Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Авербух, Т. Кондерла, Непрерывная выпуклая MS-дифференцируемая функция не обязана быть HL-дифференцируемой, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 2, 163–171

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8652>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:35:24

Непрерывная выпуклая MS-дифференцируемая функция не обязана быть HL-дифференцируемой

В. Авербух, Т. Кондерла

На локально выпуклом пространстве строится пример непрерывной выпуклой функции, которая MS-дифференцируема в некоторой точке, но не является HL-дифференцируемой в этой точке.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Для отображений между топологическими векторными пространствами (ТВП) существует большое количество неэквивалентных определений дифференцируемости [1], [2]. Для непрерывных выпуклых функций на ТВП доказано следующее утверждение [3]: если некоторая функция дифференцируема по Гато в некоторой точке, то эта функция также будет дифференцируемой в этой точке в смысле Майкла–Бастияни (МВ-дифференцируемой). Заметим, что МВ-дифференцируемость сильнее, чем дифференцируемость в смысле Адамара (которую также называют компактной дифференцируемостью) и совпадает с ней в случае нормированных пространств. Возникает следующий вопрос: существуют ли другие дифференцируемости, совпадающие между собой в случае непрерывных выпуклых функций. Имеются по меньшей мере три интересных типа дифференцируемости: МВ-дифференцируемость, MS-дифференцируемость (в смысле Маринеску–Себастьяна э Сильва) и HL-дифференцируемость (в смысле Хайерса–Ленга), которые связаны между собой следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc} \text{HL} & \Rightarrow & \text{MS} & \Rightarrow & \text{MB} \\ & \nLeftarrow & & \nLeftarrow & \end{array}$$

(см. [2]). Давно известно (см., например, [4]), что

$$\text{MB} \not\Rightarrow \text{MS}$$

для непрерывных выпуклых функций (это соотношение имеет место уже для функций на нормированных пространствах, когда МВ-дифференцируемость сводится к компактной дифференцируемости, а MS-дифференцируемость сводится к Фреше-дифференцируемости). В настоящей работе показано, что

$$\text{MS} \not\Rightarrow \text{HL}$$

для непрерывных выпуклых функций. На ненормируемом локально выпуклом пространстве явно строится в точности непрерывная выпуклая функция, которая является MS-дифференцируемой в точке 0, но не является HL-дифференцируемой в этой точке. Здесь требование ненормируемости существенно, поскольку для нормированных пространств как MS-дифференцируемость, так и HL-дифференцируемость эквивалентны Фреше-дифференцируемости [2].

2. Определения и обозначения. В данной работе через X и Y мы обозначаем топологические векторные пространства (ТВП) над $\mathbb{R}$; через $Nb_0(X)$ обозначим множество всех замкнутых уравновешенных окрестностей нуля в X ; для линейных отображений l будем писать lx вместо $l(x)$. Для $t \in \mathbb{R}$ и $A \subset X$ имеем

$$tA := \{tx \mid x \in A\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *дифференцируемым* в некотором смысле в точке $x \in X$, если существует непрерывное линейное отображение $l: X \rightarrow Y$ (которое называется *производной* отображения f в точке x и обозначается как $f'(x)$) такое, что

$$f(x+h) = f(x) + lh + r(h),$$

где отображение r является малым в рассматриваемом смысле.

Отображение $r: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $r(0) = 0$, называется *MS-малым* (см. [2]), если для любой окрестности $V \in Nb_0(Y)$ существует окрестность $U \in Nb_0(X)$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U' \in Nb_0(X)$ такая, что (в дальнейшем $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$) выполнено

$$h \in U, \quad th \in U' \quad \Rightarrow \quad \frac{r(th)}{t} \in \varepsilon V. \quad (1)$$

Отображение r называется *HL-малым* (см. [2]), если для любой окрестности $V \in Nb_0(Y)$ существует окрестность $U \in Nb_0(X)$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что выполнена импликация

$$h \in U, \quad |t| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{r(th)}{t} \in \varepsilon V. \quad (2)$$

Из этого определения следует, что всякое малое (в некотором смысле) отображение дифференцируемо (в этом же смысле) в нуле и имеет нулевую производную.

Хорошо известно, что MS- и HL-производные определены однозначно.

