Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, Одна экстремальная задача для многочленов, связанная с кодами и дизайнами, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 508–513

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm865>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:22:26

УДК 517.5

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ, СВЯЗАННАЯ С КОДАМИ И ДИЗАЙНАМИ

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

Решается одна экстремальная задача В. А. Юдина для алгебраических многочленов, связанная с кодами и дизайнами.

Библиография: 6 названий.

В связи с экстремальной задачей нахождения среди кодов дизайна наибольшего порядка В. А. Юдин [1] рассмотрел следующую экстремальную задачу для многочленов. Найти величину

$$B_s(\sigma) = \sup_{h \in H_s(\sigma)} \{ \lambda \in [-1, 1] : h(t) \geq 0, -1 \leq t \leq \lambda \}, \quad (1)$$

где $s \in \mathbb{N}$, $H_s(\sigma) = \{ h(t) = \sum_{\nu=1}^s \hat{h}_\nu P_\nu(t) : \hat{h}_\nu \geq 0 \}$, $\{P_\nu\}$ – система многочленов, ортогональная на $[-1, 1]$ относительно некоторой меры $d\sigma$, $P_\nu(1) = 1$. Им была получена оценка сверху для четного $s = 2q$:

$$B_{2q}(\sigma) \leq t_2(P_{q+1}),$$

где $1 > t_1(P_{q+1}) > t_2(P_{q+1}) > \dots > t_{q+1}(P_{q+1}) > -1$ – нули P_{q+1} , и в качестве экстремального многочлена был предложен многочлен

$$h_{2q}(t) = \frac{P_{q+1}^2(t)}{(t - t_1(P_{q+1}))(t - t_2(P_{q+1}))},$$

для которого не удалось доказать положительность коэффициентов Фурье.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{Q_\nu\}$ – система многочленов, ортогональная на $[-1, 1]$ относительно меры $(1+t) d\sigma$, $Q_\nu(1) = 1$. Тогда для нечетного $s = 2q+1$ справедлива оценка сверху

$$B_{2q+1}(\sigma) \leq t_2(Q_{q+1}). \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-00318) и Минобразования (проект № 97-0-1.4-78)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 3 из [1]. Пусть $t_k = t_k(Q_{q+1})$. Предположим обратное: существует многочлен $h \in H_{2q+1}(\sigma)$, неотрицательный на $[-1, \lambda]$, где $\lambda \in (t_2, 1]$. Тогда возможны 3 случая:

- 1) $\lambda \in [t_1, 1]$;
- 2) $\lambda \in (t_2, t_1)$ и $h(t_1) \geq 0$;
- 3) $\lambda \in (t_2, t_1)$ и $h(t_1) < 0$.

Из $\hat{h}_0 = 0$, $\hat{h}_1 \geq 0$, $P_0(t) = 1$ и $P_1(t) = \alpha t + 1 - \alpha$, где $\alpha > 1/2$ (так как $t_1(P_1) = (\alpha - 1)/\alpha \in (-1, 1)$), следует, что $\int_{-1}^1 h d\sigma = 0$ и $\int_{-1}^1 (\lambda - t)h d\sigma \leq 0$.

Воспользуемся квадратурной формулой Гаусса с фиксированным узлом [2]

$$\int_{-1}^1 h(t) d\sigma = A_0 h(-1) + \sum_{k=1}^{q+1} A_k h(t_k), \quad A_k > 0, \quad (3)$$

справедливой для многочленов h степени $2q + 2$. Тогда в случаях 1) и 2) имеем

$$0 = A_0 h(-1) + \sum_{k=1}^{q+1} A_k h(t_k),$$

где все слагаемые неотрицательны. Следовательно $h(-1) = 0$, $h(t_k) = 0$ ($k = \overline{1, q+1}$), при этом в точках t_k ($k = \overline{2, q+1}$) многочлен h в силу неотрицательности имеет по крайней мере двойные нули. Получили, что многочлен h степени $2q + 1$ имеет по крайней мере $1 + 2q + 1 = 2q + 2$ нулей, что невозможно.

