Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Набиев, Решение обратной квазипериодической задачи для системы Дирака, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 6, 885–893

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8657>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:54:18

Решение обратной квазипериодической задачи для системы Дирака

И. М. Набиев

В статье полностью решена обратная задача спектрального анализа для оператора Дирака с квазипериодическими граничными условиями. Доказана теорема единственности решения обратной задачи и найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять некоторая последовательность вещественных чисел для того, чтобы она была спектром квазипериодической задачи Дирака.

Библиография: 20 названий.

Статья посвящена памяти академика НАН Азербайджана М. Г. Гасымова

1. Введение. Один из важных классов обратных спектральных задач состоит из задач восстановления систем дифференциальных уравнений по спектральным данным. Решениям таких задач посвящено много работ (см. исторический очерк в [1; с. 360]). В частности, в работах [2]–[5] исследованы обратные задачи для системы Дирака (связанной с поведением релятивистского электрона в электростатическом поле) с разделенными граничными условиями, в которых в качестве спектральных данных используются один, два спектра, а также спектр и нормировочные числа. В случае неразделенных граничных условий некоторые варианты обратных задач полностью решены в [6]–[8], где восстановление оператора Дирака в основном ведется по двум спектрам и некоторой последовательности знаков. В работе [9] (см. также книгу [10]) получена полная характеристика спектра оператора Хилла, которая основана на параметризации класса вещественных целых функций при помощи специальных конформных отображений верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость с вертикальными разрезами. Результаты этой работы перенесены на случай оператора Дирака в [6]. Прямым методом [11] (в котором не используются результаты статьи [9], уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко и формулы следов) в работах [12], [13] (см. также [14]) решена обратная задача по длинам лакун для оператора Дирака. Здесь широко используются вещественно-аналитический изоморфизм между гильбертовыми пространствами и двусторонние оценки потенциала в терминах спектральных данных. Отметим, что задача восстановления системы Дирака при квазипериодических граничных условиях имеет свою специфику исследования и ранее не изучалась. Условия разрешимости обратной задачи в этом случае существенно отличается от результатов, относящихся к случаям других видов неразделенных граничных условий (см., например, работу [7]).

В настоящей работе исследуется обратная задача спектрального анализа для оператора Дирака с квазипериодическими граничными условиями. Доказана единственность восстановления системы Дирака по спектральным данным и получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. При доказательстве достаточности условий используется обратная периодическая задача, которая решается иным подходом, отличным от методов работ [6] и [13]. Здесь не используются отображения, которые играют основную роль в указанных работах, и разрешимость обратной периодической задачи основана на задании только асимптотики и перемежаемости членов некоторой последовательности (в отличие от работы [6] здесь, например, представления для функции Ляпунова и интерполяционного выражения получены без использования асимптотических свойств специальных конформных отображений, фигурирующих в [9; § 2]). Отметим, что подобный вопрос для операторов Штурма–Лиувилля и диффузии ранее полностью изучен (см. [15]).

Рассмотрим следующую спектральную задачу Дирака:

$$BY'(x) + Q(x)Y(x) = \lambda Y(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (1)$$

$$Y(\pi) = e^{it}Y(0), \quad (2)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Здесь предполагается, что $p(x)$ и $q(x)$ – действительные функции из пространства $L_2[0, \pi]$, t – фиксированное действительное число. Заметим, что при $t = 2k\pi$ (k – целое число) условия (2) совпадают с периодическими, а при $t = (2k+1)\pi$ – с антипериодическими граничными условиями. Если $t \neq k\pi$, то эти условия называют *квазипериодическими* (см. [16; с. 442]). Краевую задачу (1), (2) будем обозначать через D_t . В дальнейшем будем предполагать, что $0 < t < \pi/2$ (рассуждения для других значений $t \neq k\pi$ аналогичны).

