Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Чуанси Жу, Киунг Ли, Применения индекса неподвижной точки в PN -пространствах Менгера, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 5, 773–779

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 11:44:15

Применения индекса неподвижной точки в RN-пространствах Менгера

Чуанси Жу, Киуйинг Ли

В данной работе рассматриваются случаи применения индекса неподвижной точки нелинейного оператора в RN-пространствах Менгера. Получены теоремы существования неподвижных точек для случая компактного непрерывного оператора. Одновременно рассматриваются условия существования решения для некоторого класса дифференциальных уравнений в полном RN-пространстве Менгера и доказывается теорема существования решения для некоторого класса дифференциальных уравнений.

Библиография: 12 названий.

1. Предварительные сведения. Данная работа продолжает исследования, начатые в работе [1]. До настоящего времени дифференциальные уравнения в RN-пространстве Менгера не привлекали должного внимания. В предыдущей работе было введено понятие индекса неподвижной точки нелинейного оператора в RN-пространстве Менгера. В работе [2] Чанг отметил, что всякое метрическое пространство можно рассматривать как частный случай вероятностного метрического пространства.

Всюду далее используются понятия, введенные в работах [2], [3].

Пусть $\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел и $\mathbb{R}^+$ – множество неотрицательных действительных чисел. Отображение $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется *функцией распределения*, если оно не убывает, остается непрерывным, $\inf F = 0$ и $\sup F = 1$. Через D обозначим множество всех функций распределения.

Пусть H – некоторая специальная функция распределения, определенная соотношениями

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Вероятностное нормированное пространство (кратко, *RN-пространство*) определяется упорядоченной парой (E, F) , где E – действительное линейное пространство и F – отображение пространства E в D (функцию распределения $F(x)$ будем обозначать через f_x), удовлетворяющее следующим условиям:

Работа выполнена при поддержке Национального Фонда Естественных Наук Китая (10761007 и 11071108), Фонда Естественных Наук провинции Кiangси (2007GZS2051), и Фонда Поддержки Молодых Ученых Комиссии по Образованию провинции Кiangси (GJJ10086).

(PN-1) $f_x(0) = 0$ при всех $x \in E$;

(PN-2) $f_x(t) = H(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$, где θ – нулевой элемент пространства E ;

(PN-3) $f_{\alpha x}(t) = f_x(t/|\alpha|)$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$;

(PN-4) если $f_x(t_1) = 1$, $f_y(t_2) = 1$, то $f_{x+y}(t_1 + t_2) = 1$.

PN-Пространство Менгера определяется тройкой (E, F, Δ) , где (E, F) – PN-пространство и Δ – t -норма, удовлетворяющая следующим условиям:

(PN-5) $f_{x+y}(t_1 + t_2) \geq \Delta(f_x(t_1), f_y(t_2))$ при всех $x, y \in E$ и $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$.

ТЕОРЕМА А. Пусть (E, F, Δ) – полное PN-пространство Менгера, где t -норма Δ удовлетворяет условию $\Delta(t, t) \geq t$ при всех $t \in [0, 1]$, и $X \subset E$ – некоторый T -ретракт. Для любого ограниченного подмножества U множества X и любого компактного непрерывного оператора $T: \bar{U} \rightarrow X$, не имеющего неподвижных точек на ∂U , существует целое число $\text{Ind}(T, U, X)$ (которое называется индексом неподвижной точки оператора T (над U относительно X)), удовлетворяющее следующим условиям:

(1) (нормировка) для любого постоянного оператора T , отображающего $\bar{U}$ в U ,

$$\text{Ind}(T, U, X) = 1;$$

(2) (аддитивность) для любой пары непересекающихся открытых подмножеств $U_1, U_2 \subset U$ таких, что T не имеет неподвижных точек в $\bar{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$, выполняется соотношение

$$\text{Ind}(T, U, X) = \text{Ind}(T, U_1, X) + \text{Ind}(T, U_2, X),$$

где $\text{Ind}(T, U_k, X) = \text{Ind}(T|_{\bar{U}_k}, U_k, X)$, $k = 1, 2$;

