильгруппой [1; теорема 120.3]. Из [1; § 121] сразу следует, что всякая нильгруппа не содержит ненулевых делимых подгрупп без кручения. Группа без кручения ранга 1 не является нильгруппой тогда и только тогда, когда ее тип идемпотентен [1; теорема 121.1].

Обозначим через R_p класс групп без кручения без ненулевых элементов бесконечной p -высоты при данном простом числе p . Если $a \in A \in R_p$, $\xi = r_0 + r_1p + \dots$ — целое p -адическое число, то через ξa будем обозначать элемент группы A , являющийся пределом в p -адической топологии последовательности

$$(r_0 + \dots + r_n p^n)a, \quad n = 0, 1, \dots$$

Следуя [2], p -характеристикой элемента a будем называть множество

$$H_p^A(a) = \{\xi \mid \xi \in \widehat{\mathbb{Z}}_p \text{ и } \xi a \text{ определено}\}.$$

Множество p -характеристик совпадает с множеством всех p -чистых подгрупп группы $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, содержащих группу $\mathbb{Z}$. В [2] показано, что если $A, B \in R_p$, $r_p(A) = 1$, а $a \in A \setminus pA$ и $H_p(a) \subseteq H_p(b)$ для некоторого $b \in B$, то существует единственный гомоморфизм $f: A \rightarrow B$ со свойством $fa = b$. Будем говорить, что p -характеристики H_1, H_2 эквивалентны, если существуют такие $n, m \in \mathbb{N}$, что $nH_1 \subseteq H_2$, $mH_2 \subseteq H_1$. Класс эквивалентности в множестве p -характеристик будем называть p -типом. На множестве всех p -типов можно ввести отношение частичного порядка $\leq$. Например, запись $\tau_1 \leq \tau_2$ означает, что существуют p -характеристики $H_1 \in \tau_1$, $H_2 \in \tau_2$ такие, что $nH_1 \subseteq H_2$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Понятие p -типа было введено автором в ряде работ ([3]–[5] и др.). Множество p -типов всех ненулевых элементов группы $A \in R_p$ обозначим через $T_p(A)$, а через $\tau_p(a)$ — p -тип элемента $a \in A$. Группу $A \in R_p$ будем называть p -однородной, если все ее ненулевые элементы имеют один и тот же p -тип τ , в этом случае будем писать $\tau_p(A) = \tau$. Если $H_1 \in \tau_1$, $H_2 \in \tau_2$, то под $H_1 H_2$ будем понимать p -характеристику (т.е. p -чистую подгруппу группы $\widehat{\mathbb{Z}}_p$), порожденную элементами $h_1 h_2$, где $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, а под p -типом $\tau_1 \tau_2$ будем понимать p -тип, содержащий $H_1 H_2$. Если $H_1 \subseteq H_2$, то под p -характеристикой $H_2 : H_1$ будем понимать наибольшую p -характеристику H , для которой $HH_1 \subseteq H_2$. p -Характеристику H назовем *идемпотентной*, если $H^2 = HH = H$. Если $A \in R_p$ — группа p -ранга 1, $a \in A \setminus pA$, то для каждого

$$b \in A(H_p(a)) = \{x \in A \mid H_p(x) \supseteq H_p(a)\}$$

существует единственный $\varphi_b \in E(A)$ со свойством $\varphi_b a = b$. Отображение $b \mapsto \varphi_b$ задает изоморфизм $E(A)^+ \cong A(H_p(a))$. Отметим, что $H_p(p^n a) = H_p(a)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Групповые термины, примененные к кольцу, касаются его аддитивной группы.

