Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Семенчук, С. Н. Шевчук, Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 104–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8644>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:03:59

УДК 512.542

Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп

В. Н. Семенчук, С. Н. Шевчук

С помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп получена характеристика классов всех π -нильпотентных, π -замкнутых и π -разложимых конечных групп.

Библиография: 4 названия.

Важнейшую роль при изучении строения конечных групп играют силовские подгруппы. Так, например, хорошо известно, что группа G нильпотентна, если любая ее силовская подгруппа субнормальна в G . В теории классов конечных групп обобщением субнормальности является понятие обобщенной субнормальности ($\mathfrak{F}$ -достижимости), введенное Кегелем в работе [1]. В настоящей работе получена характеристика таких важнейших классов конечных групп, как π -замкнутые, π -нильпотентные, π -разложимые и др. с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если он замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация, замкнутая относительно фраттининовых расширений, называется *локальной* формацией. $\mathfrak{F}$ -Корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$ ($\mathfrak{F}$ – непустая формация) группы G называется пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Произведением классов групп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ называется класс групп $\mathfrak{FX}$, который состоит из всех групп G таких, что в G найдется нормальная $\mathfrak{F}$ -подгруппа N с условием $G/N \in \mathfrak{X}$.

Группа G называется *p -замкнутой* (*p -нильпотентной*), если ее силовская p -подгруппа (силовское p -дополнение) нормальна в G . Группа G называется *p -разложимой*, если она одновременно p -замкнута и p -нильпотентна.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Через π' обозначим дополнение к π во множестве всех простых чисел; если $\pi = \{p\}$, то вместо π' будем просто писать p' . Тогда $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p$ – класс всех p -нильпотентных групп, $\mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'}$ – класс всех p -замкнутых групп, $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p \cap \mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'}$ – класс всех p -разложимых групп, $\mathfrak{N} = \bigcap \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p$ – класс всех нильпотентных групп, где p пробегает все простые числа.

Группа G называется *π -нильпотентной* (*π -разложимой*), если она p -нильпотентна (p -разложима) для любого простого числа p из π . Класс всех π -нильпотентных

(π -разложимых) групп можно записать в виде

$$\bigcap_{p \in \pi} \mathfrak{G}_{p'} \mathfrak{G}_p \quad \left(\bigcap_{p \in \pi} (\mathfrak{G}_{p'} \mathfrak{G}_p \cap \mathfrak{G}_p \mathfrak{G}_{p'}) \right).$$

Группа G называется π -замкнутой, если она имеет нормальную π -холлову подгруппу. Тогда $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_{\pi'}$ – класс всех π -замкнутых групп.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Обозначим через I любое подмножество из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Пусть π_i, π_j – некоторые множества простых чисел, а $\mathfrak{G}_{\pi_i}, \mathfrak{G}_{\pi_j}$ – классы всех π_i - и π_j -групп соответственно. Обозначим

$$\mathfrak{H} = \bigcap_{(i,j) \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i} \mathfrak{G}_{\pi_j}, \quad \text{где } (i,j) \text{ пробегает все пары из } I.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем подгруппу H $\mathfrak{F}$ -достижимой в группе G , если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Для любой непустой формации $\mathfrak{F}$ множество всех $\mathfrak{F}$ -достижимых подгрупп произвольной группы G содержит множество всех субнормальных подгрупп группы G . Если же $\mathfrak{F}$ – непустая нильпотентная формация, то множество всех $\mathfrak{F}$ -достижимых подгрупп в точности совпадает с множеством всех субнормальных подгрупп для любой группы G .

Рассматриваются только конечные группы. Все другие определения и обозначения можно найти в монографии Шеметкова [2].

Нам потребуются следующие известные свойства $\mathfrak{F}$ -достижимых подгрупп.

ЛЕММА 1 [3]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Пусть H и N – подгруппы группы G , причем N нормальна в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если H – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G , то HN – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G , а HN/N – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G/N ;
- 2) если $N \subseteq H$, то H является $\mathfrak{F}$ -достижимой подгруппой в G тогда и только тогда, когда H/N – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G/N .

ЛЕММА 2 [3]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Если H $\mathfrak{F}$ -достижима в K , а K $\mathfrak{F}$ -достижима в G , то H – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G .

Напомним, что $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G , $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков всех групп из $\mathfrak{F}$.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$ – наследственная локальная формация. Группа G ($\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{X})$) тогда и только тогда принадлежит формации $\mathfrak{X}$, когда любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{X}$ -достижима в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X}$ – наследственная формация, то любая подгруппа из G $\mathfrak{X}$ -достижима в G .