В случае 3) напомним (3) для многочлена $(\lambda - t)h(t)$ степени $2q + 2$

$$0 \geq \int_{-1}^1 (\lambda - t)h(t) d\sigma = A_0(\lambda + 1)h(-1) + \sum_{k=1}^{q+1} A_k(\lambda - t_k)h(t_k),$$

где $(\lambda + 1)h(-1) \geq 0$, $(\lambda - t_k)h(t_k) \geq 0$ ($k = \overline{2, q+1}$) и $(\lambda - t_1)h(t_1) > 0$, что невозможно. Теорема доказана.

Отметим, что при доказательстве оценки (2) используется только равенство нулю нулевого и неотрицательность первого коэффициента Фурье. В качестве экстремального многочлена в оценке (2) может быть предложен многочлен

$$h_{2q+1}(t) = \frac{(1+t)Q_{q+1}^2(t)}{(t-t_1(Q_{q+1}))(t-t_2(Q_{q+1}))},$$

у которого нулевой и первый коэффициенты Фурье равны нулю (в силу ортогональности Q_{q+1} любому многочлену степени q).

Во многих случаях удается доказать принадлежность многочленов h_s к $H_s(\sigma)$ и тем самым установить точность приведенных оценок $B_s(\sigma)$. Основопологающей является следующая лемма, имеющая и самостоятельное значение.

ЛЕММА. Пусть $d_\nu = (\int_{-1}^1 P_\nu^2 d\sigma)^{-1}$, $t_k = t_k(P_{q+1})$,

$$\frac{P_{q+1}(t)}{(t-t_1)(t-t_2)} = \sum_{\nu=0}^{q-1} d_\nu a_\nu P_\nu(t).$$

Тогда

$$a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_{q-1} \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из тождества

$$\frac{1}{(t-t_1)(t-t_2)} = \frac{1}{t_1-t_2} \left(\frac{1}{t-t_1} - \frac{1}{t-t_2} \right)$$

и формулы Кристоффеля–Дарбу [3]

$$\sum_{\nu=0}^n d_\nu P_\nu(x) P_\nu(y) = C_n \frac{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)}{x-y}, \quad C_n > 0, \quad (4)$$

следует, что

$$a_\nu = B_q^{-1} (P_q(t_1) P_\nu(t_2) - P_\nu(t_1) P_q(t_2)), \quad \nu = \overline{0, q}, \quad a_q = 0, \quad (5)$$

где $B_q = -(t_1 - t_2) C_q P_q(t_1) P_q(t_2)$. Известно [3], что

$$\begin{aligned} P_i(t_1) &> 0, & i = \overline{0, q}, & P_i(t_2) \geq 0, \\ i = \overline{0, i_1-1}, & P_i(t_2) < 0, & i = \overline{i_1, q}, \end{aligned} \quad (6)$$

для некоторого $0 < i_1 \leq q$. Отсюда $B_q > 0$.

Покажем, что для $0 \leq i \leq j \leq q$ выполнено неравенство

$$P_j(t_1) P_i(t_2) \geq P_i(t_1) P_j(t_2). \quad (7)$$

Вначале установим неравенство

$$P_i(t_1) P_{i-1}(t_2) \geq P_{i-1}(t_1) P_i(t_2), \quad 0 < i \leq q. \quad (8)$$

Из (4) следует, что

$$P_i(t_1) P_{i-1}(t_2) - P_{i-1}(t_1) P_i(t_2) = \frac{t_1 - t_2}{C_{i-1}} \sum_{k=0}^{i-1} d_k P_k(t_1) P_k(t_2).$$

Отсюда и из (6) вытекает оценка

$$P_i(t_1) P_{i-1}(t_2) - P_{i-1}(t_1) P_i(t_2) \geq 0, \quad 0 < i \leq i_1,$$

и

$$\begin{aligned}
P_i(t_1)P_{i-1}(t_2) - P_{i-1}(t_1)P_i(t_2) &\geq \frac{t_1 - t_2}{C_{i-1}} \sum_{k=0}^q d_k P_k(t_1)P_k(t_2) \\
&= \frac{C_q}{C_{i-1}} (P_{q+1}(t_1)P_q(t_2) - P_q(t_1)P_{q+1}(t_2)) = 0, \quad i_1 < i \leq q.
\end{aligned}$$