ЛЕММА 1. Пусть A и B — группы из R_p p -ранга 1. Если $\tau_p(a) \leq \tau_p(b)$ для некоторых $0 \neq a \in A$, $0 \neq b \in B$, то $H = \text{Hom}(A, B)$ является группой из R_p p -ранга 1 и

$$\tau_p(b) : \tau_p(a) \in T_p(H).$$

В противном случае $\text{Hom}(A, B) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $H \in R_p$. Если $H_p(a) \subseteq H_p(b)$ (можно считать, что $a \in A \setminus pA$, $b \in B \setminus pB$), то существует единственный гомоморфизм $f: A \rightarrow B$ со свойством $fa = b$. Если $\xi H_p(a) \subseteq H_p(b)$ ($\xi \in \widehat{\mathbb{Z}}_p \setminus p\widehat{\mathbb{Z}}_p$), то

$$H_p(a) \subseteq \xi^{-1} H_p(b) = H_p(\xi b).$$

Поэтому существует гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow B$, $\varphi a = \xi b$. Ясно, что $\varphi = \xi f$, т.е.

$$H_p(f) \supseteq H_p(b) : H_p(a).$$

Пусть теперь $\eta f \in H$ для некоторого $\eta \in \widehat{\mathbb{Z}}_p \setminus p\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Имеем $(\eta f)a = \eta b$. Отсюда $H_p(a) \subseteq H_p(\eta b) = \eta^{-1} H_p(b)$ и $\eta H_p(a) \subseteq H_p(b)$, т.е. $\eta \in H_p(b) : H_p(a)$, значит, $H_p(f) = H_p(b) : H_p(a)$. Если $\psi a = x$ для $x \in B \setminus pB$, то $x = \zeta b$ для некоторого $\zeta \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$. Откуда $\zeta^{-1} \psi a = b$, значит, $\zeta^{-1} \psi = f$ или $\psi = \zeta f$. В частности, $r_p(H) = 1$.

Заметим, что если A и B – группы из R_p p -ранга 1, то $G = A \otimes B$ – группа без кручения p -ранга 1; для $a \in A$ и $b \in B$ следует, что

$$\tau_p(a \otimes b + p^\omega G) \geq \tau_p(a) \tau_p(b).$$

Отметим, что тензорные произведения $A \otimes \cdots \otimes A$ (k экземпляров) при различных конечных k для группы без кручения A конечного p -ранга изучались в [6].

ЛЕММА 2. 1) Кольцо $S \in R_p$ p -ранга 1 либо является нуль-кольцом, либо изоморфно некоторому p -чистому подкольцу кольца $\widehat{\mathbb{Z}}_p$.

2) Группа $A \in R_p$ p -ранга 1 не является нильгруппой тогда и только тогда, когда для некоторых $\tau_1, \tau_2 \in T_p(A)$ найдется $\tau \in T_p(A)$ со свойством $\tau_1 \tau_2 \leq \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Это утверждение вытекает из того, что S^+ можно рассматривать как p -чистую подгруппу в группе $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ и всякое умножение на S продолжается до умножения кольца $\widehat{\mathbb{Z}}_p$.

2) Если $a, b \in A$, $ab \neq 0$ и $\xi \in H_p(a)$, $\eta \in H_p(b)$, то $\xi \eta(ab) = (\xi a)(\eta b)$. Откуда следует, что $H_p(a)H_p(b) \subseteq H_p(ab)$, т.е. $\tau_p(a)\tau_p(b) \leq \tau_p(ab)$.

Обратно, допустим, что $\tau_1 \tau_2 \leq \tau$. Согласно лемме 1 $E(A)^+$ является группой из R_p и $t = \tau : \tau_1 \in T_p(E(A)^+)$. Тогда $\tau_2 \leq t$. Значит, $\text{Mult } A \cong \text{Hom}(A, E(A)^+) \neq 0$. Отметим, что (поскольку в кольце из R_p p -ранга 1, не являющегося нуль-кольцом, нет делителей нуля) в качестве τ_1 и τ_2 могут участвовать любые p -типы из $T_p(A)$.

ЛЕММА 3. Пусть $A \in R_p$ – группа p -ранга 1. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- 1) A содержит элемент с наименьшей p -характеристикой;
- 2) A изоморфна аддитивной группе некоторого p -чистого подкольца кольца $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, содержащего кольцо $\mathbb{Z}$;
- 3) A содержит элемент с идемпотентной p -характеристикой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $a \in A \setminus pA$ – элемент с наименьшей p -характеристикой. Тогда $A = A(H_p(a)) \cong E(A)^+$, где $E(A)$ можно рассматривать как p -чистое подкольцо в $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ (лемма 2).