Ясно, что при $Y = \mathbb{R}$ соотношения (1) и (2) сводятся к следующим соотношениям:

$$(MS) \quad \exists U \in Nb_0(X) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists U' \in Nb_0(X): \quad \left(h \in U, \quad th \in U' \Rightarrow \left| \frac{r(th)}{t} \right| \leq \varepsilon \right);$$

$$(HL) \quad \exists U \in Nb_0(X) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \left(h \in U, \quad |t| \leq \delta \Rightarrow \left| \frac{r(th)}{t} \right| \leq \varepsilon \right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть U – уравновешенное поглощающее подмножество в X , и пусть $r: X \rightarrow \mathbb{R}$ – отображение, удовлетворяющее условию $r(0) = 0$. Определим *U -крутизну* отображения r в точке $x \neq 0$ следующей формулой:

$$(\text{sl}_U r)(x) := \sup\{\alpha|r(x)| \mid \alpha > 0, \alpha x \in U\}.$$

(Так как U – поглощающее подмножество, то множество в фигурных скобках не пусто.)

Легко видеть, что

$$(\text{sl}_U r)(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } r(x) = 0, \\ \frac{|r(x)|}{\mu U(x)}, & \text{если } \mu U(x) > 0, \\ +\infty, & \text{если } r(x) \neq 0, \mu U(x) = 0; \end{cases} \quad (3)$$

здесь μU – функция Минковского множества U :

$$\mu U(x) := \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1}x \in U\}.$$

3. Некоторые леммы. Сначала докажем следующие характеристики MS- и HL-дифференцируемостей в терминах крутизны.

ЛЕММА 1. (1) *Отображение $r: X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $r(0) = 0$, является MS-малым тогда и только тогда, когда*

$$\exists U \in Nb_0(X) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists U' \in Nb_0(X): \quad (\text{sl}_U r)|_{U' \setminus \{0\}} \leq \varepsilon.$$

(2) *Отображение $r: X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $r(0) = 0$, является HL-малым тогда и только тогда, когда*

$$\exists U \in Nb_0(X) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad (\text{sl}_U r)|_{\delta U \setminus \{0\}} \leq \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В дальнейшем U и U' обозначают замкнутые уравновешенные окрестности нуля в пространстве X , а ε обозначает строго положительное число. Всюду ниже будем считать, что $t \neq 0$.

(1) Нужно проверить, что следующие условия эквивалентны:

$$(a) \quad \exists U \in Nb_0(X) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists U' \in Nb_0(X): \quad \left(h \in U, th \in U' \Rightarrow \left| \frac{r(th)}{t} \right| \leq \varepsilon \right),$$

$$(b) \quad \exists U \in Nb_0(X) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists U' \in Nb_0(X): \quad (h' \in U' \setminus \{0\} \Rightarrow (\text{sl}_U r)(h') \leq \varepsilon).$$

Пусть выполняется условие (a). Покажем, что $(\text{sl}_U r)(h') \leq \varepsilon$ для любого $h' \in U' \setminus \{0\}$. Если $r(h') = 0$, то это неравенство очевидно в силу определения U -крутизны. Пусть $r(h') \neq 0$. Для любого $\alpha > 0$ такого, что $\alpha^{-1}h' \in U$, выполняется неравенство

$$\frac{|r(h')|}{\alpha} \leq \varepsilon.$$

Действительно,

$$\frac{|r(h')|}{\alpha} = \left| \frac{r(\alpha(\alpha^{-1}h'))}{\alpha} \right|,$$

а в силу (a) имеем неравенство $\leq \varepsilon$, так как $\alpha^{-1}h' \in U$ и $\alpha(\alpha^{-1}h') \in U'$ и, следовательно, $\alpha \geq |r(h')|/\varepsilon$. Таким образом, из определения функции Минковского имеем $\mu U(h') \geq |r(h')|/\varepsilon$. Так как $r(h') \neq 0$, то $\mu U(h') > 0$ и, следовательно,

$$\frac{|r(h')|}{\mu U(h')} \leq \varepsilon,$$

откуда в силу (3) следует, что $(\text{sl}_U r)(h') \leq \varepsilon$.

Обратно, пусть выполняется условие (b), и пусть $h \in U$, $th \in U'$. Покажем, что

$$\left| \frac{r(th)}{t} \right| \leq \varepsilon.$$

Если $r(th) = 0$, то это соотношение очевидно. Пусть $r(th) \neq 0$ и, следовательно, $th \neq 0$ (так как $r(0) = 0$). Тогда $th \in U' \setminus \{0\}$ и, следовательно, в силу (b) имеем $(sl_U r)(th) \leq \varepsilon$. Таким образом, получим $\mu U(th) > 0$, поскольку в противном случае будет $(sl_U r)(th) = +\infty$ (см. (3)). Далее, имеем $\mu U(h) \leq 1$, так как $h \in U$. Таким образом,

$$\left| \frac{r(th)}{t} \right| \leq \frac{|r(th)|}{|t|\mu U(h)} = \frac{|r(th)|}{\mu U(th)} = (sl_U r)(th) \leq \varepsilon$$

(здесь мы воспользовались тем, что U – уравновешенное множество).

