Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Л. Чуприков, Метод ВКБ и дифференциальные следствия уравнения Риккати, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 6, 929–937

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8658>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:04:50

Метод ВКБ и дифференциальные следствия уравнения Риккати

Н. Л. Чуприков

Представлен обобщенный метод ВКБ, основанный на использовании дифференциальных следствий уравнения Риккати. Метод сочетает в себе простоту традиционного метода ВКБ и универсальность метода Маслова: в случае гладкого потенциала с классическими точками поворота, заданного в ограниченном пространственном интервале, главный член разложения находится как корень алгебраического уравнения и дает регулярное во всей области задания потенциала приближенное решение, точность которого можно увеличивать учитывая новые дифференциальные следствия.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Известно, что главным достоинством традиционного метода ВКБ является то, что он дает удивительно простой способ построения приближенных аналитических решений одномерного уравнения Шрёдингера (ОУШ) для широкого класса гладких потенциалов, сводя поиск главного члена разложения к решению алгебраического уравнения второго порядка. Однако известно также и то, что камнем преткновения для этого подхода стали классические точки поворота, в которых традиционные ВКБ-разложения имеют особенность (см., например, [1], [2]). Это породило проблему вывода формул связи для решений в классически разрешенных и классически запрещенных областях, где ВКБ-разложения хорошо аппроксимируют точные решения ОУШ.

Для решения этой проблемы были разработаны такие известные подходы, как комплексный метод ВКБ [3], [4] и метод внутренних разложений [2], получивший дальнейшее развитие в рамках метода эталонных уравнений [5]–[7]. Но, пожалуй, самым эффективным и универсальным методом построения всюду регулярных асимптотических разложений стал метод канонического оператора Маслова [8], который не предполагает знание точных решений каких-либо модельных уравнений.

Заметим, что решение проблемы точек поворота неизбежно приводит к усложнению формализма асимптотических разложений по сравнению с традиционным методом ВКБ. В связи с этим развитие максимально простых методов построения асимптотических разложений, не имеющих особенности в точках поворота, является актуальной задачей и в настоящее время.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2553.2008.2).

В 1994 г. независимо друг от друга были опубликованы два подхода, [9] и [10], [11] (см. также [12]), в которых предлагается одна и та же идея – строить ВКБ-разложения с учетом дифференциальных следствий (ДС) уравнения Риккати. (В 2002 г. эта идея была вновь предложена в работе [13].) Оба подхода отличаются друг от друга, так как используют ДС по-разному. Например, в [9] разложения строятся традиционно, по целым степеням $\hbar$. В то же время в [10], [11] параметром малости является функция $\epsilon(x; \hbar)$ пространственной переменной x и постоянной Планка $\hbar$, которая мала по норме вместе с $\hbar$ и определяется видом потенциала.

В данной работе предлагается дальнейшее развитие метода [10]–[12] с детальным изложением его формализма, так как работы [10]–[12], где представлен его первоначальный вариант, труднодоступны.

2. Обобщение формализма ВКБ-разложений. Пусть дано ОУШ

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - Q^{(0)}(x; \hbar)\Psi = 0, \quad Q^{(0)}(x; \hbar) = \frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E); \quad (2.1)$$

потенциал $V(x)$ равен нулю вне интервала $[a, b]$, а в самом интервале представляет собой ограниченную бесконечно дифференцируемую функцию; E – энергия частицы; m – ее масса. При этом будем полагать, что в интервале $[a, b]$ имеются точки поворота, порядок которых не превышает N .

Пусть $\Psi(x) = e^{S(x)}$. Полагая $y(x) = dS(x)/dx$, сводим решение уравнения (2.1) к решению уравнения Риккати, которое запишем вместе с его первыми N ДС:

$$\begin{aligned} y^{(m+1)} + \sum_{k=0}^m C_k^m y^{(m-k)} y^{(k)} - Q^{(m)} &= 0, \quad m = 0, \dots, N-1, \\ \frac{dy^{(N)}}{dx} + \sum_{k=0}^N C_k^N y^{(N-k)} y^{(k)} - Q^{(N)} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$y^{(k)} = dy^k/dx^k$, $Q^{(k)} = dQ^k/dx^k$, C_k^m – коэффициенты бинома Ньютона $m!/(m-k)!k!$. Далее производные $y^{(m)}(x; \hbar)$, $m = 1, \dots, N$, рассматриваются как самостоятельные функции, удовлетворяющие системе уравнений (2.2); функции $y^{(m+1)}(x; \hbar)$ и $dy^{(m)}(x; \hbar)/dx$ совпадают лишь в том случае, если эта система решена точно.