2. О собственных значениях краевой задачи D_t . Пусть

$$C(\lambda, x) = \begin{pmatrix} c_1(\lambda, x) \\ c_2(\lambda, x) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S(\lambda, x) = \begin{pmatrix} s_1(\lambda, x) \\ s_2(\lambda, x) \end{pmatrix}$$

– решения матричного уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$C(\lambda, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S(\lambda, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что имеет место тождество

$$c_1(\lambda, x)s_2(\lambda, x) - c_2(\lambda, x)s_1(\lambda, x) \equiv 1. \quad (3)$$

Следовательно, решения $C(\lambda, x)$ и $S(\lambda, x)$ линейно независимы и образуют базис решений уравнения (1). Используя тождество (3), легко показать, что характеристическая функция, нули которой являются собственными значениями краевой задачи D_t , имеет вид

$$d(\lambda) = c_1(\lambda, \pi) + s_2(\lambda, \pi) - 2 \cos t. \quad (4)$$

Из самосопряженности задачи D_t вытекает вещественность ее собственных значений. Аналогично случаю операторов диффузии [17] можно доказать, что число λ_0 является двукратным собственным значением краевой задачи D_t тогда и только тогда, когда $t = k\pi$ и

$$c_2(\lambda_0, \pi) = s_1(\lambda_0, \pi) = 0.$$

Поскольку в этой работе предполагается $t \neq k\pi$, то все собственные значения задачи D_t простые.

ЛЕММА. Для собственных значений $a_k^\pm$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, краевой задачи D_t при $|k| \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$a_k^\pm = 2k \pm \frac{t}{\pi} + \varepsilon_k^\pm, \quad \{\varepsilon_k^\pm\} \in l_2. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя представления [5]

$$c_1(\lambda, \pi) = \cos \lambda \pi + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{i\lambda x} dx, \quad s_2(\lambda, \pi) = \cos \lambda \pi + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) e^{i\lambda x} dx$$

и формулу (4), получаем, что характеристическое уравнение задачи D_t имеет вид

$$2(\cos \lambda \pi - \cos t) + m(\lambda) = 0, \quad (6)$$

где

$$m(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x) + \psi(x)] e^{i\lambda x} dx, \quad \varphi(x), \psi(x) \in L_2[-\pi, \pi].$$

Принимая во внимание оценку $m(\lambda) = o(e^{\pi|\operatorname{Im} \lambda|})$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, на основе теоремы Руше легко устанавливается, что уравнение (6) имеет счетное число корней и эти корни образуют последовательность вида (5), где $\varepsilon_k^\pm = o(1)$ при $|k| \rightarrow \infty$. Если подставить эту асимптотику в уравнение (6), то после элементарных преобразований уточняем, что $\{\varepsilon_k^\pm\} \in l_2$. Лемма доказана.

3. Теорема единственности восстановления краевой задачи D_t по спектральным данным.

ТЕОРЕМА 1. Краевая задача D_t однозначно восстанавливается по заданной тройке последовательностей $\{a_k^\pm\}$, $\{\lambda_k\}$ и $\{\sigma_k\}$, где λ_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, — нули функции $s_1(\lambda, \pi)$, $\sigma_k = \operatorname{sign}[1 - |s_2(\lambda_k, \pi)|]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По заданному спектру $\{a_k^\pm\}$ задачи D_t однозначно определяется параметр t граничного условия следующим образом:

$$t = \frac{\pi}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k^+ - a_k^-),$$

так как $\{a_k^\pm\}$ подчиняется асимптотике (5). Характеристическая функция $d(\lambda)$ краевой задачи D_t , которая является целой функцией экспоненциального типа, однозначно восстанавливается также по последовательности $\{a_k^\pm\}$ в виде бесконечного произведения. Зная $d(\lambda)$ и t , функцию $u_+(\lambda) = c_1(\lambda, \pi) + s_2(\lambda, \pi)$ можно определить из формулы (4):

$$u_+(\lambda) = d(\lambda) + 2 \cos t. \quad (7)$$

Далее, функция $s_1(\lambda, \pi)$ однозначно восстанавливается по $\{\lambda_k\}$, функция $u_-(\lambda) = c_1(\lambda, \pi) - s_2(\lambda, \pi)$ — по $s_1(\lambda, \pi)$, $\{\sigma_k\}$ и $\{u_+(\lambda_k)\}$, а функция $s_2(\lambda, \pi)$ — по $u_+(\lambda)$ и $u_-(\lambda)$ известным способом (см. [6]). По последовательности $\{\lambda_k\}$ и по нулям функции $s_2(\lambda, \pi)$ однозначно определяется коэффициент $Q(x)$ уравнения (1) (см. [2], [5], [6]).