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна, так как в кольце из R_p с 1 имеем $H_p(1) = H_p(1)H_p(1)$.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $a \in A \setminus pA$ – элемент с идемпотентной p -характеристикой. Если $b \in A$, то $b = \xi a$ для некоторого $\xi \in H_p(a)$. Так как $\xi H_p(a) \subseteq H_p(a)$, то $H_p(a) \subseteq \xi^{-1} H_p(a) = H_p(\xi a)$, т.е. $H_p(a) \subseteq H_p(b)$ для любого $b \in A$.

В леммах 4, 5 и в теореме 6 используются идеи доказательств некоторых результатов § 96 из [1].

ЛЕММА 4. Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$, $B = \prod_{j \in J} B_j$, где A_i и B_j – квазиоднородные группы и $r_p(A_i) = 1$, $r_q(B_j) = 1$ для некоторых $p \in \Pi(A_i)$, $q \in \Pi(B_j)$. Тогда если $\eta: A \rightarrow B$ – ненулевой гомоморфизм, то для некоторого

$$p \in \Pi(A_i) \cap \Pi(B_j), \quad i \in I, \quad j \in J,$$

найдутся такие $\tau_1 \in T_p(A_i)$ и $\tau_2 \in T_p(B_j)$, что $\tau_1 \leq \tau_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдется $j \in J$, для которого композиция гомоморфизмов $A \rightarrow B \rightarrow B_j$ не равна нулю. Следовательно, можно считать, что $B = B_j$ – квазиоднородная группа p -ранга 1 для некоторого $p \in \Pi(B)$. Если $B \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$, то доказывать нечего. Пусть B – узкая группа и $\eta a \neq 0$ для $a \in A$. В силу квазиоднородности группы B можно считать, что $A_i \in R_p$. Запишем a в виде $a = (\dots, a_i, \dots)$, где $a_i \in A_i$. Соберем в одно слагаемое те A_i , для которых совпадают p -характеристики $H_p(a_i)$. Пусть

$$T_H = \prod_{H_p(a_i)=H} A_i.$$

Тогда $A = \prod_H T_H$. Сомножителей T_H не более чем $2^{2^{\aleph_0}}$ (группа $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ имеет мощность $2^{\aleph_0}$, а всякая группа из R_p p -ранга 1 изоморфна некоторой подгруппе группы $\widehat{\mathbb{Z}}_p$). Поэтому найдется конечный набор $H_1, \dots, H_k$, для которого

$$\eta T_{H_1}, \dots, \eta T_{H_k} \neq 0, \quad \text{но} \quad \eta \left(\prod' T_H \right) = 0$$

(штрих означает, что $H \neq H_1, \dots, H_k$). Представим a в виде $a = (\dots, a_H, \dots)$, где $a_H \in T_H$. Тогда $\eta a = \eta a_{H_1} + \dots + \eta a_{H_k}$. Если, например, $\eta a_{H_1} \neq 0$, то $\tau_p(\eta a_{H_1}) \geq \tau_p(a_{H_1})$, где $\tau_p(a_{H_1})$ входит в $T_p(A_i)$ любой группы из произведения T_{H_1} , а $\eta a_{H_1} \in B$.

Если $A \in R_p$ – p -однородная группа p -ранга 1 и $0 \neq a, b \in A$, то $fa = nb$ при некоторых $f \in E(A)$ и $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что A – q -однородная группа для каждого $q \in \Pi(A)$.

ЛЕММА 5. Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$, где каждая A_i – p -однородная группа p -ранга 1 для некоторого $p \in \Pi(A_i)$ (возможно, p зависит от A_i). Тогда если G – квазиоднородное прямое слагаемое q -ранга 1 при некотором $q \in \Pi(G)$, то G – q -однородная группа и найдется группа A_i со свойством $\tau_q(G) = \tau_q(A_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $p \in \Pi(A)$ соберем группы A_i одного и того же p -типа τ и p -ранга 1 так, чтобы каждая группа A_i соответствовала только одной паре (p, τ) ; обозначим через

$$A_\tau = \prod_{\tau_p(A_i)=\tau} A_i$$

произведение таких групп A_i ; групп в этом произведении не более чем $2^{2^{\aleph_0}}$. Можно считать, что $G \not\cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$ ни для какого p . Поэтому G – узкая группа. Следовательно,