Пусть далее

$$y^{(m)}(x; \hbar) = \epsilon^{-m-1}(x; \hbar) u_m(x; \hbar), \quad m = 0, \dots, N, \quad (2.3)$$

где $\epsilon(x; \hbar)$ – некоторая произвольная функция, норма $\|\epsilon(x; \hbar)\|$ которой мала вместе с $\hbar$; здесь и далее для любой функции $f(x)$ ее норма $\|f(x)\|$ – максимальное значение $|f(x)|$ в интервале $[a, b]$. Для новых переменных уравнения (2.2) запишутся в виде

$$\begin{aligned} u_{m+1} + \sum_{k=0}^m C_k^m u_{m-k} u_k - Q_m &= 0, \quad m = 0, \dots, N-1, \\ \epsilon u'_N - (N+1)\epsilon' u_N + \sum_{k=0}^N C_k^N u_{N-k} u_k - Q_N &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $Q_m = \epsilon^{m+2} Q^{(m)}$, $m = 0, \dots, N$, штрихом обозначена производная.

Решение системы уравнений (2.4) находим в виде разложения по $\epsilon(x; \hbar)$:

$$u_n(x; \hbar) = \sum_{k=0} u_{n,k}(x; \hbar) \epsilon^k(x; \hbar). \quad (2.5)$$

При этом предполагаем, что для всех $x \in [a, b]$, а также для всех значений k и m справедливы соотношения

$$\left\| \frac{d^k \epsilon(x; \hbar)}{dx^k} \right\| \sim \|\epsilon(x; \hbar)\|, \quad \|Q_k(x; \hbar)\| = O(1), \quad \|u_{m,k}(x; \hbar)\| = O(1). \quad (2.6)$$

Выделяя члены нулевого порядка малости по ϵ , получаем

$$\begin{aligned} u_{m+1,0} + \sum_{k=0}^m C_k^m u_{m-k,0} u_{k,0} - Q_m &= 0, \quad m = 0, \dots, N-1, \\ \sum_{k=0}^N C_k^N u_{N-k,0} u_{k,0} - Q_N &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В α -м порядке малости, $\alpha = 1, 2, \dots$, имеем

$$\begin{aligned} u_{m+1,\alpha} + \sum_{k=0}^m \sum_{\gamma=0}^{\alpha} C_k^m u_{m-k,\gamma} u_{k,\alpha-\gamma} &= 0, \quad m = 0, \dots, N-1, \\ \frac{du_{N,\alpha-1}}{dx} - (N+2-\alpha) \frac{\epsilon'}{\epsilon} u_{N,\alpha-1} + \sum_{k=0}^N C_k^N \sum_{\gamma=0}^{\alpha} u_{N-k,\gamma} u_{k,\alpha-\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Заметим, что уравнение (2.8) содержит не только функцию $\epsilon(x; \hbar)$, но и ее первую производную. Это означает, что в выражения для коэффициентов разложения $u_{m,k}(x; \hbar)$ должны входить производные функции $\epsilon(x; \hbar)$. При этом условие $\|u_{m,k}\| = O(1)$ остается в силе, поскольку, во-первых, производные функции $\epsilon(x; \hbar)$ являются величинами того же порядка малости, что и сама функция (см. (2.6)); во-вторых, они входят в выражения для коэффициентов $u_{m,k}(x; \hbar)$ только в виде таких комбинаций, которые являются производными отношения ϵ'/ϵ .

