Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Завадский, Об одной канонической форме, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 514–519

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm866>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:14:15

УДК 512.64

ОБ ОДНОЙ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

А. Г. Завадский

Дополняется известный результат Длаба и Рингеля о приведении к каноническому виду вещественной прямоугольной матрицы формально-комплексными преобразованиями строк и столбцов.

Библиография: 2 названия.

В работе [1] В. Длаб и К. Рингель рассмотрели и решили матричную задачу о приведении к каноническому виду вещественной прямоугольной матрицы A четного размера $2m \times 2n$ преобразованиями типа PAQ , где P, Q – квадратные невырожденные *формально-комплексные* матрицы порядка $2m$ и $2n$ соответственно, т.е. матрицы, состоящие из 2×2 блоков типа

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

(через $\mathbb{R}$ обозначаем поле вещественных чисел). Были получены четыре канонические формы (i)–(iv) для этой задачи, из которых нас будут интересовать формы (iii) и (iv). Если в матрице A поставить на первые места нечетные строки (не меняя их порядка), а на последних местах оставить четные, и так же поступить со столбцами, то получим равносильную задачу о приведении вещественной матрицы $\tilde{A}$, разделенной на две горизонтальные и две вертикальные полосы

$$\tilde{A} = \begin{array}{cc|cc} \boxed{} & \boxed{} & & \\ \hline \boxed{} & \boxed{} & & \\ \hline & & \boxed{} & \boxed{} \\ & & \hline & & \boxed{} & \boxed{} \end{array} \begin{array}{l} m \\ m \\ n \\ n \end{array} \quad (1)$$

допустимыми преобразованиями ее строк и столбцов $\tilde{P}\tilde{A}\tilde{Q}$, определяемыми квадратными невырожденными вещественными матрицами типа

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} Z & T \\ -T & Z \end{pmatrix}$$

порядка $2m$ и $2n$ соответственно. В такой постановке канонические формы (iii) и (iv) из [1] принимают вид (iii') и (iv') соответственно:

$$\tilde{A} = \begin{array}{|c|c|} \hline E & 0 \\ \hline 0 & J(\lambda) \\ \hline \end{array}, \quad |\lambda| \leq 1, \quad \Theta^{[k]} = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{ccc} M & & \\ & M & \\ & & \ddots \\ 0 & & M \end{array} & \overbrace{\begin{array}{ccc} B & & \\ & B & \\ & & \ddots \\ 0 & & B \end{array}}^{k \text{ блоков}} \\ \hline \begin{array}{ccc} B & & \\ & B & \\ & & \ddots \\ 0 & & B \end{array} & \begin{array}{ccc} N & \Omega & \\ & N & \Omega & \\ & & N & \\ 0 & & & N & \Omega & \\ & & & & N \end{array} \\ \hline \end{array}, \quad (2)$$

где E – единичная матрица, $J(\lambda)$ – клетка Жордана с собственным числом λ и M, N, B, Ω – квадратные матрицы второго порядка вида

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем параметры a, b удовлетворяют условию: $b > 0$ или $b = 0$ и $a < 0$.

Мы покажем сейчас (опираясь на результаты [1]), что на самом деле матрица $\Theta^{[k]}$ приводится допустимыми преобразованиями к виду

$$\begin{array}{|c|c|} \hline E & 0 \\ \hline 0 & \Phi^{[k]} \\ \hline \end{array}, \quad (3)$$

где $\Phi^{[k]} = \Phi^{[k]}(p, q)$ – клетка Фробениуса с характеристическим многочленом $(x^2 + px + q)^k$, $k \geq 1$, $p^2 - 4q < 0$ и $q \leq 1$, и что, таким образом, канонические формы (iii') и (iv') могут быть объединены в одну.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Клеткой Фробениуса* принято называть квадратную матрицу во второй естественной нормальной форме (см. [2, гл. VI, § 6]) вида

$$\Phi^{[k]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

характеристический многочлен которой $x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0$ совпадает с минимальным и является k -й степенью неприводимого в рассматриваемом поле многочлена.