Докажем (7) индукцией по $i = j, j-1, \dots, 0$. При $i = j$ неравенство (7) верно. Пусть оно верно при $0 < i \leq j$. Тогда, учитывая (6), (8), получим

$$\begin{aligned}
P_j(t_1)P_{i-1}(t_2) &= \frac{P_j(t_1)}{P_i(t_1)} P_i(t_1)P_{i-1}(t_2) \geq \frac{P_j(t_1)}{P_i(t_1)} P_{i-1}(t_1)P_i(t_2) \\
&= \frac{P_{i-1}(t_1)}{P_i(t_1)} P_j(t_1)P_i(t_2) \geq \frac{P_{i-1}(t_1)}{P_i(t_1)} P_i(t_1)P_j(t_2) = P_{i-1}(t_1)P_j(t_2)
\end{aligned}$$

и неравенство (7) верно с $i-1$ вместо i .

Из (4), (5), учитывая $P_\nu(1) = 1$, $P_{q+1}(t_k) = 0$ и (7), получим для $0 \leq \nu < q$

$$\begin{aligned}
\frac{B_q C_\nu C_q (a_\nu - a_{\nu+1})}{(1-t_1)(1-t_2)} &= C_q \frac{P_q(t_1) - P_{q+1}(t_1)}{1-t_1} C_\nu \frac{P_\nu(t_2) - P_{\nu+1}(t_2)}{1-t_2} \\
&\quad - C_\nu \frac{P_\nu(t_1) - P_{\nu+1}(t_1)}{1-t_1} C_q \frac{P_q(t_2) - P_{q+1}(t_2)}{1-t_2} \\
&= \sum_{j=0}^q d_j P_j(t_1) \sum_{i=0}^{\nu} d_i P_i(t_2) - \sum_{i=0}^{\nu} d_i P_i(t_1) \sum_{j=0}^q d_j P_j(t_2) \\
&= \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{j=\nu+1}^q d_i d_j (P_j(t_1)P_i(t_2) - P_i(t_1)P_j(t_2)) \geq 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_{q-1} \geq a_q = 0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если $P_i(t)P_j(t) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} p_{ijk} P_k(t)$, где $p_{ijk} \geq 0$, то $h_{2q} \in H_{2q}(\sigma)$ и, следовательно,

$$B_{2q}(\sigma) = t_2(P_{q+1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ТЕОРЕМА 3. Если

а) $Q_i(t)Q_j(t) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} q_{ijk} Q_k(t)$, где $q_{ijk} \geq 0$, и

б) $P_i(t)P_j(t) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} p_{ijk} P_k(t)$, где $p_{ijk} \geq 0$ и $P_\nu(-t) = (-1)^\nu P_\nu(t)$,

то $h_{2q+1} \in H_{2q+1}(\sigma)$ и, следовательно,

$$B_{2q+1}(\sigma) = t_2(Q_{q+1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_\nu(-1) = \varepsilon_\nu$. Известно [4], что $\operatorname{sgn} \varepsilon_\nu = (-1)^\nu$ и

$$Q_\nu(t) = \frac{2}{C_\nu(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1})} \sum_{i=0}^{\nu} d_i \varepsilon_i P_i(t) = \frac{2(P_{\nu+1}(t)\varepsilon_\nu - P_\nu(t)\varepsilon_{\nu+1})}{(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1})(1+t)}.$$

Отсюда

$$(1+t)Q_\nu(t) = \alpha_\nu P_\nu(t) + \beta_\nu P_{\nu+1}(t), \quad \alpha_\nu, \beta_\nu \geq 0. \quad (9)$$

а) Пусть $Q_i(t)Q_j(t) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} q_{ijk} Q_k(t)$, $q_{ijk} \geq 0$. По теореме 2

$$\frac{Q_{q+1}^2(t)}{(t-t_1(Q_{q+1}))(t-t_2(Q_{q+1}))} = \sum_{\nu=1}^{2q} \gamma_\nu Q_\nu(t), \quad \gamma_\nu \geq 0.$$