Теперь обратим внимание на то, что система уравнений (2.7) содержит функции $Q_m(x; \hbar)$, $m = 0, \dots, N$, в определение которых входит неизвестная функция $\epsilon(x; \hbar)$. Поэтому требуется еще одно уравнение, чтобы схема вычисления коэффициентов разложения (2.5) стала замкнутой. Прежде чем его сформулировать, сделаем замену переменных

$$u_{m,0} = \epsilon^{m+1} \kappa_m. \quad (2.9)$$

Для новых неизвестных уравнения (2.7) принимают вид

$$\begin{aligned} \kappa_{m+1} + \sum_{k=0}^m C_k^m \kappa_{m-k} \kappa_k - Q^{(m)} &= 0, \quad m = 0, \dots, N-1, \\ \sum_{k=0}^N C_k^N \kappa_{N-k} \kappa_k - Q^{(N)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

и, следовательно, не содержат неизвестную функцию $\epsilon(x; \hbar)$. (Заметим, что эти уравнения совпадают с уравнениями (2.2) лишь с точностью до главных членов разложения: $y^{(m)} \approx \kappa_m$.) Потребуем, чтобы $u_{0,0}(x; \hbar) \equiv 1$. С учетом (2.9) это означает, что

$$\epsilon(x; \hbar) = \kappa_0^{-1}(x; \hbar). \quad (2.11)$$

Заметим, что система уравнений (2.10) может быть приведена к алгебраическому уравнению $(N+2)$ -го порядка для функции $\kappa_0(x; \hbar)$. Таким образом, в общем случае существуют $N+2$ функции $\epsilon(x; \hbar)$. Каждой из них соответствует решение в виде ряда (2.5). Наличие $N+2$ различных решений обусловлено тем, что в данном подходе фактически решается не само уравнение Риккати, а его N -е ДС, т.е. обыкновенное дифференциальное уравнение $(N+1)$ -го порядка. Поскольку нас интересует все-таки решение самого уравнения Риккати, мы должны выбрать только два корня $\kappa_0(x; \hbar)$, а остальные отбросить. Покажем, что существуют только два корня, для которых норма функции $\epsilon(x; \hbar)$ мала.

3. Связь функции $\epsilon(x; \hbar)$ с постоянной Планка в точке поворота n -го порядка. Покажем, что для каждой точки $x \in [a, b]$ существует не менее двух корней $\kappa_0(x; \hbar)$ таких, что

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} |\epsilon(x; \hbar)| = 0. \quad (3.1)$$

Пусть x_0 есть точка поворота n -го порядка, $0 \leq n \leq N$:

$$Q^{(0)}(x_0) = \dots = Q^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad Q^{(n)}(x_0) \neq 0$$

(точки x_0 , в которых $Q^{(0)}(x_0) \neq 0$, формально можно считать точками поворота нулевого порядка). Найдём решение уравнений (2.10) в данной точке в виде разложения по $\hbar^\beta$, где β – произвольная положительная константа:

$$\kappa_m(x_0; \hbar) = \hbar^{-\beta(m+1)} \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{\kappa}_{m,s} \hbar^{s\beta}. \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в систему уравнений (2.10) и оставляя только главные члены разложения, нетрудно показать, что для исследуемой точки поворота ряд (3.2) имеет смысл только при $\beta = 2/(n+2)$. При этом

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{m+1,0} + \sum_{k=0}^m C_k^m \tilde{\kappa}_{m-k,0} \tilde{\kappa}_{k,0} &= 0, & m &= 0, \dots, n-1, & n+1, \dots, N-1, \\ \tilde{\kappa}_{n+1,0} + \sum_{k=0}^n C_k^n \tilde{\kappa}_{n-k,0} \tilde{\kappa}_{k,0} &= \tilde{Q}^{(n)}, & \sum_{k=0}^N C_k^N \tilde{\kappa}_{N-k,0} \tilde{\kappa}_{k,0} &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\tilde{Q}^{(n)}(x_0) = \hbar^2 Q^{(n)}(x_0; \hbar) = 2mV^{(n)}(x).$$