(3) (гомотопическая инвариантность) для любого компактного непрерывного оператора $H: [0, 1] \times \bar{U} \rightarrow X$, удовлетворяющего соотношению $H(s, x) \neq x$ при всех $(s, x) \in [0, 1] \times \partial U$, индекс $\text{Ind}(H(s, \cdot), U, X)$ не зависит от $s \in [0, 1]$;

(4) (постоянство) если Y – T -ретракт множества X и $T(U) \subset Y$, то

$$\text{Ind}(T, U, X) = \text{Ind}(T, U \cap Y, Y),$$

где $\text{Ind}(T, U \cap Y, Y) = \text{Ind}(T|_{\bar{U} \cap Y}, U \cap Y, Y)$;

(5) (вырезание) для любого открытого подмножества $V \subset U$ такого, что T не имеет неподвижных точек в $\bar{U} \setminus V$, выполняется соотношение

$$\text{Ind}(T, U, X) = \text{Ind}(T, V, X);$$

(6) (свойство решения) если $\text{Ind}(T, U, X) \neq 0$, то T имеет по крайней мере одну неподвижную точку в U .

2. Применения индекса неподвижной точки в PN-пространствах Менгера. В этом разделе рассмотрены некоторые случаи применения индекса неподвижной точки компактного непрерывного оператора в PN-пространствах Менгера.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (E, F, Δ) – полное PN-пространство Менгера с t -нормой Δ , удовлетворяющей условию $\Delta(t, t) \geq t$ при всех $t \in [0, 1]$. Пусть $X \subset E$ – T -ре-тракт пространства E . Пусть для любого ограниченного открытого подмножества $U \subset X$ $T: \bar{U} \rightarrow X$ – компактный непрерывный оператор и $\theta \in U$. Если существует линейный оператор $B: E \rightarrow E$ и T удовлетворяет условию

$$f_{B(Tx)(t)} > f_{Bx}(t) \quad \text{при всех } x \in \partial U, \quad t > 0, \quad (1)$$

то $(1/\mu)T$, $\mu \geq 1$, имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку в $\bar{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $B: E \rightarrow E$ – линейный оператор, то $f_{Bx} \in D$ – значимая функция распределения. Так как $T: \bar{U} \rightarrow X$ – компактный непрерывный оператор, то $f_{B(Tx)} \in D$ – также значимая функция распределения.

Без ограничения общности можно считать, что $Tx \neq \mu x$ при всех $x \in \partial U$ и $\mu \geq 1$ (иначе, утверждение теоремы очевидно). Так как $T: \bar{U} \rightarrow X$ – компактный непрерывный оператор, то $(1/\mu)T$, $\mu \geq 1$, – также компактный непрерывный оператор.

Пусть $h(s, x) = (s/\mu)Tx$ при всех $s \in [0, 1]$ и $x \in \bar{U}$, $\mu \geq 1$. Докажем, что

$$h(s, x) \neq x \quad \text{при всех } (s, x) \in [0, 1] \times \partial U.$$

Предположим противное. Тогда существуют $s_0 \in [0, 1]$ и $x_0 \in \partial U$ такие, что $h(s_0, x_0) = x_0$, т.е.

$$\frac{s_0}{\mu}Tx_0 = x_0.$$

Очевидно, что $s_0 \neq 0$ (иначе было бы $x_0 = \theta \in U$, что противоречит условию $x_0 \in \partial U$) и $s_0 \neq 1$ (мы предположили, что $Tx \neq \mu x$ при всех $x \in \partial U$ и $\mu \geq 1$). Таким образом, $s_0 \in (0, 1)$. Пусть $\alpha_0 = s_0/\mu$; тогда $0 < \alpha_0 < 1$ и

$$x_0 = \alpha_0Tx_0, \quad \text{где } x_0 \in \partial U.$$

Таким образом, имеем

$$f_{Bx_0}(t) = f_{B(\alpha_0Tx_0)}(t) \quad \text{при всех } t > 0.$$

Поскольку B – линейный оператор, имеем

$$f_{Bx_0}(t) = f_{B(Tx_0)}\left(\frac{t}{\alpha_0}\right) \quad \text{при всех } t > 0.$$