Достаточность. Пусть p – произвольное простое число из $\pi(G)$ и G_p – силовская подгруппа группы G . Так как $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}$ – локальная формация, то $G_p \in \mathfrak{X}$.

Согласно условию G_p $\mathfrak{X}$ -достижима в G . Если $G = G_p$, то $G \in \mathfrak{X}$. Пусть G_p – собственная подгруппа группы G . Тогда в G найдется собственная подгруппа H , содержащая G_p , такая, что либо $G^{\mathfrak{X}} \subseteq H$, либо H – нормальная подгруппа G . Покажем, что для H условия леммы выполнены. Действительно, пусть H_p – произвольная силовская подгруппа из H . Согласно теореме Силова H_p содержится в некоторой силовской подгруппе G_p группы G . По условию G_p $\mathfrak{X}$ -достижима в G . Так как $G_p \in \mathfrak{X}$, то H_p $\mathfrak{X}$ -достижима в G_p . А тогда по лемме 2 H_p $\mathfrak{X}$ -достижима в G , а значит, и в H . По индукции $H \in \mathfrak{X}$.

Если $G^{\mathfrak{X}} \subseteq H$, то ввиду наследственности формации $\mathfrak{X}$ выполнено $G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$, то отсюда $G \in \mathfrak{X}$. Пусть H – нормальная подгруппа G . Теперь ввиду того, что $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга, нетрудно показать, что $G \in \mathfrak{X}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс конечных групп. Обозначим через $\mathfrak{X}_\pi$ класс всех π -подгрупп из $\mathfrak{X}$.

ЛЕММА 4 [4]. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$ – наследственная формация, $\mathfrak{G}$ – класс всех групп. Тогда формация $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j) \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i} \mathfrak{X}_{\pi_j}$ совпадает с формацией $\mathfrak{X} \cap \left(\bigcap_{(i,j) \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i} \mathfrak{G}_{\pi_j} \right)$.

ЛЕММА 5. Пусть π_1 и π_2 – некоторые множества простых чисел и $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$. Группа $G(\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F}))$ тогда и только тогда принадлежит формации $\mathfrak{F}$, когда любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$ -достижима в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то любая подгруппа из G $\mathfrak{F}$ -достижима в G .

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация указанного вида и G – такая группа, у которой любая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$ -достижима в G . Индукцией по порядку G докажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Покажем, что для G/N условие теоремы выполнено. Действительно, всякая силовская подгруппа из G/N имеет вид $G_p N/N$, где G_p – силовская подгруппа из G . Согласно лемме 1 $G_p N/N$ – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G/N . По индукции, $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – локальная формация, то нетрудно заметить, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , причем $\Phi(G) = 1$, $G^{\mathfrak{F}} = N$.

Пусть G_p – произвольная силовская подгруппа группы G , где $p \in \pi(G)$. Согласно условию $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Так как $\mathfrak{F}$ – локальная формация, то отсюда следует, что $G_p \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $H = G_p N \in \mathfrak{F}$.

Предположим, что H – собственная подгруппа группы G . Покажем, что для H условия леммы выполнены. Действительно, пусть H_p – произвольная силовская подгруппа из H . Согласно теореме Силова H_p содержится в некоторой силовской подгруппе G_p группы G . По условию G_p $\mathfrak{F}$ -достижима в G . Так как $G_p \in \mathfrak{F}$, то H_p $\mathfrak{F}$ -достижима в G_p . А тогда по лемме 2 H_p $\mathfrak{F}$ -достижима в G , а значит, и в H . По индукции $H = G_p N \in \mathfrak{F}$. Итак, $G = G_p N$. Так как G_p $\mathfrak{F}$ -достижима в G , то в группе G найдется собственная подгруппа M , содержащая G_p , причем либо M нормальна в G , либо $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$. Если $N = G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$, то отсюда следует $G_p N \subseteq M$, что невозможно. Пусть теперь M – нормальная подгруппа G . Так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то $N \subseteq M$. Отсюда $G \subseteq M$, что невозможно.

Итак, $G_p N \in \mathfrak{F}$. Отсюда $G_p N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$. А это значит, что

$$G_p N / O_{\pi_1}(G_p N) \in \mathfrak{G}_{\pi_2}.$$

Рассмотрим два случая:

- 1) $N \cap O_{\pi_1}(G_p N) \neq 1$;
- 2) $N \cap O_{\pi_1}(G_p N) = 1$.