Введем в рассмотрение два новых вспомогательных параметра $u \geq 0$ и $v > 0$, через которые выразим параметры a, b формы (iv') и p, q формы (3) следующим образом:

$$\begin{cases} a = u^2 - v^2, \\ b = 2uv, \end{cases} \quad \begin{cases} p = \frac{2(u^2 + v^2 - 1)}{(1 + u)^2 + v^2}, \\ q = \frac{(1 - u)^2 + v^2}{(1 + u)^2 + v^2}. \end{cases} \quad (5)$$

Очевидно, $a + bi = (u + iv)^2$, и с использованием полярных координат $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$ ($0 < \varphi \leq \pi$ и $r > 0$) будем иметь $r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = u^2 + v^2$, откуда $p = 2(r - 1)/(1 + r + 2u)$, $q = (1 + r - 2u)/(1 + r + 2u)$ (заметим, что $(1 + r + 2u)(1 + r - 2u) = (a - 1)^2 + b^2$). Легко проверяется, что $q \leq 1$ и $p^2 - 4q < 0$ (и автоматически $q > 0$) при всех возможных $u \geq 0, v > 0$. Более того, $u = \sqrt{r} \cos(\varphi/2) = \sqrt{r(1 + \cos \varphi)/2} = \sqrt{(r + a)/2}$ и аналогично $v = \sqrt{(r - a)/2}$. Вводя удобные обозначения $\alpha = 1 - q$, $\beta = \sqrt{4q - p^2}$, $\gamma = 1 + q - p$, непосредственно проверяем, что

$$a = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2}, \quad b = \frac{2\alpha\beta}{\gamma^2}, \quad u = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad v = \frac{\beta}{\gamma} \quad (6)$$

(заметим, что $\gamma > 0$, поскольку $\beta > 0$, а $\alpha \geq 0$). Тем самым, устанавливаем биекции между указанными выше допустимыми значениями трех пар действительных параметров $a, b \leftrightarrow u, v \leftrightarrow p, q$, в частности, между парами чисел a, b с условием $b > 0$ или $b = 0$ и $a < 0$ и парами чисел p, q с условием $p^2 - 4q < 0$ и $q \leq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Явные формулы для любой из трех биекций вытекают непосредственно из (5), (6) и равенств $u = \sqrt{(r + a)/2}$, $v = \sqrt{(r - a)/2}$, откуда, в частности, получаем соотношения $u = (1 - q)/(1 + q - p)$, $v = \sqrt{4q - p^2}/(1 + q - p)$, а также

$$\begin{cases} a = \frac{(p^2 - 4q) + (q - 1)^2}{(1 + q - p)^2}, \\ b = \frac{2|1 - q|\sqrt{4q - p^2}}{(1 + q - p)^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} p = \frac{2(r - 1)}{1 + r\sqrt{2(r + a)}}, \\ q = \frac{1 + r - \sqrt{2(r + a)}}{1 + r + \sqrt{2(r + a)}} \end{cases} \quad (7)$$

(легко видеть, что неравенство $p^2 - 4q < 0$ влечет $1 + q - p > 0$).

Далее будем предполагать, что параметры a, b, u, v, p, q связаны описанными выше соотношениями.

Обозначим

$$F = F(p, q) = \begin{pmatrix} -p & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 1. Квадратные матрицы

$$\Theta = \begin{bmatrix} M & B \\ B & N \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix},$$

где E – единичная матрица второго порядка, переводятся друг в друга допустимыми преобразованиями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} Z & T \\ -T & Z \end{pmatrix},$$

где $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$, $Z = (z_{ij})$, $T = (t_{ij})$ – квадратные матрицы второго порядка с элементами

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_{21} = x_{22} = 1, & x_{12} &= -1; \\ y_{11} &= -\frac{1+u}{v}, & y_{21} &= \frac{1-u}{v}, & y_{12} &= \frac{r+u}{v}, & y_{22} &= \frac{r-u}{v}; \\ z_{11} &= 0, & z_{21} &= 2, & z_{12} &= -(1+r+2u), & z_{22} &= 1-r+2u; \\ t_{11} &= -\frac{1+r+2u}{v}, & t_{21} &= \frac{1-r}{v}, & t_{12} &= \frac{u(1+r+2u)}{v}, & t_{22} &= 2v + \frac{u(r-1)}{v}, \end{aligned}$$

