Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Имомкулов, З. Ш. Ибрагимов, Плюриполярность графиков квазианалитических функций в смысле Гончара, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 637–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8643>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 04:57:19

Плюриполярность графиков квазианалитических функций в смысле Гончара

С. А. Имомкулов, З. Ш. Ибрагимов

Пусть f – функция, определенная и непрерывная на отрезке $\Delta = [a, b]$ действительной прямой $\mathbb{R}$, $\rho_n(f)$ – наименьшее отклонение функции f на отрезке Δ от рациональных функций степени не выше n :

$$\rho_n(f) = \inf_{\{r_n\}} \|f - r_n\|_{\Delta},$$

где $\|\cdot\|_{\Delta}$ – равномерная норма и нижняя грань берется в классе всех рациональных функций вида

$$r_n(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n}.$$

Как обычно, через $e_n(f)$ обозначим наименьшее отклонение функции f на Δ от полиномов степени $\leq n$. Очевидно, $\rho_n(f) \leq e_n(f)$ при любом $n = 0, 1, 2, \dots$.

В работах Гончара [1], [2] доказано, что класс функций

$$R(\Delta) = \left\{ f \in C(\Delta) : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho_n(f)} < 1 \right\}$$

обладает одним из важнейших свойств класса аналитических функций: если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho_n(f)} < 1$$

и $f(x) = 0$ на множестве $E \subset \Delta$ положительной логарифмической емкости, то $f(x) \equiv 0$, $x \in \Delta$.

По аналогии с классом

$$B(\Delta) = \left\{ f \in C(\Delta) : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e_n(f)} < 1 \right\},$$

который называется *классом квазианалитических функций Бернштейна* (см. [3]), класс $R(\Delta)$ мы назовем *классом квазианалитических функций Гончара*.

Хорошо известно, что функции, аналитические на отрезке Δ , характеризуются условиями

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e_n(f)} < 1$$

(теорема Бернштейна). Отсюда следует, что класс аналитических на отрезке Δ функций $A(\Delta)$ является подклассом классов $B(\Delta) \subset R(\Delta)$, т.е. $A(\Delta) \subset B(\Delta) \subset R(\Delta)$. Ясно, что $A(\Delta) \neq B(\Delta)$. В работе Гончара [1] показано, что существуют функции, для которых отклонения при приближении полиномами $e_n(f)$ стремятся к нулю сколь угодно медленно, в то время как $\rho_n(f)$ стремятся к нулю сколь угодно быстро. Отсюда, в частности вытекает, что

$$B(\Delta) \neq R(\Delta).$$

Нетрудно убедиться в том, что если $f \in A(\Delta)$, то ее график

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{C}^2 : x \in \Delta\}$$

является плюриполярным множеством в $\mathbb{C}^2$. В работе [4] Дидрих и Форнесс построили пример бесконечно дифференцируемой функции, график которой не является плюриполярным в $\mathbb{C}^2$. В недавней работе Комана, Левенберга и Полецкого [5] доказано, что если $f \in B(\Delta)$, то ее график Γ_f является плюриполярным в $\mathbb{C}^2$.

Мы докажем следующую более общую теорему.

ТЕОРЕМА. Если $f \in R(\Delta)$, то ее график Γ_f плюриполярен в $\mathbb{C}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию теоремы существует последовательность натуральных чисел n_k и соответствующая последовательность рациональных функций

$$r_{n_k} = \frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}$$

такие, что

$$\rho_{n_k}(f) = \|f - r_{n_k}\|_{\Delta} \leq \alpha^{n_k},$$

где α – некоторое фиксированное число, $0 < \alpha < 1$. Не нарушая общности, мы можем предполагать, что

$$\|f\|_{\Delta} \leq \frac{1}{2}, \quad \|p_{n_k}\|_{\Delta} \leq 1, \quad \|q_{n_k}\|_{\Delta} = 1.$$

Согласно неравенству Бернштейна–Уолша (см. [6])

$$|p_{n_k}(z)| \leq e^{n_k V(z, \Delta)}, \quad |q_{n_k}(z)| \leq e^{n_k V(z, \Delta)}$$

для любых $z \in \mathbb{C}$ и $k \in \mathbb{N}$. Здесь $V(z, \Delta)$ – функция Грина дополнения к отрезку Δ с полюсами в ∞ (она равна $\ln|z + \sqrt{z^2 - 1}|$, если $[a, b] = [-1, 1]$).

