Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Р. Хаддади, Х. Мазахери, Наилучшее приближение в векторном пространстве, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 5, 788–793

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8649>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:14:58

Наилучшее приближение в векторном пространстве

М. Р. Хаддади, Х. Мазахери

В данной работе получены некоторые результаты относительного наилучшего f -приближения в фактор-пространствах по векторным пространствам и определены условия, при которых свойство f -проксимальности можно перенести на фактор пространства и обратно. Также, в заключение, рассмотрено соотношение между подмножеством f -приближений и линейными функционалами на пространстве X .

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Понятие наилучшего приближения в нормированных пространствах изучалось в многочисленных работах (см. [1]–[3]), а в работах [4], [5] были получены обобщения некоторых результатов на случай полунормированных пространств. Основной результат данной работы состоит в обобщении понятия наилучшего приближения в нормированном пространстве на случай векторного пространства.

Пусть X – топологическое векторное пространство, f – действительная функция на X , Y – замкнутое подпространство пространства X и $x \in X$.

Элемент $y_0 \in Y$ называется *наилучшим f -приближением* элемента $x \in Y$, если

$$f(x - y_0) = f(x - Y) = \inf\{f(x - y) : y \in Y\}.$$

Множество всех наилучших f -приближений элемента $x \in Y$ обозначим через $P_{Y,f}(x)$, и будем говорить, что Y является *f -проксимальным подпространством*, если $P_{Y,f}(x)$ – непустое множество для любого $x \in X$, и *f -чебышевым подпространством*, если $P_{Y,f}(x)$ – одноэлементное множество для любого $x \in X$.

Пусть Y – непустое замкнутое подмножество пространства X . Введем определение

$$\hat{Y}_f = \{x \in X : f(x) = f(x - Y)\} = P_{Y,f}^{-1}(\{0\}).$$

Мы будем изучать свойство f -приближаемости фактор-пространств. Также рассмотрим соотношения между f -приближением и линейными функционалами.

2. f -Приближение в фактор-пространствах. Пусть X – векторное пространство, f – некоторая симметричная функция (т.е. $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in X$) и M – непустое подпространство пространства X . Тогда фактор-пространство X/M снабжено соотношением

$$f(x + M) = \inf\{f(y) : y \in x + M\}, \quad 0_{X/M} = \{M\};$$

в случае, если W является подпространством пространства X , содержащим M , положим

$$\widehat{W/M} = \{x + M \in X/M : f(x + M) = f(x + M + W/M)\} = P_{X/M}^{-1}(0_{X/M}).$$

ЛЕММА 2.1. Пусть M – замкнутое подпространство пространства X и W – f -проксимальное подпространство пространства X , содержащее M . Тогда W/M – f -проксимальное подпространство фактор пространства X/M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $x \in X \setminus M$; тогда существует элемент $w_0 \in W$ такой, что w_0 – наилучшее f -приближение элемента x . Следовательно, для любого $w \in W$ имеем

$$f(x - w_0 + M) \leq f(x - w_0) \leq f(x - w).$$

Таким образом,

$$f(x - w + M) = \inf\{f(y) : y \in x - w + M\} \geq \inf\{f(y) : y \in x - W\} = f(x - w').$$

Так как $w + M \subseteq W$ для любого $w \in W$, то

$$f(x - w_0 + M) \leq f(x - w + M).$$

Следовательно, $w_0 + M \in P_{W/M, f}(x + M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть M – f -проксимальное подпространство пространства X , и W – подпространство пространства X , содержащее M . Если W/M – f -проксимальное подпространство фактор пространства X/M , то W – f -проксимальное подпространство пространства X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in X$, то существует элемент $w_0 \in W$ такой, что для любого $w \in W$ выполнено $f(x - w_0 + M) \leq f(x - w + M)$. Так как M – f -проксимальное подпространство, существует элемент $m_0 \in M$ такой, что

$$f((x - w_0) - m_0) = f((x - w_0) + M).$$

Тогда для любого $w \in W$ имеем

$$f(x - (m_0 + w_0)) \leq f(x - w + M).$$

Таким образом, $f(x - (m_0 + w_0)) \leq f(x - W)$ и, следовательно, $m_0 + w_0 \in P_{W, f}(x)$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть M – f -чебышево подпространство пространства X и W – подпространство пространства X , содержащее M . Если W/M – f -чебышево подпространство фактор пространства X/M , то W – f -чебышево подпространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2.2 следует, что W – f -проксимальное подпространство. Если $x \in X \setminus W$ и $y_1, y_2 \in P_{W, f}(x)$, то из леммы 2.1 следует, что $y_1 + M, y_2 + M \in P_{W/M, f}(x + M)$ и, так как W/M – f -чебышево подпространство, то $y_1 - y_2 \in M$.