Таким образом, по спектру $\{a_k^\pm\}$ краевой задачи D_t и последовательностям $\{\lambda_k\}$ и $\{\sigma_k\}$ однозначно восстанавливаются как матрица-функция $Q(x)$, так и параметр t . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что, опираясь на результаты работы [13], матрицу-функцию $Q(x)$ можно восстановить и следующим способом.

После определения функции $u_+(\lambda)$ по формуле (7) находим спектры $\{\mu_{2k}^\pm\}$, $\{\mu_{2k+1}^\pm\}$ периодической и антипериодической задач как последовательности нулей функций $u_+(\lambda) - 2$ и $u_+(\lambda) + 2$ соответственно. Построим отображение $g: q \rightarrow g(q) = \{g_k\}$, действующее из $L_2[0, \pi] \oplus L_2[0, \pi]$ в $l_2 \oplus l_2$, по следующему правилу:

$$g_k = (g_{k1}, g_{k2}), \quad g_{k1} = \frac{\mu_k^+ + \mu_k^-}{2} - \lambda_k, \quad g_{k2} = \sigma_k \sqrt{|g_k|^2 - g_{k1}^2},$$

$$|g_k| = \frac{\mu_k^+ - \mu_k^-}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Используя теорему (1.1) работы [13], построим коэффициент $Q(x)$ уравнения (1) (в этой теореме доказывается, что отображение g есть вещественно аналитический изоморфизм, и устанавливаются двусторонние оценки для $Q(x)$).

4. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы последовательность $\{a_k^\pm\}$ состояла из собственных значений квазипериодической задачи D_t , необходимо и достаточно, чтобы при $|k| \rightarrow \infty$ выполнялась асимптотическая формула (5) и для нулей $\mu_{2k}^\pm$ и $\mu_{2k+1}^\pm$ функций

$$d(\lambda) - 4 \sin^2 \frac{t}{2} \quad \text{и} \quad d(\lambda) + 4 \cos^2 \frac{t}{2}$$

соответственно имели место неравенства

$$\dots < \mu_{2k}^- \leq \mu_{2k}^+ < \mu_{2k+1}^- \leq \mu_{2k+1}^+ < \dots \quad (8)$$

и асимптотическое равенство

$$\mu_k^\pm = k + \delta_k^\pm, \quad (9)$$

где

$$d(\lambda) = 4 \sin^2 \frac{t}{2} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2 (a_k^- - \lambda)(a_k^+ - \lambda)}{4k^2 \pi^2 - t^2}, \quad (10)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta_k^\pm)^2 < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть последовательность $\{a_k^\pm\}$ состоит из собственных значений квазипериодической задачи D_t . Как отмечено выше, асимптотическая формула (5) для $a_k^\pm$ и разложение на бесконечное произведение (10)

целой функции $d(\lambda)$ легко получаются стандартными методами. Далее, ясно, что нули функций

$$\begin{aligned} d(\lambda) - 4 \sin^2 \frac{t}{2} &= c_1(\lambda, \pi) + s_2(\lambda, \pi) - 2, \\ d(\lambda) + 4 \cos^2 \frac{t}{2} &= c_1(\lambda, \pi) + s_2(\lambda, \pi) + 2, \end{aligned}$$

являются собственными значениями периодической и антипериодической краевых задач соответственно, так что числа $\mu_k^\pm$ удовлетворяют неравенствам (8) и асимптотической формуле (9) (см., например, [6]).