для проекции

$$\pi: A \rightarrow G, \quad A = G \oplus C,$$

найдется не более чем конечное число ненулевых образов πA_{τ_s} , где $s = 1, \dots, k$, а произведение остальных групп A_τ гомоморфизм π переводит в нуль. Значит, это произведение содержится в C и

$$A_{\tau_1} \oplus \dots \oplus A_{\tau_k} = G \oplus C'$$

для некоторой подгруппы $C' \subseteq C$. Если $\theta_s: A \rightarrow A_{\tau_s}$ – проекции, $s = 1, \dots, k$, то $\theta_s G \neq 0$ при некотором s . Получается ненулевая композиция гомоморфизмов $A_{\tau_s} \xrightarrow{\pi} G \xrightarrow{\theta_s} A_{\tau_s}$. Отсюда сразу следует, что G – p -однородная группа p -типа $\tau_s \in T_p(A_i)$, где A_i – любая группа из произведения A_{τ_s} . Согласно замечанию перед леммой $\tau_q(G) = \tau_q(A_i)$.

ТЕОРЕМА 6. 1. Если

$$A = \prod_{\tau} A_{\tau} = \prod_{\tau} B_{\tau} \in R_p,$$

где A_{τ} и B_{τ} – прямые произведения p -однородных p -типа τ групп p -ранга 1, а τ пробегает различные p -типы, то $A_{\tau} \cong B_{\tau}$ для каждого τ .

2. Пусть

$$A_{\tau} = \prod_{i \in I} A_i = \prod_{j \in J} B_j,$$

где A_i – p -однородные p -типа τ группы p -ранга 1, а B_j – квазиоднородные группы p -ранга 1. Тогда все группы B_j p -однородны и имеют p -тип τ . Более того, при одном из следующих условий:

1) справедлива обобщенная гипотеза континуума;

2) $A_i \not\cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$ для каждого i , а множество I неизмеримо,

выполняется равенство $|I| = |J|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $\pi_{\tau}: A \rightarrow A_{\tau}$ и $\rho_{\tau}: A \rightarrow B_{\tau}$ – проекции. В силу леммы 4 $A_{\tau} \subseteq \prod_{s \geq \tau} B_s$. Элемент $a_{\tau} \in A_{\tau}$ запишем в виде

$$a_{\tau} = b_{\tau} + c_{\tau}, \quad \text{где } b_{\tau} \in B_{\tau}, \quad c_{\tau} \in \prod_{s > \tau} B_s.$$

Снова по лемме 4 $\pi_{\tau} c_{\tau} = 0 = \rho_{\tau} c_{\tau}$. Откуда $a_{\tau} = \pi_{\tau} a_{\tau} = \pi_{\tau} b_{\tau}$ и $b_{\tau} = \rho_{\tau} b_{\tau} = \rho_{\tau} a_{\tau}$. Таким образом, композиция гомоморфизмов $A_{\tau} \xrightarrow{\rho_{\tau}} B_{\tau} \xrightarrow{\pi_{\tau}} A_{\tau}$ есть тождественное отображение группы A_{τ} . Согласно лемме 5 все B_j – p -однородные группы, поэтому в силу симметрии получаем изоморфизм $A_{\tau} \cong B_{\tau}$.

2. Если множество I конечно, то $|I| = r_p(A_{\tau}) = |J|$. Допустим, что I – бесконечное множество. Тогда, если выполняется условие 1), из равенств $2^{|I|} = |A_{\tau}| = 2^{|J|}$ (надо учесть, что $|A_i|, |B_j| \leq 2^{\aleph_0}$) следует равенство $|I| = |J|$. Если выполняется условие 2), то, учитывая узкость групп A_i и что равенство $2^{|I|} = 2^{|J|}$ при неизмеримом I влечет неизмеримость J , для каждой группы $R \cong A_i$ получаем

$$\text{Hom}(A_{\tau}, R) \cong \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(A_i, R) \cong \bigoplus_{j \in J} \text{Hom}(B_j, R).$$

Согласно лемме 1 последние прямые суммы имеют p -ранги $|I|$ и $|J|$ соответственно.