Также, поскольку $M \subseteq W$, то при $i = 1, 2$ имеем

$$f(x - y_i) = f(x - y_i + W) \leq f(x - y_i + M) \leq f(x - y_i).$$

Следовательно,

$$f(x - y_i) = f(x - y_i + M),$$

и

$$f(x - y_2 - (y_2 - y_1)) = f(x - y_1 + M).$$

Таким образом, $0 \in P_{M,f}(x - y_2)$ и $y_1 - y_2 \in P_{M,f}(x - y_2)$, так как M – f -чебышево подпространство и, следовательно, $y_1 = y_2$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть M – замкнутое подпространство пространства X и W – f -чебышево подпространство пространства X , содержащее M . Тогда W/M – f -чебышево подпространство фактор подпространства X/M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.1 следует, что W/M – f -проксимальное подпространство. Предположим, что $x + M \in (X/M) \setminus (W/M)$ – некоторый произвольный элемент и $y_1 + M, y_2 + M \in P_{W/M,f}(x + M)$. В силу доказательства предложения 2.2 существуют $m_1, m_2 \in M$ такие, что $m_i + y_i \in P_{W,f}(x)$ при $i = 1, 2$. Так как W – f -чебышево подпространство, выполняется равенство $m_1 + y_1 = m_2 + y_2$, и, таким образом, $y_1 + M = y_2 + M$.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть M – замкнутое подпространство пространства X , $\pi: X \rightarrow X/M$ – некоторое каноническое отображение и W – f -проксимальное подпространство пространства X , содержащее M . Тогда

$$\pi(P_{W,f}(x)) \subseteq P_{W/M,f}(x + M)$$

для всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.1 следует, что $\pi(w_0) = w_0 + M \in P_{W/M,f}(x + M)$ для любого $w_0 \in P_{W,f}(x)$. Тогда $\pi(P_{W,f}(x)) \subseteq P_{W/M,f}(x + M)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Пусть M – f -проксимальное подпространство пространства X и W – f -проксимальное подпространство пространства X , содержащее M . Если $\pi: X \rightarrow X/M$ – некоторое каноническое отображение, то

$$\pi(P_{W,f}(x)) = P_{W/M,f}(x + M)$$

для любого $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $w_0 + M \in P_{W/M,f}(x + M)$, то $f(x - w_0 + M) \leq f(x - w + M)$ для любого $w \in W$, и существует некоторое $m_0 \in M$ такое, что $f(x - w_0 + m_0) = f(x - w + M)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} f(x - w_0 + m_0) &= f(x - w_0 + M) \leq f(x - w + M) \leq f(x - W) \\ \implies w_0 + m_0 &\in P_{W,f}(x), \end{aligned}$$

и так как $\pi(w_0 + m_0) = w_0 + M$, то $P_{W/M,f}(x + M) \subseteq \pi(P_{W,f}(x))$.

Таким образом, из теоремы 2.5 следует, что $\pi(P_{W,f}(x)) = P_{W/M,f}(x + M)$.

Далее приведем несколько примеров подпространств f -приближений.

ПРИМЕР 2.7. Пусть $X = \mathbb{R}^3$ и W, M – два подпространства пространства X таких, что

$$W = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad M = \{(t, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\},$$

и $f(x, y, z) = \min\{|x|, |y|, |z|\}$. Тогда W/M – f -проксимальное подпространство и, для любого $k \in \mathbb{R}^3$ имеем $P_{W/M, f}(k + M) = X/M$, а также $\widehat{W/M}_f = X/M$.