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Сначала покажем, что для функции (10), нули которой подчиняются асимптотике (5), имеет место представление

$$d(\lambda) = 2(\cos \lambda \pi - \cos t) + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i\lambda x} dx, \quad (11)$$

где $f(x) \in L_2[-\pi, \pi]$. Действительно, поскольку функция

$$\omega(\lambda) = \pi(\beta_0 - \lambda) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\beta_k - \lambda}{k}$$

(в силу леммы 4 работы [6]) может быть представлена в виде

$$\omega(\lambda) = \sin \lambda \pi + \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{i\lambda x} dx,$$

где $\beta_k = k + \tau_k$, $\{\tau_k\} \in l_2$, $g(x) \in L_2[-\pi, \pi]$, то ввиду (10) имеем

$$\begin{aligned} d(\lambda) &= -4 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \frac{a_0^- - \lambda}{t} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{k + \varepsilon_k^-/2 - (\lambda/2 + t/(2\pi))}{k} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{1 - t/(2\pi k)} \cdot \frac{a_0^+ - \lambda}{t} \\ &\quad \times \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{k + \varepsilon_k^+/2 - (\lambda/2 - t/(2\pi))}{k} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{1 + t/(2\pi k)} \\ &= -4 \left[\sin \left(\frac{\lambda \pi}{2} + \frac{t}{2} \right) + g^- \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{t}{2\pi} \right) \right] \cdot \left[\sin \left(\frac{\lambda \pi}{2} - \frac{t}{2} \right) + g^+ \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{t}{2\pi} \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$g^\pm(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}^\pm(x) e^{izx} dx, \quad \tilde{g}^\pm(x) \in L_2[-\pi, \pi].$$

Отсюда, используя теорему Пэли–Винера [18; с. 47], получаем доказываемое представление (11).

Рассмотрим теперь функцию

$$u(\lambda) = d(\lambda) + 2 \cos t. \quad (12)$$

Заметим, что $\{\mu_{2k}^\pm\}$ и $\{\mu_{2k+1}^\pm\}$ являются последовательностями нулей функций $u(\lambda) - 2$ и $u(\lambda) + 2$ соответственно. Согласно соотношениям (9) и (11) функции

$u(\lambda) \pm 2$ разлагаются в бесконечные произведения следующим образом:

$$u(\lambda) - 2 = -\pi^2(\mu_0^- - \lambda)(\mu_0^+ - \lambda) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(\mu_{2k}^- - \lambda)(\mu_{2k}^+ - \lambda)}{4k^2}, \quad (13)$$

$$u(\lambda) + 2 = 4 \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(\mu_{2k-1}^- - \lambda)(\mu_{2k-1}^+ - \lambda)}{(2k-1)^2}.$$

Следовательно,

$$u^2(\lambda) - 4 = -4\pi^2(\mu_0^- - \lambda)(\mu_0^+ - \lambda) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(\mu_k^- - \lambda)(\mu_k^+ - \lambda)}{k^2}. \quad (14)$$

Пусть λ_k – произвольная точка, принадлежащая отрезку $[\mu_k^-, \mu_k^+]$. Тогда ввиду (9) при $|k| \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_k = k + \delta_k, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k^2 < \infty.$$

Поэтому функция

$$s(\lambda) = \pi(\lambda - \lambda_0) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{k}$$

представима в виде

$$s(\lambda) = -\sin \lambda \pi + \int_{-\pi}^{\pi} r(x) e^{i\lambda x} dx, \quad r(x) \in L_2[-\pi, \pi].$$

Используя неравенства (8) и $\mu_k^- \leq \lambda_k \leq \mu_k^+$, из представления (14) получаем, что $u^2(\lambda_k) \geq 4$. Значит, $u(\lambda_k) \leq -2$ или $u(\lambda_k) \geq 2$. Соотношения (11)–(13) показывают, что $\text{sign } u(\lambda_k) = (-1)^k$. Поэтому

$$u(\lambda_{2m-1}) \leq -2, \quad u(\lambda_{2m}) \geq 2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тогда существует число h_k такое, что $u(\lambda_k) = 2(-1)^k \text{ch } h_k$.