Если A – сепарабельная группа без кручения, то через $\Omega(A)$ обозначим множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы A .

ТЕОРЕМА 7. *Сепарабельная группа без кручения A является нильгруппой тогда и только тогда, когда*

$$t_1 t_2 \not\leq t \quad \text{для любых } t_1, t_2, t \in \Omega(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся изоморфизмом $\text{Mult } A \cong \text{Hom}(A \otimes A, A)$. Если A – сепарабельная группа с указанным свойством на $\Omega(A)$, то $t^2 \neq t$ для любого $t \in \Omega(A)$. Поэтому соответствующие подгруппы A_i ранга 1 являются нильгруппами, в частности, группа A редуцированная. Пусть $a \in A \otimes A$, элемент a представим в виде конечной суммы

$$a = \sum (a_i \otimes b_i), \quad \text{где } a_i, b_i \in A.$$

Элементы a_i и b_i можно вложить в прямую сумму $A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ групп ранга 1, являющуюся прямым слагаемым в A , $A = (A_1 \oplus \dots \oplus A_n) \oplus B$. Имеем

$$A \otimes A \cong \left(\bigoplus_{i,j=1}^n (A_i \otimes A_j) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n (A_i \otimes B) \oplus (B \otimes B) \right).$$

Переходя к изоморфной группе, считаем, что

$$a \in \bigoplus_{i,j=1}^n (A_i \otimes A_j).$$

Здесь каждая $A_i \otimes A_j$ является группой без кручения ранга 1 типа $t(A_i)t(A_j)$. Из проведенных рассуждений следует, что $\text{Hom}(A \otimes A, A) = 0$ (и, значит, $\text{Mult } A = 0$) тогда и только тогда, когда $t(A_i)t(A_j) \not\leq t(A_s)$ для любых (в том числе и одинаковых) прямых слагаемых A_i, A_j, A_s ранга 1 группы A .

Напомним, что группа без кручения A называется *связной* [1; § 88, упр. 17], если для всякой ее ненулевой чистой подгруппы B факторгруппа A/B делима; это эквивалентно тому, что A – квазиоднородная группа и $r_p(A) = 1$ для каждого $p \in \Pi(A)$.

Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$, где A_i – связные группы. Для $p \in \Pi(A)$ через $\Omega_p(A)$ обозначим множество

$$\Omega_p(A) = \{T_p(A_i) \mid A_i \in R_p, i \in I\}.$$

Если V и W – группы p -ранга 1 из R_p , то будем писать $T_p(V) \leq T_p(W)$, если $\tau_1 \leq \tau_2$ для некоторых $\tau_1 \in T_p(V)$ и $\tau_2 \in T_p(W)$ (это эквивалентно существованию ненулевых гомоморфизмов $V \rightarrow W$).

ТЕОРЕМА 8. *Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$, где A_i – связные редуцированные группы и для всех $i \in I$ и $p \in \Pi(A)$ множество*

$$J_i^{(p)} = \{j \in I \mid T_p(A_j) \leq T_p(A_i), p \in \Pi(A_i) \cap \Pi(A_j)\}$$

неизмеримо. Группа A является нильгруппой тогда и только тогда, когда для всех $p \in \Pi(A)$ и любых $\tau_1, \tau_2, \tau \in \Omega_p(A)$ выполняется неравенство $\tau_1 \tau_2 \not\leq \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся изоморфизмом $\text{Mult } A \cong \text{Hom}(A, E(A)^+)$. Если A – нильгруппа, то как ее прямые слагаемые все A_i являются нильгруппами; в частности, среди A_i не встречаются группы, изоморфные $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Имеем

$$E(A)^+ = \text{Hom}(A, A) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(A, A_i)$$