ПРИМЕР 2.8. Пусть $X = \mathbb{R}^3$ и W, M – два подпространства пространства X таких, что

$$W = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad M = \{(t, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\},$$

и $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Тогда W/M – f -проксимальное подпространство, и для любого $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$, если $y = (y_1, y_2, y_3) + M \in P_{W/M, f}(k + M)$, то имеем $f((k + M) - (y + M)) = f(k + M - W/M)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} f(k + M - W/M) &= \inf_{v \in W} f(k - v + M) = \inf_{v \in w} \inf_{z \in M} f(k - v + z) \\ &= \inf_{v_1, v_2 \in \mathbb{R}} \inf_{z_1 \in \mathbb{R}} (k_1 - v_1 + z_1)^2 + (k_2 - v_2)^2 + k_3^2 \\ &= \inf_{v_2 \in \mathbb{R}} (k_2 - v_2)^2 + k_3^2 = k_3^2, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} f(k - y + W/M) &= \inf_{z_1 \in \mathbb{R}} (k_1 - y_1 - z_1)^2 + (k_2 - y_2)^2 + (k_3 - y_3)^2 \\ &= (k_2 - y_2)^2 + (k_3 - y_3)^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} P_{W/M, f}(k + M) &= \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : (k_2 - y_2)^2 + (k_3 - y_3)^2 = k_3^2\}, \\ \widehat{W/M}_f &= \{0_{X/M}\}. \end{aligned}$$

3. Связь между f -приближением и линейными функционалами. В данном разделе рассматривается связь между подмножеством f -приближений и линейными функционалами на X . Пусть X – топологическое векторное пространство, f – неотрицательная функция на X такая, что $f(\alpha x) = |\alpha|f(x)$ для любого скалярного α и $x \neq 0$. Тогда $f(x) \neq 0$. Для линейного функционала Λ на X определим следующую величину:

$$\delta_f(\Lambda) = \sup\{|\Lambda(x)| : f(x) = 1, x \in X\}.$$

ЛЕММА 3.1. Пусть M – замкнутое подпространство пространства X . Тогда для любого $x \in X \setminus Y$ существует функционал $\Lambda \in X^*$ такой, что

$$\delta_f(\Lambda) = 1, \quad |\Lambda(x)| = f(x - M), \quad \Lambda|_M = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $x \in XY$. Для любого скалярного α и $y \in M$ определим $\Lambda_0(y + \alpha x) = \alpha f(x - M)$. Тогда Λ_0 – линейный функционал на $M + \langle x \rangle$ такой, что $\Lambda_0(x) = f(x - M)$ и $\Lambda_0(y) = 0$ для любого $y \in M$. Следовательно, для любого скалярного $\alpha \neq 0$ и $y \in M$ имеем

$$|\Lambda_0(y + \alpha x)| = |\alpha|f(x - M) = f(\alpha x - M).$$

Поэтому $\delta_f(\Lambda_0) \leq 1$, а также

$$f(x - M) = |\Lambda_0(x - y)| \leq \delta_f(\Lambda_0)f(x - y)$$

для любого $y \in M$, и таким образом,

$$f(x - M) \leq \delta_f(\Lambda_0)f(x - M).$$

Тогда $\delta_f(\Lambda_0) \geq 1$ и, следовательно, $\delta_f(\Lambda_0) = 1$. Наконец, в качестве Λ можно взять любое продолжение Хана–Банаха функционала Λ_0 на X .

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть M – замкнутое подпространство пространства X , $x \in X \setminus Y$ и $g_0 \in M$. Тогда $g_0 \in P_{M,f}(x)$ тогда и только тогда, если существует $\Lambda \in X^*$ такой, что

$$\delta_f(\Lambda) = 1, \quad |\Lambda(x - g_0)| = f(x - g_0), \quad \Lambda|_M = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует $\Lambda \in X^*$ такой, что

$$\delta_f(\Lambda) = 1, \quad |\Lambda(x - g_0)| = f(x - g_0), \quad \Lambda|_M = 0.$$

Также пусть $f(x - g_0) = |\Lambda(x - g_0)| = |\Lambda(x - g)|$ для любого $g \in M$. Тогда

$$|\Lambda(x - g)| \leq \delta_f(\Lambda)f(x - g) = f(x - g).$$

Таким образом, $f(x - g_0) \leq f(x - g)$, и поэтому $g_0 \in P_{M,f}(x)$.