Рассмотрим функцию $\tilde{u}(\lambda)$ такую, что

$$|\tilde{u}(\lambda_k)| = \sqrt{u^2(\lambda_k) - 4} = 2|\text{sh } h_k|.$$

Следовательно, если потребовать, чтобы $\tilde{u}(\lambda_k) = 2 \text{sh } h_k$, то мы определим не только $|\tilde{u}(\lambda_k)|$, но и $\text{sign } \tilde{u}(\lambda_k) = \text{sign } h_k$. Теперь построим функцию $\tilde{u}(\lambda)$ следующим образом:

$$\tilde{u}(\lambda) = s(\lambda) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \text{sh } h_k}{(\lambda - \lambda_k) s'(\lambda_k)}. \quad (15)$$

Поскольку на концах отрезков $[\mu_k^-, \mu_k^+]$ функция $u(\lambda)$ принимает одинаковые значения, равные $2(-1)^k$, то в каждом из них лежит нуль γ_k ее производной. Далее, из (11), (12) находим

$$u'(\lambda) = -2\pi \sin \lambda \pi + o(e^{\pi |\text{Im } \lambda|}) \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Используя эту оценку и теорему Руше, легко установить, что в каждой полосе $|\operatorname{Re} \lambda| \leq n + 1/2$ при больших n функция $u'(\lambda)$ имеет ровно $2n + 1$ нуль. Принимая во внимание асимптотическую формулу (9), убеждаемся, что все нули γ_k простые и других нулей у производной $u'(\lambda)$ нет, т.е. в каждом интервале (γ_k, γ_{k+1}) функция $u'(\lambda)$ имеет постоянный знак. Поскольку $\gamma_k \in [\mu_k^-, \mu_k^+ t]$, то $u^2(\gamma_k) \geq 4$ и $\operatorname{sign} u(\gamma_k) = (-1)^k$.

Поэтому существует число $\theta_k \geq 0$ такое, что

$$u(\gamma_k) = 2(-1)^k \operatorname{ch} \theta_k. \quad (16)$$

Ввиду равенств $u(\mu_k^\pm) = 2(-1)^k$, $u'(\gamma_k) = 0$ и формулы Тейлора имеем

$$2(-1)^k = u(\mu_k^\pm) = u(\gamma_k) + \frac{1}{2}(\mu_k^\pm - \gamma_k)^2 u''(\gamma_k^\pm),$$

откуда согласно (16) находим

$$\operatorname{ch} \theta_k = 1 + \frac{(-1)^{k+1}}{4}(\mu_k^\pm - \gamma_k)^2 u''(\gamma_k^\pm),$$

где точки $\gamma_k^\pm$ лежат между $\mu_k^\pm$ и γ_k . Поэтому

$$1 + \frac{1}{2}\theta_k^2 \leq \frac{1}{4}(\mu_k^\pm - \gamma_k)^2 M_k,$$

$$M_k = \max_{\lambda \in [\mu_k^-, \mu_k^+]} |u''(\lambda)| \quad \text{и} \quad \theta_k \leq (\mu_k^+ - \mu_k^-) \frac{\sqrt{2M_k}}{4},$$

так как одно из чисел $|\mu_k^- - \gamma_k|$, $|\mu_k^+ - \gamma_k|$ не превосходит $(1/2)|\mu_k^+ - \mu_k^-|$. В силу неравенства Бернштейна (см., например, [19; с. 104]) для производных целых функций экспоненциального типа имеем

$$\sup_{\lambda \in (-\infty, \infty)} |u''(\lambda)| \leq \pi \sup_{\lambda \in (-\infty, \infty)} |u'(\lambda)| \leq \pi^2 M,$$

где

$$M = \sup_{\lambda \in (-\infty, \infty)} |u(\lambda)| < \infty, \quad \text{так что} \quad \theta_k \leq \frac{\pi\sqrt{2M}}{4}(\mu_k^+ - \mu_k^-).$$

Тогда согласно (9) имеет место $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_k^2 < \infty$.