убеждаемся непосредственным перемножением матриц в справедливости равенства $\tilde{P}\tilde{\Theta} = \Sigma\tilde{Q}$, причем $\det \tilde{P} = 16r/v^2 \neq 0$ (и, следовательно, $\det \tilde{Q} \neq 0$), что и требуется.

ЛЕММА 2. *Квадратные матрицы*

$$\Sigma^{[2]} = \begin{array}{|c|c|} \hline E & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} F & \Delta \\ 0 & F \end{array} \\ \hline \end{array}, \quad \Sigma \oplus \Sigma = \begin{array}{|c|c|} \hline E & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} F & 0 \\ 0 & F \end{array} \\ \hline \end{array},$$

где E – единичная матрица порядка 4, не переводятся друг в друга допустимыми преобразованиями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$C = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}, \quad F^{[2]} = \begin{pmatrix} F & \Delta \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

и предположим, что $\tilde{P}(\Sigma \oplus \Sigma) = \Sigma^{[2]}\tilde{Q}$ для некоторых невырожденных матриц

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} Z & T \\ -T & Z \end{pmatrix},$$

составленных из квадратных матриц четвертого порядка X, Y, Z, T . Тогда, как легко видеть, $Z = X$, $T = YC$ и равенство $\tilde{P}(\Sigma \oplus \Sigma) = \Sigma^{[2]}\tilde{Q}$ равносильно двум следующим: $XC = F^{[2]}X$ и $YC^{-1} = F^{[2]}Y$, где

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} F^{-1} & 0 \\ 0 & F^{-1} \end{pmatrix}, \quad F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/q \\ 1 & -p/q \end{pmatrix}.$$

Пусть $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$.

1) Расписывая первое равенство $XC = F^{[2]}X$ поэлементно, условимся обозначать через (i, j) уравнение, получаемое приравниванием стоящих на месте (i, j) элементов в левой и правой частях данного матричного равенства. Тогда $x_{21} = -qx_{12}$ и $x_{23} = -qx_{14}$ из уравнений $(1, 1)$ и $(1, 3)$ соответственно; $x_{34} = 0$ из уравнений $(1, 3)$ и $(2, 4)$; $x_{32} = 0$

из (1, 1) и (2, 2), откуда $x_{41} = x_{44} = 0$ из (3, 1) и (4, 4). Значит, $x_{33} = x_{44} = 0$ с учетом уравнений (1, 4), (2, 3) и (3, 4) и $x_{31} = x_{42} = 0$ с учетом (1, 2), (2, 1) и (3, 2), т.е. две последние строки матрицы X являются нулевыми.

2) Расписывая второе равенство $YC^{-1} = F^{[2]}Y$ поэлементно (и опять обозначая соответствующие уравнения парами индексов (i, j)), рассмотрим два случая.

а) Пусть $q \neq 1$. Исключая из системы уравнений (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2) переменные y_{32}, y_{42} и сокращая два полученных уравнения на $q - 1$, получим систему однородных уравнений относительно y_{31}, y_{41} вида

$$\begin{cases} py_{41} + (1 + q - p^2)y_{31} = 0, \\ (q + 1)y_{41} - pqy_{31} = 0 \end{cases}$$

с определителем $p^2 - (q + 1)^2$, отличным от нуля (заметим, что $|p| \neq q + 1$, иначе $p^2 - 4q = (q - 1)^2 \geq 0$). Таким образом, $y_{31} = y_{41} = 0$, откуда непосредственно из уравнений (3, 1), (4, 1) имеем $y_{32} = y_{42} = 0$.