[1; теорема 43.2]. Зафиксируем $i \in I$ и выберем некоторый $p \in \Pi(A_i)$. Запишем A в виде

$$A = B_i \oplus C_i, \quad \text{где} \quad B_i = \prod_{j \in J} A_j, \quad C_i = \prod_{s \in I \setminus J} A_s,$$

$$J = \{j \in I \mid p \in \Pi(A_j) \text{ и } T_p(A_j) \leq T_p(A_i)\}.$$

В силу связности групп A_s из леммы 4 следует, что $\text{Hom}(C_i, A_i) = 0$. Поэтому $\text{Hom}(A, A_i) \cong \text{Hom}(B_i, A_i)$. А так как A_i – узкая группа, то

$$\text{Hom}(B_i, A_i) \cong \bigoplus_{j \in J} \text{Hom}(A_j, A_i)$$

[1; следствие 94.5]. Здесь по лемме 1 каждая группа $\text{Hom}(A_j, A_i)$ является связной, множество p -типов ненулевых элементов которой содержит p -тип $\tau_p^{(i)} : \tau_p^{(j)}$, где $\tau_p^{(i)} \in T_p(A_i)$, $\tau_p^{(j)} \in T_p(A_j)$ ($\tau_p^{(i)} \geq \tau_p^{(j)}$). Из вышесказанного следует, что $E(A)^+$ можно рассматривать как подгруппу прямого произведения таких связных групп. Поэтому вновь по лемме 4 $\text{Hom}(A, E(A)^+) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\tau_p^{(s)} \leq \tau_p^{(i)} : \tau_p^{(j)}$ или, эквивалентно, $\tau_p^{(j)} \tau_p^{(s)} \leq \tau_p^{(i)}$ для некоторых $i, j, s \in I$.

Если $A = \prod_{i \in I} A_i$ – векторная группа, где A_i – группы без кручения ранга 1, то положим

$$\Omega(A) = \{t(A_i) \mid i \in I\};$$

здесь $t(A_i)$ – тип группы A_i .

СЛЕДСТВИЕ 9 [7]. Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$ – такая векторная группа, где A_i – группы без кручения ранга 1 такие, что для каждого $i \in I$ множество

$$J_i = \{j \in I \mid t(A_j) \leq t(A_i)\}$$

неизмеримо. Группа A является нильгруппой тогда и только тогда, когда $t_1 t_2 \not\leq t$ для любых $t_1, t_2, t \in \Omega(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как в теореме 7, показывается, что группа A редуцированная, поэтому это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 8.

Отметим, что некоторые вопросы теории абелевых групп, связанные с рассматриваемыми в статье, изучались в [8]–[12].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 1, Мир, М., 1974; Т. 2, Мир, М., 1977.

- [2] А. М. Иванов, “Об одном свойстве p -сервантных подгрупп группы целых p -адических чисел”, *Матем. заметки*, **27**:6 (1980), 859–867.
- [3] А. Р. Чехлов, “О некоторых классах абелевых групп без кручения, близких к квазисервантно инъективным”, *Изв. вузов. Матем.*, 1985, № 8, 82–83.
- [4] А. Р. Чехлов, “Об абелевых группах без кручения, близких к квазисервантно инъективным”, *Абелевы группы и модули*, Томск, 1985, 117–127.
- [5] А. Р. Чехлов, “О прямых произведениях и прямых суммах абелевых $QCP1$ -групп без кручения”, *Изв. вузов. Матем.*, 1990, № 4, 58–67.
- [6] А. А. Фомин, “Тензорное произведение абелевых групп без кручения”, *Сиб. матем. журн.*, **16**:5 (1975), 1071–1080.
- [7] А. Р. Чехлов, “Об абелевых группах, все подгруппы которых являются идеалами”, *Вестник Томск. ун-та. Матем. и мех.*, 2009, № 3(7), 64–67.
- [8] А. Р. Чехлов, “О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **14**:6 (2008), 211–218.
- [9] А. Р. Чехлов, “Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:4 (2009), 942–953.
- [10] А. Р. Чехлов, “ E -нильпотентные и E -разрешимые абелевы группы класса 2”, *Вестник Томск. ун-та. Матем. и мех.*, 2010, № 1(9), 59–71.
- [11] А. Р. Чехлов, “Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов”, *Алгебра и логика*, **48**:4 (2009), 520–539.
- [12] А. Р. Чехлов, “О коммутаторно инвариантных подгруппах абелевых групп”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:5 (2010), 1163–1174.

А. Р. Чехлов

Томский государственный университет

E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Поступило

25.11.2009

Исправленный вариант

17.01.2011