Введем следующую вспомогательную последовательность плюрисубгармонических функций:

$$u_k(z, w) = \frac{1}{n_k} \ln |q_{n_k}(z) \cdot w - p_{n_k}(z)|, \quad (z, w) \in \mathbb{C}^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_k} \ln |q_{n_k}(z) \cdot w - p_{n_k}(z)| &\leq \frac{1}{n_k} \ln (|q_{n_k}(z) \cdot w| + |p_{n_k}(z)|) \\ &\leq \max \left\{ \frac{1}{n_k} \ln 2 |p_{n_k}(z)|, \frac{1}{n_k} \ln 2 |q_{n_k}(z) \cdot w| \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{1}{n_k} \ln |p_{n_k}(z)|, \frac{1}{n_k} \ln |q_{n_k}(z)| + \frac{1}{n_k} \ln |w| \right\} + \frac{\ln 2}{n_k}, \quad (z, w) \in \mathbb{C}^2. \end{aligned}$$

Отсюда мы получим оценку

$$u_k(z, w) \leq \max \left\{ V(z, \Delta), V(z, \Delta) + \frac{1}{n_k} \ln |w| \right\} + \frac{\ln 2}{n_k}.$$

Следовательно, последовательность плюрисубгармонических функций $u_k(z, w)$ локально равномерно ограничена сверху. Пусть

$$u(z, w) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} u_k(z, w).$$

Функция $u(z, w)$ также локально ограничена сверху,

$$u(z, w) \leq V(z, \Delta).$$

Обозначим через

$$u^*(z, w) = \overline{\lim}_{(z', w') \rightarrow (z, w)} u(z', w')$$

регуляризацию функции $u(z, w)$. Множество

$$E = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : u(z, w) < u^*(z, w)\}$$

является плюриполярным в $\mathbb{C}^2$ (см. [6], [7]).

Пусть теперь $(z, w) \in \Gamma_f$ – фиксированная точка. Тогда (отметим, что $q_n(z) \neq 0$ при $z \in \Delta$)

$$\begin{aligned} u(z, w) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln |q_{n_k}(z)|^{1/n_k} \left| w - \frac{p_{n_k}(z)}{q_{n_k}(z)} \right|^{1/n_k} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \alpha |q_{n_k}(z)|^{1/n_k} \\ &= \ln \alpha + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln |q_{n_k}(z)|^{1/n_k}. \end{aligned}$$

Если же $(z, w) \in (\Delta \times \mathbb{C}) \setminus \Gamma_f$, то

$$\begin{aligned} u(z, w) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \ln |q_{n_k}(z)w - p_{n_k}(z)| = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln |q_{n_k}(z)|^{1/n_k} \left| w - \frac{p_{n_k}(z)}{q_{n_k}(z)} \right|^{1/n_k} \\ &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln |q_{n_k}(z)|^{1/n_k}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что если в точке $z \in \Delta$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |q_{n_k}(z)|^{1/n_k} \neq 0,$$

то $(z, f(z))$ принадлежит плюриполярному множеству E . Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что множество

$$A = \left\{ z \in \Delta : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |q_{n_k}(z)|^{1/n_k} = 0 \right\} = \left\{ z \in \Delta : \lim_{k \rightarrow \infty} |q_{n_k}(z)|^{1/n_k} = 0 \right\}$$

полярно.

Положим

$$\vartheta_k(z) = \sup_{m \geq k} \ln |q_{n_m}(z)|^{1/n_m}, \quad \vartheta_k^*(z) = \overline{\lim}_{z' \rightarrow z} \vartheta_k(z'), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда $F_k = \{\vartheta_k(z) < \vartheta_k^*(z)\}$, $k \in \mathbb{N}$, – полярные множества. Субгармонические функции $\vartheta_k^*(z)$ монотонно убывают и сходятся к $-\infty$ на $A \setminus \bigcup_k F_k$.