Замечая теперь, что система уравнений (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4) симметрична системе (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), т.е. получается из нее заменами переменных $y_{31} \leftrightarrow y_{33}$, $y_{41} \leftrightarrow y_{43}$, $y_{32} \leftrightarrow y_{34}$ и $y_{42} \leftrightarrow y_{44}$, заключаем, что также $y_{33} = y_{43} = y_{34} = y_{44} = 0$. Следовательно, две последние строки матрицы Y являются нулевыми.

б) Пусть $q = 1$. Здесь из системы (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) получаем $y_{31} = y_{32} = 0$, откуда из уравнений (3, 1), (4, 1) имеем $y_{41} = y_{42} = 0$. Ввиду упомянутой выше симметрии имеем $y_{33} = y_{34} = 0$ и $y_{43} = y_{44} = 0$, т.е. опять две последние строки матрицы Y являются нулевыми.

Поскольку, как установлено ранее, две последние строки X тоже нулевые, выполнено $\det \tilde{P} = 0$, что дает противоречие и завершает доказательство леммы.

Из лемм 1, 2 и леммы В из [1] непосредственно вытекает, что матрица $\Sigma^{[2]}$, как и Σ , неразложима и, следовательно, при любом $k \geq 1$ неразложима матрица

$$\Sigma^{[k]} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F^{[k]} \end{pmatrix}, \quad \text{где } F^{[k]} = \left. \begin{array}{ccccccc} F & \Delta & & & & & \\ & F & \Delta & & & & 0 \\ & & F & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & F & \Delta \\ & & & & & & F \end{array} \right\} k \text{ блоков}.$$

Более того, матрицы $\Sigma^{[k]}$ и $\Theta^{[k]}$ переводятся друг в друга допустимыми преобразованиями.

Заметим, что матрица $F^{[k]}$ имеет характеристический полином $(x^2 + px + q)^k = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0$ ($n = 2k$) и приводится преобразованиями подобия над $\mathbb{R}$ к виду $\Phi^{[k]}$, где $\Phi^{[k]}$ — стандартная клетка Фробениуса вида (4). Мы будем каждую из матриц $F^{[k]}$ и $\Phi^{[k]}$ называть *клеткой Фробениуса* (в некоторых ситуациях удобно отдавать предпочтение в использовании клетке $F^{[k]}$, не содержащей громоздких коэффициентов α_i). Будем рассматривать также аналогичные $F^{[k]}$ клетки Фробениуса типа $J_k(\lambda) = J(\lambda)$, соответствующие неприводимым полиномам первой степени и называемые, как хорошо известно, *клетками Жордана*.

Итак, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА. Матрица $\Theta^{[k]}$ приводится допустимыми преобразованиями к виду

$$\begin{array}{|c|c|} \hline E & 0 \\ \hline 0 & X \\ \hline \end{array},$$

где можно выбрать по желанию $X = \Phi^{[k]}$ или $X = F^{[k]}$, причем параметры a, b и p, q связаны соотношениями (7).

СЛЕДСТВИЕ. Матричная задача (1), равносильная задаче, рассмотренной в [1], имеет следующие канонические формы неразложимых матриц: формы (i') и (ii'), получающиеся указанной выше перестановкой строк и столбцов форм (i) и (ii) из [1], а также форму

$$\begin{array}{|c|c|} \hline E & 0 \\ \hline 0 & X \\ \hline \end{array},$$

объединяющую формы (iii') и (iv'), где X – клетка Фробениуса, характеристический полином которой является степенью произвольного неприводимого над $\mathbb{R}$ полинома (квадратичного либо линейного) со старшим коэффициентом 1 и свободным членом q с условием $|q| \leq 1$.

Было бы интересно найти прямое доказательство полученного результата, опирающееся лишь на стандартные факты теории линейных операторов в векторном пространстве над полем $\mathbb{R}$.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dlab V., Ringel C. M. Normal forms of real matrices with respect to complex similarity // Linear Algebra Appl. 1977. V. 17. № 2. P. 107–124.
- [2] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

Киевский национальный университет строительства и архитектуры
E-mail: zavad@public.icyb.kiev.ua

Поступило
03.09.1998
Исправленный вариант
24.09.1999