(2) Нужно проверить, что следующие условия эквивалентны:

$$(a) \quad \exists U \in Nb_0(X) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \left(h \in U, |t| \leq \delta \Rightarrow \left| \frac{r(th)}{t} \right| \leq \varepsilon \right),$$

$$(b) \quad \exists U \in Nb_0(X) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad (h' \in \delta U \setminus \{0\} \Rightarrow (sl_U r)(h') \leq \varepsilon).$$

Пусть выполняется условие (a). Покажем, что $h' \in \delta U \setminus \{0\}$. Рассмотрим два следующих случая.

Случай 1. Окрестность U не ограничена в направлении h' , т.е. $\beta h' \in U$ для сколь угодно большого $\beta > 0$. Тогда для любого $\beta \geq \delta^{-1}$ имеем

$$\beta h' \in U, \quad \beta^{-1} \leq \delta$$

и, следовательно, в силу (a)

$$\left| \frac{r(\beta^{-1}(\beta h'))}{\beta^{-1}} \right| \leq \varepsilon,$$

откуда следует, что

$$|r(h')| \leq \beta^{-1} \varepsilon.$$

Так как β – произвольно большое число, то мы приходим к выводу, что $r(h') = 0$ и, следовательно, $(sl_U r)(h') = 0 < \varepsilon$.

Случай 2. Окрестность U ограничена в направлении h' . Тогда существует точка $h \in U$ на границе U (U замкнуто!) такая, что $h' = \delta' h$ для некоторого строго положительного δ' (напомним, что $h' \neq 0$). Так как $h' \in \delta U$ и U является уравновешенным и замкнутым, то, следовательно, $\delta' \leq \delta$. Имеем

$$\mu U(h') = \mu U(\delta' h) = \delta' \mu U(h) = \delta' (> 0)$$

(так как $\mu U(h) = 1$) и, таким образом (см. (3)),

$$(sl_U r)(h') = \frac{|r(h')|}{\mu U(h')} = \left| \frac{r(\delta' h)}{\delta'} \right|,$$

что $\leq \varepsilon$ в силу условия (a).

Обратно, пусть выполняется условие (b), и пусть $h \in U$, $|t| \leq \delta$. Если $h = 0$, то условие (a) тривиально. Пусть $h \neq 0$. Тогда $th \in \delta U \setminus \{0\}$ и, следовательно,

$(\text{sl}_U r)(th) \leq \varepsilon$, так что (см. (3)) либо $r(th) = 0$ и условие (а) тривиально, либо $\mu U(th) > 0$ и, следовательно (см. (3)),

$$\varepsilon \geq \frac{|r(th)|}{\mu U(th)} = \frac{|r(th)|}{|t|\mu U(h)} \geq \left| \frac{r(th)}{t} \right|$$

(здесь мы воспользовались тем, что функция Минковского является положительно однородной, U – уравновешенное множество и $\mu U(h) \leq 1$ при $h \in U$); таким образом, условие (а) выполнено.

Следующая простая лемма гласит, что U -крутизна линейного функционала в каждой точке не превосходит наибольшего значения этого функционала на U .

ЛЕММА 2. Пусть x' – линейный функционал на X , U – некоторое поглощающее уравновешенное подмножество в X и $x'|_U \leq M$ ($M > 0$). Тогда

$$\text{sl}_U x' \leq M$$

всюду в $X \setminus \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $x \in X \setminus \{0\}$. Если $\mu U(x) = 0$, то подмножество U неограничено в направлении x и, следовательно, $x'(x) = 0$ (в противном случае x' будет неограничен на U). Итак, $(\text{sl}_U x')(x) = 0$ (см. (3)). Пусть $\mu U(x) > 0$. Так как U – поглощающее множество, то существует $\alpha > 0$ такое, что $\alpha^{-1}x \in U$. Следовательно,

$$(\text{sl}_U x')(x) = \frac{|x'(\alpha(\alpha^{-1}x))|}{\mu U(x)} = \frac{\alpha}{\mu U(x)} |x'(\alpha^{-1}x)| \leq \frac{\alpha}{\mu U(x)} M.$$