1) Пусть существует $p \in \pi(G)$ такое, что $N \cap O_{\pi_1}(G_p N) \neq 1$. Предположим, что N абелева. Тогда N – примарная группа. Следовательно, $N \in \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Пусть теперь N неабелева. В этом случае

$$N = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_t$$

есть прямое произведение изоморфных неабелевых простых групп. Так как $N \cap O_{\pi_1}(G_p N)$ – нормальная подгруппа из N , то

$$N \cap O_{\pi_1}(G_p N) = N_{i_1} \times N_{i_2} \times \cdots \times N_{i_n}.$$

Теперь из того факта, что $N \cap O_{\pi_1}(G_p N) \in \mathfrak{G}_{\pi_1}$, нетрудно заметить, что $N \in \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Так как $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$, то

$$G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}.$$

- 2) Предположим, что $N \cap O_{\pi_1}(G_p N) = 1$ для всех $p \in \pi(G)$. Отсюда следует, что

$$O_{\pi_1}(G_p N) \subseteq C_G(N).$$

Причем, если N – абелева группа, то $C_G(N) = N$, если N – неабелева группа, то $C_G(N) = 1$. Но тогда $O_{\pi_1}(G_p N) = 1$. Так как $G_p N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$, то отсюда следует, что $G_p N \in \mathfrak{G}_{\pi_2}$. А это значит, что $p \in \pi_2$ для любого p из $\pi(G)$. Отсюда получаем, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi_2}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$ – наследственная локальная формация, и пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j) \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i} \mathfrak{X}_{\pi_j}$. Группа G ($\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$) тогда и только тогда принадлежит формации $\mathfrak{F}$, когда любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$ -достижима в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то любая подгруппа из G $\mathfrak{F}$ -достижима в G .

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация указанного вида и G – такая группа, у которой любая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$ -достижима в G . Докажем, что $G \in \mathfrak{F}$.

- 1) Рассмотрим сначала случай, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп. Тогда

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j) \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i} \mathfrak{G}_{\pi_j}, \quad \text{где } (i, j) \text{ пробегает все пары из } I.$$

Так как по условию теоремы любая силовская подгруппа группы G $\mathfrak{F}$ -достижима в G , то, очевидно, что она $\mathfrak{G}_{\pi_i} \mathfrak{G}_{\pi_j}$ -достижима в G , где (i, j) пробегает все пары из I . По лемме 5 $G \in \mathfrak{G}_{\pi_i} \mathfrak{G}_{\pi_j}$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

- 2) Пусть теперь $\mathfrak{X}$ – произвольная наследственная локальная формация и $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$. По лемме 3 получаем, что G принадлежит $\mathfrak{X}$. Согласно лемме 4

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j) \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i} \mathfrak{X}_{\pi_j} = \mathfrak{X} \cap \left(\bigcap_{(i,j) \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i} \mathfrak{G}_{\pi_j} \right).$$

Пусть G_p – произвольная силовская подгруппа группы G . Так как $G \in \mathfrak{X}$ и G_p – $\mathfrak{F}$ -достижимая в G подгруппа, то нетрудно показать, что $G_p \cap \bigcap_{(j,j) \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i} \mathfrak{G}_{\pi_j}$ -достижимая в G подгруппа. По доказанному выше $G \in \bigcap_{(j,j) \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i} \mathfrak{G}_{\pi_j}$. Так как $G \in \mathfrak{X}$, то $G \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j) \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i} \mathfrak{G}_{\pi_j}$. Группа G ($\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$) тогда и только тогда принадлежит формации $\mathfrak{F}$, когда любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$ -достижима в G .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс всех π -нильпотентных (p -нильпотентных) групп. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$ -достижима в G .

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс всех π -замкнутых (p -замкнутых) групп. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$ -достижима в G .

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс всех π -разложимых (p -разложимых) групп. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$ -достижима в G .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. Н. Kegel, “Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten”, *Arch. Math. (Basel)*, **30**:3 (1978), 225–228.
- [2] Л. А. Шеметков, “Формации конечных групп”, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [3] А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников, В. Н. Семенчук, “О решетках подгрупп конечных групп”, *Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры*, Ин-т матем. АН Украины, Киев, 1993, 27–54.
- [4] В. Н. Семенчук, Л. А. Шеметков, “Сверхрадикальные формации”, *Докл. НАН Беларуси*, **44**:5 (2000), 23–25.

В. Н. Семенчук

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
г. Гомель

Поступило

30.09.2009

С. Н. Шевчук

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
г. Гомель

E-mail: sshauchuk@gmail.com