В свою очередь, решение уравнений (3.3) находим в виде

$$\tilde{\kappa}_{m,0} = a_m \tilde{\kappa}_{0,0}^{m+1}, \quad (3.4)$$

$a_0 = 1$. Подставляя выражение (3.4) в (3.3), получаем уравнения для коэффициентов a_m , $m = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} a_{m+1} + \sum_{k=0}^m C_k^m a_{m-k} a_k &= 0, & m = 0, \dots, n-1, n+1, \dots, N-1, \\ \sum_{k=0}^N C_k^N a_{N-k} a_k &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

и уравнение для $\tilde{\kappa}_{0,0}$

$$\left(a_{n+1} + \sum_{k=0}^n C_k^n a_{n-k} a_k \right) \tilde{\kappa}_{0,0}^{n+2} = \tilde{Q}^{(n)}. \quad (3.6)$$

Таким образом, в точке поворота n -го порядка имеется $n+2$ равных по модулю комплексных корня $\kappa_{0,0}$. Этим корням соответствуют $n+2$ функции $\kappa_0(x_0; \hbar)$ (см. (3.2)) и, следовательно, $n+2$ функции $\epsilon(x; \hbar)$. Для всех этих корней $|\epsilon(x_0; \hbar)| \sim \hbar^{2/(n+2)}$. Таким образом, нужные корни находятся среди этих $n+2$ корней. Остальные $N-n$ корней $\kappa_{0,0}$ малы по модулю вместе с $\hbar$ и должны быть отброшены.

Заметим, что если x_0 находится вдали от точек поворота (т.е. является точкой поворота нулевого порядка), то имеются только два нужных корня $\kappa_{0,0}$, причем для этих корней $|\epsilon(x_0; \hbar)| = |\kappa_0(x_0; \hbar)|^{-1} \sim \hbar$. Таким образом, для любой точки $x \in [a, b]$ имеется, по крайней мере, два корня $\epsilon(x; \hbar)$, которые удовлетворяют условию (3.1).

Итак, разложение по степеням $\epsilon(x; \hbar)$ в точке поворота n -го порядка эквивалентно разложению по параметру $\hbar^{2/(n+2)}$. Это согласуется с известным результатом, полученным в рамках метода эталонных уравнений (см., например, [3]). Вдали от точек поворота (т.е. для $n=0$) разложение (2.5) эквивалентно разложению по целым степеням $\hbar$, как и в традиционном методе ВКБ (заметим, что при $N=0$ оба подхода совпадают).

4. О возможности увеличения точности обобщенного ВКБ-разложения в нулевом порядке малости. Помимо проблемы точек поворота, включение ДС уравнения Риккати в схему построения асимптотических разложений позволяет решить еще одну важную задачу. Как известно, асимптотические ряды расходятся. Поэтому обычно ограничиваются лишь одним-двумя первыми членами разложения, которые тем лучше обеспечивают необходимую точность разложения, чем меньше параметр малости. Однако в большинстве физических задач параметр малости имеет фиксированное значение. В этом случае может оказаться, что с учтенными членами разложения требуемая точность еще не достигнута, а привлечение новых членов разложения только ухудшает ее. Кроме того, как известно, в асимптотических подходах учет следующих членов разложения обычно сопряжен с серьезными математическими проблемами.

Последнее замечание относится и к нашему подходу. Однако одно из его достоинств состоит как раз в том, что в нем можно ограничиться лишь главным членом разложения, увеличивая при этом точность аппроксимации за счет привлечения новых ДС уравнения Риккати. Уравнения (2.8) в этом случае становятся лишними, а искомая функция $y(x; \hbar)$ записывается в виде $y \approx [\epsilon(x; \hbar)]^{-1} = \kappa_0(x; \hbar)$, где $\kappa_0(x; \hbar)$ находится из системы алгебраических уравнений (2.10).

5. Свойства функции $\epsilon(x; \hbar)$ в случае линейного потенциала. Продемонстрируем эффективность данного подхода на примере линейного потенциала; определим главный член разложения с учетом одного и двух ДС уравнения Риккати и сравним оба варианта. Для этого рассмотрим пример квантовой задачи рассеяния, в которой электрон с энергией 0.1 эВ рассеивается на линейном потенциальном барьере $V(x) = (1 + 0.02x/d)V_0$, расположенном в интервале $[-d/2, d/2]$; $V_0 = 0.1$ эВ, $d = 1000$ Å. Начало координат в данном случае является точкой поворота первого порядка.