Так как $\mu U(x)$ – нижняя грань всех $\alpha > 0$ таких, что $\alpha^{-1}x \in U$, то получим

$$(\text{sl}_U x')(x) \leq M.$$

4. Основная лемма. Для построения примера нам понадобится следующее утверждение.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ – базис выпуклых уравновешенных замкнутых окрестностей нуля в X (так, что X – метризуемое локально выпуклое ТВП). Предположим, что существует счетное семейство

$$\{x_{nk}^*\}_{n,k \in \mathbb{N}}$$

непрерывных линейных функционалов x_{nk}^* на X таких, что числа

$$\alpha_{nk} := \sup_{U_1} x_{nk}^*, \quad \beta_{nk} := \sup_{U_n} x_{nk}^*, \quad \gamma_{nk} := \sup_{U_{n+1}} x_{nk}^*$$

удовлетворяют следующим условиям:

- (i) все α_{nk} , β_{nk} , γ_{nk} больше нуля;
- (ii) α_{nk} и β_{nk} не зависят от k :

$$\alpha_{nk} = \alpha_n, \quad \beta_{nk} = \beta_n;$$

- (iii) $\alpha_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
 (iv) для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_{nk} \downarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Тогда функция

$$r := \bigvee_{n,k \in \mathbb{N}} ((x_{nk}^* - \gamma_{nk}) \vee 0)$$

является MS-малой, но не является HL-малой (или, что эквивалентно, функция r будет MS-дифференцируемой в 0 (с нулевой производной), но не будет HL-дифференцируемой в 0).

Здесь $\bigvee_{\alpha} f_{\alpha}$ обозначает супремум семейства функций:

$$\left(\bigvee_{\alpha} f_{\alpha} \right)(x) := \sup_{\alpha} f_{\alpha}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Функция r является MS-малой. В силу леммы 1 достаточно показать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad (\text{sl}_{U_1} r)|_{U_n} \leq \varepsilon.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (\text{sl}_{U_1} r)|_{U_n} &= \text{sl}_{U_1}(r|_{U_n}) = \text{sl}_{U_1} \left(\left(\bigvee_{m,k \in \mathbb{N}} ((x_{mk}^* - \gamma_{mk}) \vee 0) \right) \Big|_{U_n} \right) \\ &= \text{sl}_{U_1} \left(\left(\bigvee_{\substack{m \geq n \\ k \in \mathbb{N}}} ((x_{mk}^* - \gamma_{mk}) \vee 0) \right) \Big|_{U_n} \right). \end{aligned}$$

Действительно,

$$x_{mk}^* - \gamma_{mk} = x_{mk}^* - \sup_{U_{m+1}} x_{mk}^* \leq 0 \quad \text{на} \quad U_{m+1}$$

и, следовательно,

$$((x_{mk}^* - \gamma_{mk}) \vee 0)|_{U_n} = 0 \quad \text{при} \quad m = 1, 2, \dots, n-1.$$

Из очевидной монотонности крутизны следует, что

$$(\text{sl}_{U_1} r)|_{U_n} \leq \text{sl}_{U_1} \left(\bigvee_{\substack{m \geq n \\ k \in \mathbb{N}}} |x_{mk}^*| \right) \Big|_{U_n} = \bigvee_{\substack{m \geq n \\ k \in \mathbb{N}}} \text{sl}_{U_1}(|x_{mk}^*|)|_{U_n} \leq \bigvee_{\substack{m \geq n \\ k \in \mathbb{N}}} \alpha_{mk},$$

где последнее неравенство выполняется в силу леммы 2 о крутизне линейного функционала. Но из условий (ii) и (iii) следует, что

$$\bigvee_{\substack{m \geq n \\ k \in \mathbb{N}}} \alpha_{mk} = \bigvee_{m \geq n} \alpha_m = \alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, условие (1) выполняется.