Отсюда и из (9) следует, что

$$h_{2q+1}(t) = \sum_{\nu=1}^{2q} \gamma_\nu (\alpha_\nu P_\nu(t) + \beta_\nu P_{\nu+1}(t)) = \sum_{\nu=1}^{2q+1} (\hat{h}_{2q+1})_\nu P_\nu(t), \quad (\hat{h}_{2q+1})_\nu \geq 0.$$

б) Пусть $P_i(t)P_j(t) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} p_{ijk} P_k(t)$, $p_{ijk} \geq 0$ и $P_\nu(-t) = (-1)^\nu P_\nu(t)$; $e_\nu = (\int_{-1}^1 Q_\nu^2(t)(1+t)d\sigma)^{-1}$. Тогда $\varepsilon_\nu = (-1)^\nu$,

$$\begin{aligned} Q_\nu(t) &= C_\nu^{-1} \sum_{i=0}^{\nu} d_i (-1)^{i+\nu} P_i(t) = \frac{P_\nu(t) + P_{\nu+1}(t)}{1+t}, \\ e_\nu &= \left(\int_{-1}^1 C_\nu^{-1} \sum_{i=0}^{\nu} d_i (-1)^{i+\nu} P_i(t) (P_\nu(t) + P_{\nu+1}(t)) d\sigma(t) \right)^{-1} = C_\nu. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть

$$\frac{Q_{q+1}(t)}{(t-t_1(Q_{q+1}))(t-t_2(Q_{q+1}))} = \sum_{k=0}^{q-1} e_k b_k Q_k(t) = \sum_{i=0}^{q-1} \delta_i P_i(t).$$

По лемме $b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_{q-1} \geq 0$. Отсюда и из (10) вытекает, что

$$\sum_{k=0}^{q-1} e_k b_k Q_k(t) = \sum_{k=0}^{q-1} b_k \sum_{i=0}^k d_i (-1)^{i+k} P_i(t) = \sum_{i=0}^{q-1} d_i P_i(t) \sum_{k=i}^{q-1} (-1)^{i+k} b_k$$

и $\delta_i = d_i \sum_{k=i}^{q-1} (-1)^{i+k} b_k = d_i (b_i - b_{i+1} + \dots) \geq 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{(1+t)Q_{q+1}^2(t)}{(t-t_1(Q_{q+1}))(t-t_2(Q_{q+1}))} = \sum_{i=0}^{q-1} \delta_i P_i(t) (P_{q+1}(t) + P_{q+2}(t)) \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} \delta_i \sum_{k=|q+1-i|}^{q+1+i} p_{i,q+1,k} P_k(t) + \sum_{i=0}^{q-1} \delta_i \sum_{k=|q+2-i|}^{q+2+i} p_{i,q+2,k} P_k(t) \\ &= \sum_{k=2}^{2q} P_k(t) \sum_{i=|q+1-k|}^{q-1} \delta_i p_{i,q+1,k} + \sum_{k=3}^{2q+1} P_k(t) \sum_{i=|q+2-k|}^{q-1} \delta_i p_{i,q+2,k} \\ &= \sum_{\nu=2}^{2q+1} (\hat{h}_{2q+1})_\nu P_\nu(t), \end{aligned}$$

где $(\hat{h}_{2q+1})_\nu \geq 0$. Теорема доказана.

Применим полученные результаты к некоторым семействам ортогональных многочленов. Рассмотрим многочлены Якоби [3] $\{P^{\alpha,\beta}_\nu\}$ ($d\sigma = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt$ ($\alpha, \beta > -1$), $Q_\nu = P^{\alpha,\beta+1}_\nu$). Известно [5], что $P^{\alpha,\beta}_i(t)P^{\alpha,\beta}_j(t) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} p^{\alpha,\beta}_{ijk} P_k(t)$, где $p^{\alpha,\beta}_{ijk} \geq 0$ при $\alpha \geq \beta \geq -1/2$; $P^{\alpha,\alpha}_\nu(-t) = (-1)^\nu P^{\alpha,\alpha}_\nu(t)$. Отсюда следует, что теорема 2 справедлива при $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, теорема 3 – при $\alpha \geq \beta + 1 > 0$ или $\alpha = \beta \geq -1/2$. (Интересно было бы доказать теорему 3 при $\beta < \alpha < \beta + 1$). Таким образом, полное решение задачи (1) получено для многочленов Гегенбауэра ($\alpha = \beta \geq -1/2$).