В силу (1) получим

$$f_{Bx_0}(t) = f_{B(Tx_0)}\left(\frac{t}{\alpha_0}\right) > f_{Bx_0}\left(\frac{t}{\alpha_0}\right) \quad \text{при всех } t > 0.$$

Так как f_{Bx_0} – неубывающая функция, то $t > t/\alpha_0$. Следовательно, $\alpha_0 > 1$, что противоречит условию $0 < \alpha_0 < 1$. Таким образом, имеем $h(s, x) \neq x$ при всех $(s, x) \in [0, 1] \times \partial U$.

Из свойств гомотопической инвариантности и нормировки индекса неподвижной точки получим

$$\text{Ind}\left(\frac{1}{\mu}T, U, X\right) = \text{Ind}(\theta, U, X) = 1.$$

В силу свойства решения для индекса неподвижной точки оператор $(1/\mu)T$, $\mu \geq 1$, имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку в $\bar{U}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. (I) Условия теоремы 1 отличаются от условий теоремы 2.1.1 в работе [4]:

- (а) в теореме 2.1.1, линейный оператор $B: E \rightarrow E$ удовлетворяет условию $Bx \neq x$ при всех $x \in \partial W$, тогда как в теореме 1 не требуется, чтобы оператор B удовлетворял этому условию;
- (б) в теореме 2.1.1, оператор $T: \overline{W} \rightarrow E$ является компактным непрерывным оператором, и $W \subset E$ – открытое подмножество, тогда как компактный непрерывный оператор $T: \overline{U} \rightarrow X$ в теореме 1 определяет открытое подмножество U множества X , а X является T -ретрактом пространства E .

(II) Теорема 1 и теорема 2.1.1 доказываются различными способами. Доказательство теоремы 2.1.1 основано на понятии топологической степени, тогда как теорема 1 доказывается с использованием понятия индекса неподвижной точки.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (E, F, Δ) – полное PN-пространство Менгера с t -нормой Δ , удовлетворяющей условию $\Delta(t, t) \geq t$ при всех $t \in [0, 1]$. Пусть $X \subset E$ – T -ретракт пространства E . Пусть $\theta \in U$ для любого ограниченного открытого подмножества $U \subset X$. Пусть также $T: \overline{U} \rightarrow X$ – компактный непрерывный оператор, удовлетворяющий условию

$$f_{\lambda x + (1-\lambda)(Tx)}(t) < f_{Tx}(t) \quad \text{при всех } x \in \partial U, \quad \lambda \in (0, 1], \quad t > 0. \quad (2)$$

Тогда оператор $(1/\mu)T$, $\mu \geq 1$, имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку в $\overline{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $T: \overline{U} \rightarrow X$ – компактный непрерывный оператор, очевидно, что $(1/\mu)T: \overline{U} \rightarrow X$ – также компактный непрерывный оператор для любого $\mu \geq 1$.

Без ограничения общности можно предположить, что $Tx \neq \mu x$ при всех $x \in \partial U$ и $\mu \geq 1$ (иначе утверждение теоремы очевидно).