Так как $\|q_{n_k}\|_\Delta = 1$, то отсюда легко вытекает, что функция $\lim_{k \rightarrow \infty} \vartheta_k^*(z)$ не равна тождественно $-\infty$. Таким образом, множество $A \setminus \bigcup_k F_k$ полярное и, следовательно, A является полярным множеством. Теорема доказана.

Добавление А. Садуллаева. В работе, на самом деле, доказано больше: пусть K – произвольный компакт в пространстве $\mathbb{C}^n$ и $f(z) \in C(K)$. Мы будем говорить, что $f(z)$ принадлежит *классу Гончара* $R(K)$, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k^{1/k}(f, K) < 1, \quad \rho_k(f, K) = \inf_{\{r_k\}} \|f - r_k\|_K,$$

где $\inf$ берется по всем рациональным функциям $r_k(z)$ степени $\leq k$. Из проведенных выше рассуждений вытекает следующая более общая теорема: если функция $f(z)$ принадлежит классу Гончара $R(K)$, то ее график $\Gamma_f = \{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^{n+1} : z \in K\}$ плюриполярен в $\mathbb{C}^{n+1}$.

Отметим, что плюриполярность графика Γ_f тесно связана с аналитичностью или с близкими к аналитичности свойствами функции $f(z)$. В работе Щербины [8] доказана аналитичность непрерывной в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функции $f(z)$, график которой плюриполярен в $\mathbb{C}^{n+1}$. В работе [9] построена голоморфная в единичном круге $U \subset \mathbb{C}$ и непрерывная вплоть до границы функция $f(z)$, график

$$\Gamma_f = \{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \overline{U}\},$$

которой не плюриполярен. Все это наводит на мысль, что для плюриполярности графиков главную роль играет свойство аналитичности или квазианалитичности функции. Тем более, в работах [5], [4] доказано, что квазианалитичность в смысле Донжуа также влечет за собой плюриполярность графика.

В работе [10] приведен пример лакунарного ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}$$

($\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = 1$, $n_k/n_{k+1} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$) такого, что график Γ_f функции f плюриразрежен в каждой граничной точке. Интересно было бы установить, является ли замыкание графиков бесконечно гладкой вплоть до границы функции

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^k} z^{k!}$$

плюриполярной в $\mathbb{C}^2$? Если рассмотреть ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k-1)!}} z^{k!},$$

то он будет плюриполярным, ибо $f(z)$ в замкнутом единичном круге квазианалитична в смысле Гончара.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Гончар, *Докл. АН СССР*, **100**:2 (1955), 205–208. [2] А. А. Гончар, *Изв. АН АрмССР. Матем.*, **6**:2-3 (1971), 148–159. [3] А. F. Timan, *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, Internat. Ser. Monogr. Pure Appl. Math., **34**, Pergamon Press, New York, 1963. [4] K. Diederich, J. E. Fornass, *Duke Math. J.*, **49**:4 (1982), 931–936. [5] D. Coman, N. Levenberg, E. A. Poletsky, *J. Amer. Math. Soc.*, **18**:2 (2005), 239–252. [6] А. Садуллаев, *Комплексный анализ – многие переменные – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **8**, ВИНТИ, М., 1985, 65–113. [7] А. С. Садуллаев, *Матем. сб.*, **119**:1 (1982), 96–118. [8] N. Shcherbina, *Acta Math.*, **194**:2 (2005), 203–216. [9] N. Levenberg, G. Martin, E. A. Poletskiy, *Indiana Univ. Math. J.*, **41**:2 (1992), 515–532. [10] А. С. Садуллаев, *УМН*, **36**:4 (1981), 53–105.

С. А. Имомкулов

Навоийский государственный
педагогический институт, Узбекистан
E-mail: sevdi@rambler.ru

Поступило

10.11.2009

Исправленный вариант

11.06.2010

З. Ш. Ибрагимов

Ургенчский государственный университет
им. Аль-Хорезми, Узбекистан
E-mail: z.ibragim@gmail.com