Рассмотрим точное решение уравнения Риккати для данного потенциала

$$y(x) = \rho \frac{Bi'(\rho x) + i \cdot Ai'(\rho x)}{Bi(\rho x) + i \cdot Ai(\rho x)}, \quad (5.1)$$

где Ai и Bi – функции Эйри, а Ai' и Bi' – соответственно их производные; i – мнимая единица; $\rho = 4000 \cdot 5487300^{1/3}$ (решение получено с помощью программы Maple). Это решение уравнения Риккати приводит к решению $\Psi(x) = Bi(\rho x) + i \cdot Ai(\rho x)$ уравнения (2.1). Сравним его с главным членом $y(x) \approx \kappa_0(x; \hbar)$ обобщенного ВКБ-разложения, где $\kappa_0(x; \hbar)$ находится из системы уравнений (2.10). Эта система сводится к алгебраическому уравнению для $\kappa_0(x; \hbar)$, которое при $N = 1$ и $N = 2$ имеет соответственно вид

$$\kappa_0^3 - \kappa_0 Q^{(0)} + \frac{Q^{(1)}}{2} = 0, \quad (5.2)$$

$$3\kappa_0^4 - 4\kappa_0^2 Q^{(0)} + \kappa_0 Q^{(1)} + (Q^{(0)})^2 - \frac{Q^{(2)}}{2} = 0. \quad (5.3)$$

Аналитические выражения для корней обоих уравнений известны.

Рис. 1. Абсолютное значение $|y(x)|$ точного решения уравнения Риккати (сплошная линия); $|\kappa_0^{(1)}(x; \hbar)|$ – его асимптотическое приближение (жирная сплошная линия), построенное с учетом одного дифференциального следствия; абсолютные значения других двух корней уравнения (5.2) показаны крестиками

На рис. 1 показаны абсолютные значения всех трех корней уравнения (5.2) и модуль точного решения (5.1) уравнения Риккати. Этот рисунок наглядно показывает, что среди трех корней уравнения (5.2) имеется один (обозначим его через

$\kappa_0^{(1)}(x; \hbar)$), который пригоден для аппроксимации точного решения (5.1) на всем интервале $[a, b]$.

Заметим, что вдали от точки поворота $x_0 = 0$ (когда членом с $Q^{(1)}$ в уравнении (5.2) можно пренебречь) этот корень пропорционален $\hbar^{-1}$; в самой точке поворота, где $Q^{(0)} = 0$, выполнено $|\kappa_0^{(1)}| = \sqrt[3]{|Q^{(1)}/2|} \sim \hbar^{-2/3}$ (см. также п. 3). Эти оценки не изменяются с ростом N . Кроме того, чем больше значение N , тем точнее главный член разложения аппроксимирует точное решение; в пределе $N \rightarrow \infty$ он дает точное решение задачи, поскольку для исследуемых потенциалов, заданных в ограниченном пространственном интервале, система уравнений (2.10) для κ_m в этом пределе эквивалентна системе уравнений (2.2) для $y^{(m)}$; $m = 0, 1, \dots$. Рисунки 2–4, где показаны результаты расчетов функции $\kappa_0^{(1)}(x; \hbar)$, полученные с учетом одного и двух ДС уравнения Риккати, наглядно демонстрируют это свойство: как видно, аппроксимация при $N = 2$ лучше, чем при $N = 1$.