Пусть $h(s, x) = (s/\mu)Tx$ при всех $s \in [0, 1]$ и $x \in \overline{U}$, $\mu \geq 1$. Докажем, что

$$h(s, x) \neq x \quad \text{при всех } (s, x) \in [0, 1] \times \partial U.$$

Предположим противное. Тогда существуют $s_0 \in [0, 1]$ и $x_0 \in \partial U$ такие, что $h(s_0, x_0) = x_0$, т.е.

$$\frac{s_0}{\mu}Tx_0 = x_0.$$

Очевидно, что $s_0 \neq 0$ (иначе было бы $x_0 = \theta \in U$, что противоречит условию $x_0 \in \partial U$) и $s_0 \neq 1$ (мы предположили, что $Tx \neq \mu x$ при всех $x \in \partial U$ и $\mu \geq 1$). Таким образом, $s_0 \in (0, 1)$. Пусть $\alpha_0 = s_0/\mu$; тогда $0 < \alpha_0 < 1$ и

$$x_0 = \alpha_0 Tx_0, \quad x_0 \in \partial U.$$

Из (2) следует, что

$$\begin{aligned} f_{\lambda x_0 + (1-\lambda)(Tx_0)}(t) &= f_{\lambda \alpha_0 Tx_0 + (1-\lambda)(Tx_0)}(t) \\ &= f_{Tx_0} \left(\frac{t}{\lambda \alpha_0 + 1 - \lambda} \right) < f_{Tx_0}(t), \quad \lambda \in (0, 1], \quad t > 0. \end{aligned}$$

Поскольку $f_{T_{x_0}}$ не убывает, $t > t/(\lambda\alpha_0 + 1 - \lambda)$, и, следовательно, $\lambda\alpha_0 + 1 - \lambda > 1$, т.е. $\alpha_0\lambda - \lambda > 0$, $\lambda \in (0, 1]$, имеем $\alpha_0 > 1$, что противоречит условию $0 < \alpha_0 < 1$. Таким образом, $h(s, x) \neq x$ при всех $(s, x) \in [0, 1] \times \partial U$.

Из свойств гомотопической инвариантности и нормировки индекса неподвижной точки получим

$$\text{Ind}\left(\frac{1}{\mu}T, U, X\right) = \text{Ind}(\theta, U, X) = 1.$$

В силу свойства решения для индекса неподвижной точки оператор $(1/\mu)T$, $\mu \geq 1$, имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку в $\bar{U}$.

Наконец, учтем, что дифференциальное уравнение в полном РН-пространстве Менгера имеет решение.

Пусть (E, F, Δ) – полное РН-пространство Менгера, где Δ удовлетворяет условию $\Delta(t, t) \geq t$ при всех $t \in [0, 1]$, и пусть $C([0, \delta], E)$ – множество всех операторов, непрерывных в топологии пространства (E, F, Δ) , т.е. для любого $x(\cdot) \in C([0, \delta], E)$ $x(\cdot)$ отображает $[0, \delta]$ в E и это отображение непрерывно. Определим оператор $\tilde{f}: C([0, \delta], E) \rightarrow D$ следующим образом:

$$\tilde{f}_{x(\cdot)}(h) = \lim_{k \rightarrow h^-} \inf_{s \in [0, \delta]} f_{x(s)}(k),$$

где $\tilde{f}_{x(\cdot)}$ обозначает $\tilde{f}x(\cdot)$, а $\tilde{f}_{x(\cdot)}(t)$ обозначает величину функции $\tilde{f}_{x(\cdot)}$ в точке $t \in \mathbb{R}$.

ЛЕММА 1 [5]. Пусть (E, F, Δ) – РН-пространство Менгера. Тогда $(C([0, \delta], E), \tilde{f}, \Delta)$ – РН-пространство Менгера; если (E, F, Δ) полное, то $(C([0, \delta], E), \tilde{f}, \Delta)$ также полное.

Далее докажем теорему существования решений для некоторого класса дифференциальных уравнений таких, что

$$\begin{cases} x'(s) = g(s, x), \\ x(0) = \theta. \end{cases} \quad (3)$$

Для любых $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$ предположим, что $U_\theta(\varepsilon, \lambda) = \{x \in E : f_x(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$ и $g(s, x): \mathbb{R} \times \overline{U_\theta(\varepsilon, \lambda)} \rightarrow E$ непрерывны и удовлетворяют условиям

- (а) $f_{g(s, x)}(t) > f_x(t)$ при всех $t > 0$, $x \in \partial(U_\theta(\varepsilon, \lambda))$;
- (б) при всех $s \in \mathbb{R}$, $g(s, \overline{U_\theta(\varepsilon, \lambda)})$ определяет относительно компактное подмножество пространства E .