Теоремы 2 и 3 справедливы для некоторых семейств дискретных многочленов, например, многочленов Кравчука [4] $\{P_\nu(t) = K^{n,r}_\nu((n/2)(1-t))\}$ ($n, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $\sum_{d=0}^n (r-1)^d \binom{n}{d} K^{n,r}_i(d) K^{n,r}_j(d) = 0$ при $i \neq j$, $Q_\nu(t) = K^{n-1,r}_{\nu}(\frac{n}{2}(1-t))$), поскольку известно [4], что $K^{n,r}_i(d) K^{n,r}_j(d) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} p^{n,r}_{ijk} K^{n,r}_k(d)$, $p^{n,r}_{ijk} \geq 0$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $d\sigma = (1-t^2)^{(n-3)/2} dt$. Юдин [1] показал, что любой $\cos B_s(\sigma)$ -код C на сфере S^{n-1} (т.е. $\min_{x \neq y \in C} d(x, y) = \cos B_s(\sigma)$, $d(x, y) = \arccos xy$) является дизайном порядка, не превосходящего $s-1$ (общее понятия кода и дизайна см. в [6]). Поскольку в этом случае мере $d\sigma$ соответствуют многочлены Гегенбауэра $P^{(n-3)/2, (n-3)/2}_\nu$, то окончательно получаем следующий результат: любой $d_s(S^{n-1})$ -код $C \subset S^{n-1}$, где $d_{2q}(S^{n-1}) = \cos t_2(P^{(n-3)/2, (n-3)/2}_{q+1})$ и $d_{2q+1}(S^{n-1}) = \cos t_2(P^{(n-3)/2, (n-1)/2}_{q+1})$, является дизайном порядка, не превосходящего $s-1$.

Аналогичные результаты справедливы для многих FDNDF-полиномиальных по классификации Левенштейна [6] компактных метрических пространств. В частности, для пространства Хемминга $\mathbb{F}_r^n$ [6] имеет место следующее утверждение: любой $d_s(\mathbb{F}_r^n)$ -код $C \subset \mathbb{F}_r^n$, где $d_{2q}(\mathbb{F}_r^n) = \lceil t_2(K^{n,r}_{q+1}) \rceil$ и $d_{2q+1}(\mathbb{F}_r^n) = \lceil t_2(K^{n-1,r}_{q+1}) \rceil$ ($\lceil x \rceil$ – наименьшее целое число, превосходящее x), является дизайном порядка, не превосходящего $s-1$. В некоторых случаях эта оценка достигается. Например, поскольку $t_2(K^{n,2}_3) = n/2$ и $d_4(\mathbb{F}_2^n) = \lceil n/2 \rceil$, то для кодов Адамара [6] в $\mathbb{F}_2^n$ ($n = 4l$, $l \in \mathbb{N}$), являющихся $n/2$ -кодами и дизайнами порядка 3, имеем правильную оценку $3 \leq 3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Юдин В. А. Коды и дизайн // Дискретная матем. 1997. Т. 9. № 2. С. 3–11.
- [2] Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз, 1959.
- [3] Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
- [4] Левенштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. 1983. Т. 40. С. 43–110.
- [5] Gasper G. Linearization of the product of Jacobi polynomials. I // Canad. J. Math. 1970. V. 2. № 1. P. 171–175.
- [6] Levenshtein V. I. On designs in compact metric spaces and a universal bound on their size // Discrete Math. 1998. V. 192. P. 251–271.

Тулский государственный университет

E-mail: dvg@mechmat.tsu.tula.ru, ivi@mechmat.tsu.tula.ru

Поступило

20.10.1999