Рис. 2. $|y(x)|$ (сплошная линия), $|\kappa_0^{(1)}(x; \hbar)|$ для $N = 1$ (жирная сплошная линия) и $N = 2$ (точки)

Заметим, что для любого конечного значения N в области $x > 0$ всегда найдется такая точка x_b , что $\text{Im}(\kappa_0^{(1)}(x; \hbar)) = 0$ для $x \geq x_b$ (см. рис. 4). В то же время, $\text{Im}(y(x)) \neq 0$ для $x \geq x_b$ (здесь важно подчеркнуть, что, хотя $|\text{Im}(y(x))| \ll |\text{Re}(y(x))|$ в этой области, $\text{Im}(y(x))$ порождает второе независимое вещественное решение ОУШ и, следовательно, не может быть отброшено). Что же касается приближенного (комплексного) решения $\kappa_0^{(1)}(x; \hbar)$, то в области $x \geq x_b$ оно теряет одно из независимых вещественных решений ОУШ.

Это означает, что в этом случае нужно увеличить число учитываемых ДС. Точка x_b сместится при этом вправо, расширяя область применимости комплексного решения $\kappa_0^{(1)}(x; \hbar)$. Это справедливо для любого гладкого потенциала, заданного на ограниченном пространственном интервале, поскольку в пределе $N \rightarrow \infty$ для любых таких потенциалов главный член разложения дает точное решение уравнения Риккати.

Рис. 3. $\text{Re}(y(x))$ (сплошная линия), $\text{Re}(\kappa_0^{(1)}(x; \hbar))$ для $N = 1$ (жирная сплошная линия) и $N = 2$ (точки)

Рис. 4. $\text{Im}(y(x))$ (сплошная линия), $\text{Im}(\kappa_0^{(1)}(x; \hbar))$ для $N = 1$ (жирная сплошная линия) и $N = 2$ (точки)

6. Заключение. Показано, что для любого гладкого потенциала, заданного на ограниченном пространственном интервале и имеющего классические точки поворота, включение в формализм ВКБ-разложений достаточного количества дифференциальных следствий уравнения Риккати дает главный член ВКБ-разложения, который имеет требуемую точность во всем исследуемом интервале, включая точки поворота. В данном подходе классические точки поворота не являются особыми точками: существует (комплексный) корень алгебраического уравнения для главного члена разложения, который дает приближенное решение уравнения Риккати, непрерывное во всей области задания потенциала, и, таким образом, известная в рамках традиционного метода ВКБ проблема вывода формул связи в этом подходе не возникает.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. Бом, *Квантовая теория*, Наука, М., 1965.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Теоретическая физика, **3**, Наука, М., 1974.

- [3] Н. Фреман, П. У. Фреман, *ВКБ-приближение*, Мир, М., 1967.
- [4] М. В. Федорюк, “Асимптотические методы в анализе”, *Анализ* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **13**, ВИНТИ, М., 1986, 93–210.
- [5] А. Найфе, *Введение в методы возмущений*, Мир, М., 1984.
- [6] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1983.
- [7] С. Славянов, В. Лай, *Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей*, Невский диалект, СПб., 2002.
- [8] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1982.
- [9] N. E. Maltsev, “New family of asymptotic solutions of Helmholtz equation”, *J. Math. Phys.*, **35**:3 (1994), 1387–1398.
- [10] N. L. Chuprikov, “The even asymptotic solution of the 1D-Schrödinger equation with non-degenerate turning points”, *Proc. of International Symposium “Physics and Engineering of Millimeter and Submillimeter Waves”* (Kharkov, Ukraine, 1994), **1**, Institute of Radiophysics and Electronics of National Academy of Science of Ukraine, Kharkov, 1994, 243–246.
- [11] N. L. Chuprikov, “The even asymptotic solution of the 1D-Schrödinger equation with N-fold turning points”, *Proc. of International Symposium “Physics and Engineering of Millimeter and Submillimeter Waves”* (Kharkov, Ukraine, 1994), **1**, Institute of Radiophysics and Electronics of National Academy of Science of Ukraine, Kharkov, 1994, 240–242.
- [12] Н. Л. Чуприков, *Равномерная асимптотика решения одномерного уравнения Шрёдингера с точками поворота*, Деп. в ВИНТИ № В94, 1994.
- [13] T. Hyouguchi, S. Adachi, M. Ueda, “Divergence-free WKB method”, *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002), 170404.

Н. Л. Чуприков

Томский государственный педагогический университет

E-mail: chnl@tspu.edu.ru

Поступило

20.07.2009