Легко заметить, что $|h_k| \leq \theta_k$ и, следовательно,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k^2 < \infty.$$

Отсюда и из теоремы 28 работы [18] следует, что функция $\tilde{u}(\lambda)$, заданная формулой (15), имеет вид

$$\tilde{u}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{a}(x) e^{i\lambda t} dx, \quad \tilde{a}(x) \in L_2[-\pi, \pi].$$

Далее, как в работе [6] доказывается, что нули функции

$$\tilde{s}(\lambda) = \frac{1}{2}[u(\lambda) - \tilde{u}(\lambda)]$$

удовлетворяют таким асимптотическим равенствам:

$$\nu_k = k - \frac{1}{2} + \xi_k, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k^2 < \infty$$

и перемежаются с нулями функции $s(\lambda)$. Тогда существует матрица-функция

$$Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

(элементы которой принадлежат $L_2[0, \pi]$) такая, что последовательности $\{\lambda_k\}$, $\{\nu_k\}$ являются спектрами краевых задач, порожденных одним и тем же уравнением Дирака с коэффициентом $Q(x)$ и граничными условиями $y_1(0) = y_1(\pi) = 0$ и $y_1(0) = y_2(\pi) = 0$ соответственно. Известными приемами (см., например, [20]) легко установить, что спектр построенной краевой задачи D_t совпадает с $\{a_k^{\pm}\}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Юрко, *Введение в теорию обратных спектральных задач*, Физматлит, М., 2007.
- [2] М. Г. Гасымов, Т. Т. Джабиев, “Решение обратной задачи по двум спектрам для уравнения Дирака на конечном отрезке”, *Докл. АН АзССР*, **22**:7 (1966), 3–6.
- [3] B. A. Watson, “Inverse spectral problems for weighted Dirac systems”, *Inverse Problems*, **15**:3 (1999), 793–805.
- [4] M. Kiss, “An n -dimensional Ambarzumian type theorem for Dirac operators”, *Inverse Problems*, **20**:5 (2004), 1593–1597.
- [5] S. Albeverio, R. Hryniv, Ya. Mykytyuk, “Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials”, *Russ. J. Math. Phys.*, **12**:4 (2005), 406–423.
- [6] Т. В. Мисюра, “Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. II”, *Теор. функц., функц. анализ и их прилож.*, **31** (1979), 102–109.
- [7] I. M. Nabiev, “Solution of a class of inverse problems for the Dirac operator”, *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, **21**:1, Math. Mech. (2001), 146–157.
- [8] I. M. Nabiev, “Characteristic of spectral data of Dirac operators”, *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, **24**:7, Math. Mech. (2004), 161–166.
- [9] В. А. Марченко, И. В. Островский, “Характеристика спектра оператора Хилла”, *Матем. сб.*, **97**:4 (1975), 540–606.
- [10] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977.
- [11] P. Kargaev, E. Korotyaev, “The inverse problem for the Hill operator, a direct approach”, *Invent. Math.*, **129**:3 (1997), 567–593.
- [12] E. Korotyaev, “Marchenko–Ostrovski mapping for periodic Zakharov–Shabat systems”, *J. Differential Equations*, **175**:2 (2001), 244–274.
- [13] E. Korotyaev, “Inverse problem and estimates for periodic Zakharov–Shabat systems”, *J. Reine Angew. Math.*, **583** (2005), 87–115.
- [14] Е. Л. Коротяев, “Обратные задачи для операторов Хилла и Дирака”, *Докл. РАН*, **365**:6 (1999), 730–733.
- [15] И. М. Набиев, “Обратная квазипериодическая задача для оператора диффузии”, *Докл. РАН*, **415**:2 (2007), 168–170.
- [16] *Функциональный анализ*, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972.

- [17] И. М. Набиев, “Кратность и взаимное расположение собственных значений квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля”, *Матем. заметки*, **67**:3 (2000), 369–381.
- [18] Б. Я. Левин, *Целые функции*, Курс лекций, Изд-во Моск. ун-та, М., 1971.
- [19] R. M. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Pure Appl. Math., **93**, Academic Press, New York, 1980.
- [20] И. М. Гусейнов, И. М. Набиев, “Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов”, *Матем. сб.*, **198**:11 (2007), 47–66.

И. М. Набиев

Бакинский государственный университет, Институт
математики и механики НАН Азербайджана

E-mail: nabievim@yahoo.com

Поступило

02.12.2009

Исправленный вариант

13.05.2010