ТЕОРЕМА 3. Если выполнены вышеуказанные условия (а) и (б), то дифференциальное уравнение (3) имеет, по крайней мере, одно решение в $C([0, \delta], E)$, где $0 < \delta \leq 1$ и (E, F, Δ) – полное РН-пространство Менгера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что дифференциальное уравнение (3) эквивалентно интегральному уравнению

$$x(s) = \int_0^s g(k, x(k)) dk.$$

Пусть

$$W = \{x(\cdot) \in C([0, \delta], E) : x(0) = \theta, f_{x(s)}(\varepsilon) > 1 - \lambda, s \in [0, \delta]\}.$$

Очевидно, что $C([0, \delta], E)$ – T -ретракт пространства $C([0, \delta], E)$, W – некоторое открытое подмножество пространства $C([0, \delta], E)$, и $\theta \in W$.

Пусть

$$Tx(s) = \int_0^s g(k, x(k)) dk, \quad (4)$$

где $x(\cdot) \in C([0, \delta], E)$, $x(k) \in \overline{U_\theta(\varepsilon, \lambda)}$ при всех $k \in [0, \delta]$.

Очевидно, что $T: \overline{W} \rightarrow C([0, \delta], E)$ – компактный непрерывный оператор. Пусть $x(\cdot) \in \partial W$; тогда из (4) получим

$$f_{Tx(s)}(t) = f_{\int_0^s g(k, x(k)) dk}(t).$$

Для любого заданного $s \in [0, \delta]$ и любого $t > 0$ в силу [5] существует непрерывная последовательность $\{t_s^n\} \subset [0, \delta]$ функций $f_{\int_0^s g(k, x(k)) dk}(t)$ такая, что $t_s^n \rightarrow t^-$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$f_{\int_0^s g(k, x(k)) dk}(t) \geq f_{\int_0^s g(k, x(k)) dk}(t_s^n) = \lim_{\substack{\max(\Delta s_i) \rightarrow 0 \\ 1 \leq i \leq N}} f_{\sum_{i=1}^N g(\xi_i, x(\xi_i)) \Delta s_i}(t_s^n),$$

где $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_N = s$, $\Delta s_i = \xi_i - \xi_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} f_{Tx}(t) &\geq \lim_{\substack{\max(\Delta s_i) \rightarrow 0 \\ 1 \leq i \leq N}} \min \left\{ f_{g(\xi_i, x(\xi_i))} \left(\frac{t_s^n}{s} \right) \right\} \geq \inf_{k \in [0, \delta]} f_{g(k, x(k))} \left(\frac{t_s^n}{s} \right) \\ &\geq \inf_{k \in [0, \delta]} f_{x(k)} \left(\frac{t_s^n}{s} \right) \geq \inf_{s \in [0, \delta]} f_{x(s)} \left(\frac{t_s^n}{\delta} \right), \end{aligned}$$

т.е.

$$f_{Tx(s)} \geq \inf_{s \in [0, \delta]} f_{x(s)} \left(\frac{t_s^n}{\delta} \right).$$

Пусть $t_s^n \rightarrow t^-$. Возьмем предел в верхнем неравенстве. По определению функции распределения в $(C([0, \delta], E), \tilde{f}, \Delta)$ имеем

$$f_{Tx(s)}(t) \geq \lim_{t_s^n \rightarrow t^-} \inf_{s \in [0, \delta]} f_{x(s)} \left(\frac{t_s^n}{\delta} \right) = \tilde{f}_{x(s)} \left(\frac{t}{\delta} \right),$$