(2) Функция r не является HL-малой. В силу характеристики свойств HL-дифференцируемости (лемма 1) нам надо проверить, что

$$\forall n \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \delta U_n: (\text{sl}_{U_n} r)(x) \geq \varepsilon. \quad (4)$$

Пусть n задано. Мы утверждаем, что (4) выполняется при $\varepsilon = \beta_n/4$. (Напомним, что $\beta_n = \sup_{U_n} x_{nk}^*$ для любого k). Пусть дано δ . Так как $\gamma_{nk} \downarrow 0$ при $k \rightarrow 0$, то существует k такое, что

$$\gamma_{nk} \leq \delta \frac{\beta_n}{4}. \quad (5)$$

Выберем y на границе множества U_n (так что $\mu U_n(y) = 1$) такое, что

$$\frac{1}{2} \beta_n \leq x_{nk}^*(y) \leq \beta_n, \quad (6)$$

и положим

$$x := \frac{2\gamma_{nk}}{x_{nk}^*(y)} y,$$

так что

$$\mu U_n(x) = \frac{2\gamma_{nk}}{x_{nk}^*(y)} \mu U_n(y) = \frac{2\gamma_{nk}}{x_{nk}^*(y)} \leq 2\gamma_{nk} \frac{2}{\beta_n} = \frac{4\gamma_{nk}}{\beta_n} \quad (7)$$

(мы применили (6)). Тогда

$$x_{nk}^*(x) = 2\gamma_{nk}, \quad (8)$$

и

$$\frac{2\gamma_{nk}}{x_{nk}^*(y)} \leq \frac{2}{\beta_n} 2\gamma_{nk} \leq \delta.$$

Следовательно,

$$x \in \delta U_n$$

и

$$\begin{aligned} (\text{sl}_{U_n} r)(x) &= \left(\text{sl}_{U_n} \bigvee_{m,k} ((x_{mk}^* - \gamma_{m,k}) \vee 0) \right)(x) \geq (\text{sl}_{U_n} ((x_{nk}^* - \gamma_{n,k}) \vee 0))(x) \\ &= \frac{|(x_{nk}^*(x) - \gamma_{n,k}) \vee 0|}{\mu U_n(x)} = \frac{\gamma_{nk}}{\mu U_n(x)} \geq \gamma_{nk} \frac{\beta_n}{4\gamma_{nk}} = \frac{\beta_n}{4} \end{aligned}$$

(мы применили (5), (7) и (8)).

5. Пример. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с некоторым ортонормированным базисом $\{e_{nk}\}_{n,k \in \mathbb{N}}$. Для каждого натурального i обозначим через A_i диагональный оператор в H , определяемым по правилу

$$A_i(e_{nk}) = \begin{cases} e_{nk}, & \text{если } i \neq n, \\ \frac{1}{k} e_{nk}, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

Через B обозначим единичный шар в H и определим по индукции

$$U_1 := B, \quad U_{i+1} := \frac{1}{2} A_i U_i.$$

Рассмотрим непрерывные линейные функционалы x_{nk}^* на H , соответствующие векторам $n^{-1}e_{nk}$:

$$x_{nk}^*(x) := (n^{-1}e_{nk} | x);$$

здесь через $(\cdot | \cdot)$ обозначено скалярное произведение в H . Положим

$$\gamma_{nk} := \sup_{U_{n+1}} x_{nk}^*, \quad r := \bigvee_{n,k \in \mathbb{N}} ((x_{nk}^* - \gamma_{nk}) \vee 0).$$

Тогда

- (1) $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – базис окрестностей нуля в хаусдорфовой локально выпуклой топологии τ в H ;
- (2) функция r на (H, τ) является MS-дифференцируемой в нуле, но не является HL-дифференцируемой в нуле;
- (3) r является непрерывной выпуклой функцией на (H, τ) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Как хорошо известно (см., например, [5; гл. I, § 1, предложение 5 и замечание 2]), для того чтобы проверить, что (H, τ) является топологическим векторным пространством, достаточно проверить, что

- (i) всякое U_i является уравновешенным поглощающим множеством;
- (ii) для любого i существует j такое, что $U_j + U_j \subset U_i$.

Утверждение (i) следует из того, что B является уравновешенным поглощающим множеством и каждый оператор A_i является линейной биекцией.

Утверждение (ii) следует из того, что всякое U_i выпукло (шар B выпуклый, и свойство выпуклости сохраняется при линейных отображениях) и, следовательно,

$$U_{i+1} + U_{i+1} = \frac{1}{2} A_i U_i + \frac{1}{2} A_i U_i \subset \frac{1}{2} U_i + \frac{1}{2} U_i \subset U_i.$$

Очевидно, что пространство (H, τ) хаусдорфово и локально выпукло.