Обратно, предположим, что $g_0 \in P_{M,f}(x)$ и, следовательно, $f(x - g_0) = f(x - M)$. Тогда, в силу леммы 3.1 существует $\Lambda \in X^*$ такой, что

$$\delta_f(\Lambda) = 1, \quad |\Lambda(x - g_0)| = f(x - g_0), \quad \Lambda|_M = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть M – замкнутое подпространство пространства X , Y – подмножество M и $x \in X \setminus M$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- i) $Y \subseteq P_{M,f}(x)$;
- ii) существует $\Lambda \in X^*$ такой, что $\delta_f(\Lambda) = 1$, $\Lambda|_M = 0$ и $|\Lambda(x - g)| = f(x - g)$ для любого $g \in Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) $\Rightarrow$ ii). Предположим, что $Y \subseteq P_{M,f}(x)$. Рассмотрим $g_0 \in Y$. Тогда существует $\Lambda_{g_0} \in X^*$ такой, что

$$\delta_f(\Lambda_{g_0}) = 1, \quad |\Lambda_{g_0}(x - g_0)| = f(x - g_0), \quad \Lambda_{g_0}|_M = 0.$$

Теперь для любого $g \in M$ имеем

$$|\Lambda_{g_0}(x - g)| = |\Lambda_{g_0}(x - g_0)| = f(x - g_0) = f(x - M) = f(x - g)$$

и, следовательно, утверждение (ii) выполнено.

ii) $\Rightarrow$ i). Это утверждение тривиально.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть M есть замкнутое подпространство пространства X и $y_0 \in M$, $x \in X \setminus M$. Тогда

$$y_0 \in P_{M,f}(x) \iff f(x - y_0)|_{M^\perp} = f(x - y_0),$$

где

$$f(x - y_0)|_{M^\perp} = \sup\{|\Lambda(x - y_0)| : \delta_f(\Lambda) = 1, \Lambda \in M^\perp\}$$

и аннулятором подмножества Y является множество

$$M^\perp = \{\Lambda : \Lambda : X \xrightarrow{\text{лин}} \mathbb{R} : \Lambda|_M = 0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $y_0 \in P_{M,f}(x)$. Из теоремы 3.2 следует, что существует линейный функционал $\Lambda \in X^*$ такой, что

$$\delta_f(\Lambda) = 1, \quad |\Lambda(x - y_0)| = f(x - y_0), \quad \Lambda|_M = 0.$$

Поэтому $f(x - y_0) = |\Lambda(x - y_0)| \leq f(x - y_0)|_{M^\perp}$. Также если $\Lambda \in M^\perp$ и $\delta_f(\Lambda) = 1$, то $|\Lambda(x - y_0)| \leq f(x - y_0)$. Таким образом, $f(x - y_0)|_{M^\perp} \leq f(x - y_0)$.

Обратно, предположим, что $f(x - y_0)|_{M^\perp} = f(x - y_0)$. Так как $f(x - y)|_{M^\perp} \leq f(x - y)$ и $f(x - y)|_{M^\perp} = f(x - y_0)|_{M^\perp}$ для любого $y \in M$, то $f(x - y_0) \leq f(x - y)$ для любого $y \in M$ и, таким образом, $y_0 \in P_{M,f}(x)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. Franchetti, M. Furi, "Some characteristic properties of real Hilbert spaces", *Rev. Roumaine Math. Pures. Appl.*, **17** (1972), 1045–1048.
- [2] W. Light, W. Cheney, *Approximation Theory in Tensor Product Spaces*, Lecture Notes in Math., **1169**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [3] I. Singer, *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*, Grundlehren Math. Wiss., **171**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [4] H. Mazaheri, S.M. Moshtaghioun, "Some results on p -best approximation in vector spaces", *Bull. Iranian Math. Soc.*, **35**:1 (2009), 119–127.
- [5] H. Mazaheri, R. Kazemi, "The orthogonality in the locally convex spaces", *Taiwanese J. Math.*, **12**:5 (2008), 1101–1106.

М. Р. Хаддади

Yazd University, Иран

E-mail: haddadi83@math.int.ac.ir

Поступило

24.10.2009

Исправленный вариант

21.01.2010

Х. Мазахери

Yazd University, Иран

E-mail: hmazaheri@yazduni.ac.ir