откуда следует, что

$$\inf_{s \in [0, \delta]} f_{Tx(s)} \geq \tilde{f}_{x(s)} \left(\frac{t}{\delta} \right).$$

Далее получим

$$\lim_{k \rightarrow h^-} \inf_{s \in [0, \delta]} f_{Tx(s)}(t) \geq \lim_{k \rightarrow h^-} \tilde{f}_{x(s)} \left(\frac{t}{\delta} \right). \quad (5)$$

Так как $0 < \delta \leq 1$, из (5) имеем

$$\tilde{f}_{Tx(\cdot)}(h) \geq \tilde{f}_{x(\cdot)} \left(\frac{h}{\delta} \right) \geq \tilde{f}_{x(\cdot)}(h),$$

т.е.

$$\tilde{f}_{Tx(\cdot)}(h) \geq \tilde{f}_{x(\cdot)}(h).$$

Положим $B = I$ в теореме 1. Из вышесказанного известно, что T удовлетворяет всем условиям теоремы 1, и, таким образом, $(1/\mu)T$, $\mu \geq 1$, имеет по крайней мере одну неподвижную точку в $\overline{W}$. В частности, пусть $\mu = 1$. Тогда существует $x^*(\cdot) \in \overline{W}$ такая, что $Tx^*(\cdot) = x^*(\cdot)$, т.е. уравнение

$$Tx(s) = \int_0^s g(k, x(k)) dk = x(s) \quad \text{при всех } s \in [0, \delta]$$

имеет решение в $C([0, \delta], E)$.

Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Киунинг Ли, Чуангси Жу, “Индекс неподвижной точки нелинейного оператора в PN-пространствах Менгера”, *Матем. заметки*, **90**:1 (2011), 104–112.
- [2] S. S. Chang, J. C. Yeol, M. K. Shi, *Probabilistic Metric Spaces and Nonlinear Operator Theory*, Sichuan Univ. Press, Chengdu, 1994.
- [3] S. Zhang, Y. Chen, “Topological degree theory and fixed point theorems in probabilistic metric spaces”, *Appl. Math. Mech. (English Ed.)*, **10**:6 (1989), 495–505.
- [4] M. Y. Ye, *Research on Some Problems of Nonlinear Operators in the PM-Space*, Master’s degree thesis, Nanchang University, 2006.
- [5] S. S. Chang, B. S. Lee, Y. J. Cho, Y. Q. Chen, S. M. Kang, J. S. Jung, “Generalized contraction mapping principle and differential equations in probabilistic metric spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**:8 (1996), 2367–2376.
- [6] Q. Li, C. Zhu, “Some new fixed points in a Z-P-S space”, *J. Systems Sci. Math. Sci.*, **28**:4 (2008), 400–405.
- [7] C. Zhu, “Several nonlinear operator problems in the Menger PN space”, *Nonlinear Anal.*, **65**:7 (2006), 1281–1284.
- [8] C. Zhu, “Generalizations of Krasnoselskii’s theorem and Petryshyn’s theorem”, *Appl. Math. Lett.*, **19**:7 (2006), 628–632.
- [9] C. X. Zhu, Z. B. Xu, “A class of random operator equations in the Hilbert space”, *Acta Math. Sinica (Chin. Ser.)*, **47**:4 (2004), 641–646.
- [10] C. X. Zhu, “Some theorems in the X-M-PN Space”, *Appl. Math. Mech. (English Ed.)*, **21**:2 (2000), 181–184.
- [11] C. Zhu, Z. Xu, “Inequalities and solution of an operator equation”, *Appl. Math. Lett.*, **21**:6 (2008), 607–611.
- [12] C. Zhu, C. Chen, “Calculations of random fixed point index”, *J. Math. Anal. Appl.*, **339**:2 (2008), 839–844.

Чуанси Жу

Nanchang University, Republic of China

E-mail: chuanxizhu@126.com

Поступило

03.03.2009

Киуйинг Ли

Nanchang University, Republic of China

E-mail: lqywsh@163.com