- (2) Так как по построению

$$U_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} (A_{i-1} \circ A_{i-2} \circ \dots \circ A_1)(B),$$

то ясно, что U_i является “эллипсоидом” в H с полуосями

$$a_{nk}^i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} (A_{i-1} \circ A_{i-2} \circ \dots \circ A_1)(e_{nk}) = \begin{cases} \frac{1}{2^{i-1}} e_{nk}, & \text{если } i \leq n, \\ \frac{1}{k2^{i-1}}, & \text{если } i > n. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha_{nk} &= \sup_{U_1} x_{nk}^* = \left(\frac{1}{n} e_{nk} \mid a_{nk}^1\right) = \left(\frac{1}{n} e_{nk} \mid e_{nk}\right) = \frac{1}{n}, \\ \beta_{nk} &= \sup_{U_n} x_{nk}^* = \left(\frac{1}{n} e_{nk} \mid a_{nk}^n\right) = \left(\frac{1}{n} e_{nk} \mid \frac{1}{2^{n-1}} e_{nk}\right) = \frac{1}{n2^{n-1}}, \\ \gamma_{nk} &= \sup_{U_{n+1}} x_{nk}^* = \left(\frac{1}{n} e_{nk} \mid a_{nk}^{n+1}\right) = \left(\frac{1}{n} e_{nk} \mid \frac{1}{k2^n} e_{nk}\right) = \frac{1}{nk2^n}. \end{aligned}$$

Ясно, что все условия основной леммы выполнены. Таким образом, функция r является MS-дифференцируемой в нуле (с нулевой производной), но не является HL-дифференцируемой в нуле.

(3) Наша функция выпукла как супремум выпуклых функций. Далее, очевидно, каждая функция

$$(x_{nk}^* - \gamma_{nk}) \vee 0$$

в нашем супремуме ограничена на B и, следовательно, ограничена на всяком шаре в нашем исходном гильбертовом пространстве H , так как x_{nk}^* является линейным функционалом. Итак, функция f ограничена на любом шаре, откуда следует (см., например, [6; гл. 3]), что f непрерывна на любом шаре и, таким образом, f непрерывна всюду.

6. Замечание. Оба приведенных в [2] примера отображений, которые являются MS-дифференцируемыми, но не являются HL-дифференцируемыми (примеры 3.11 и 3.12 на с. 107), представлены вещественными функциями, определенными на $\mathbb{R}^N$ (произведение Тихонова счетного числа вещественных прямых). Невозможно построить непрерывную линейную функцию на этом пространстве $\mathbb{R}^N$ так, чтобы она была MS-дифференцируема, но не была HL-дифференцируема, поскольку можно доказать, что любая непрерывная выпуклая функция на $\mathbb{R}^N$, которая является Гато-дифференцируемой в некоторой точке, также является HL-дифференцируемой в этой точке.

(Дело в том, что любая непрерывная выпуклая функция на $\mathbb{R}^N$ локально зависит лишь от некоторого конечного числа координат в $\mathbb{R}^N$, а для конечномерных пространств MB-, MS- и HL-дифференцируемости, все три, сводятся к Фреше-дифференцируемости.)

Авторы благодарны рецензенту за выявление некоторых неточностей в первоначальной версии данного текста.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, “Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах”, *УМН*, **22**:6 (1967), 201–260.
- [2] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, “Различные определения производной в линейных топологических пространствах”, *УМН*, **23**:4 (1968), 67–116.
- [3] V. I. Averbukh, “Gâteaux differentiable convex functions are Michal–Bastiani differentiable”, *Convergence Structures and Applications to Analysis*, Abh. Akad. Wiss. DDR, Abt. Math. Naturwiss. Tech., **1979**, no. 4, Akademie-Verlag, Berlin, 1980, 7–9.
- [4] J. M. Borwein, M. Fabián, “On convex functions having points of Gâteaux differentiability which are not points of Fréchet differentiability”, *Canad. J. Math.*, **45**:6 (1993), 1121–1134.
- [5] N. Bourbaki, *Topological Vector Spaces*, Chapt. 1–5, Elem. Math. (Berlin), Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [6] J. R. Giles, *Convex Analysis with Application in the Differentiation of Convex Functions*, Res. Notes in Math., **58**, Pitman, Boston, MA, 1982.

В. Авербух

Mathematical Institute, Silesian University in Opava, Opava,
Czech Republic
E-mail: Vladimir.Averbuch@math.slu.cz

Поступило

16.12.2009

Исправленный вариант

08.02.2011

Т. Кондерла

Mathematical Institute, Silesian University in Opava, Opava,
Czech Republic
E-mail: Tomas.Konderla@math.slu.cz