Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Д. Бхат, К. Рамачандра, Замечание о факториалах, являющихся произведениями факториалов, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 3, 350–354

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8664>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:01:03

УДК 511

Замечание о факториалах, являющихся произведениями факториалов

К. Дж. Бхат, К. Рамачандра

В 1993 г. П. Эрдёш установил, что если $n! = a!b!$ при условии $1 < a \leq b$, то разность между n и b не превосходит $5 \log \log n$ для достаточно больших n . В этой статье мы уменьшаем эту верхнюю оценку до $((1 + \epsilon)/\log 2) \log \log n$ и обобщаем это на случай уравнения $a_1!a_2!\dots a_k! = n!$. В недавней работе Ф. Луки было показано, что $n - b = 1$ для достаточно больших n при условии, что верна абс-гипотеза.

Библиография: 2 названия.

Посвящается светлой памяти профессора А. А. Карацубы

В статье, опубликованной в 1993 г. в журнале American Mathematical Monthly, Эрдёш доказал, что если $n! = a!b!$, где $n > b > a$, то $n - b < 5 \log \log n$ для достаточно больших n , где $\log x$ означает натуральный логарифм от x . Мы обобщаем эту теорему со случая двух на случай многих факториалов. Это уравнение имеет тривиальное решение, когда $n = b + 1 = a!$. В настоящее время известно только одно нетривиальное решение этого уравнения – это $10! = 6!7!$. Вопрос о том, является ли число нетривиальных решений конечным или бесконечным, в настоящее время открыт. Соответствующая гипотеза может быть обобщена на случай более двух факториалов. Иными словами, если

$$n! = \left(\prod_{j=1}^k a_j! \right) b!, \quad \text{где } 1 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq b < n,$$

то существует тривиальное решение

$$n = b + 1 = \prod_{j=1}^k a_j!.$$

Единственное известное нетривиальное решение, помимо уже упомянутого, – это $16! = 14!5!2!$. Хорошее исследование этой задачи сделано Лукой в [1].

ТЕОРЕМА. Для любого $\epsilon > 0$ существует n_ϵ , зависящее от ϵ , такое, что для всех $n > n_\epsilon$ выполнена следующая импликация: если

$$n! = \left(\prod_{j=1}^k a_j! \right) b!, \quad \text{где } 1 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq b < n,$$

то

$$n - b < \frac{1 + \epsilon}{\log 2} (\log \log n).$$

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Сначала мы построим функцию, считающую число множителей 2 в каждом из множителей-факториалов. Затем мы получим верхнюю и нижнюю оценки этой функции и выведем соотношение

$$n - b < \frac{(\log_2 b) \log((n - b) \log n)}{\log b - \log((n - b) \log n)}.$$

Отсюда, используя полученные нами неравенства, мы выведем нужный нам результат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала определим функцию

$$\alpha(n) = \sum_{j=1}^{\infty} [2^{-j}n],$$

где $[x]$ означает максимальное целое, меньшее или равное x .

Читателю следует обратить внимание на три утверждения, относящихся к функции $\alpha(n)$:

- 1) $\alpha(n) < n$;
- 2) $\alpha(n)$ считает количество множителей 2 в $n!$;
- 3) выполнено

$$\alpha(n) = \sum_{j=1}^{\infty} [2^{-j}n] = \sum_{j=1}^{[\log_2 n]} [2^{-j}n] > \sum_{j=1}^{[\log_2 n]} (2^{-j}n - 1) \geq n - \frac{\log n}{\log 2} - 1.$$

Из утверждения 1) следует, что

$$n! = \left(\prod_{j=1}^k a_j! \right) b!$$

влечет

$$\alpha(n) = \sum_{j=1}^k \alpha(a_j) + \alpha(b),$$

поскольку $n!$ должен иметь столько же множителей 2, сколько и $(\prod_{j=1}^k a_j!)b!$.

Есть еще один полезный факт, следующий из этих трех утверждений:

$$(n - b) \log n > a_j \quad \text{для всех } 0 \leq j \leq k.$$

Если a_j мало, то это утверждение очевидно следует из 1)–3) для достаточно больших n . Если $n - b > 1$, это следует из 1)–3) с учетом оценки

$$\begin{aligned} n - b &> \alpha(n) - \alpha(b) - \log_2 n \geq \alpha(a_j) - \log_2 n \\ &> a_j - \log_2 a_j - \log_2 n - 1 > a_j(1 - \log 2) - \log_2 n, \end{aligned}$$

откуда

$$a_j < 3(n - b) + 3 \log_2 n < (n - b) \log n$$

для достаточно больших n и в предположении, что решение нетривиально. В противном случае уравнению будет удовлетворять тривиальное решение, откуда следует $n \geq a_j!$, что, в свою очередь, влечет $\log n > a_j$ при условии, что n достаточно большое.

Мы также будем использовать неравенство

$$\alpha(a_j) > \frac{\log a_j!}{\log((n-b)\log n)}.$$

Докажем его.

Сначала заметим, что оно выполнено для $1 < a_j < 18$ — это ясно, если считать, что n достаточно большое, а $n - b \geq 1$. В противном случае имеем

$$\begin{aligned} \alpha(a_j) &\geq a_j - \frac{\log a_j}{\log 2} - 1 \geq \frac{a_j \log a_j - (\log a_j)^2 / \log 2 - \log a_j}{\log a_j} \\ &\geq \frac{\log(a_j^{a_j - \log a_j / \log 2 - 1})}{\log a_j} \geq \frac{\log(a_j^{a_j - \log a_j / \log 2 - 1})}{\log(n-b)\log n}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено в силу оценки $(n-b)\log n > a_j$. Осталось показать, что

$$a_j^{a_j - \log a_j / \log 2 - 1} > a_j!.$$

Имеем

$$\begin{aligned} a_j^{a_j - \log a_j / \log 2 - 1} &\geq a_j^{a_j - a_j / \log(a_j) + 1} = a_j^{a_j + 1} e^{-a_j} \geq \left(\frac{a_j}{e}\right)^{a_j} \sqrt{7a_j} \\ &> \left(\frac{a_j}{e}\right)^{a_j} \sqrt{2\pi a_j e^{1/6 \cdot 2 \cdot \pi}} > \left(\frac{a_j}{e}\right)^{a_j} \sqrt{2\pi a_j e^{1/6 a_j}} > a_j! \end{aligned}$$

при $a_j \geq 18 > 2\pi$; мы здесь использовали формулу Стирлинга. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \alpha(a_j) &> \frac{\sum_{j=1}^k \log a_j!}{\log((n-b)\log n)} = \frac{\log n! - \log b!}{\log((n-b)\log n)} \\ &> \frac{n \log b - b \log b}{\log((n-b)\log n)} > \frac{(n-b)\log b}{\log((n-b)\log n)}. \end{aligned}$$

Заметим, что если $b \geq a_i$ для всех $i \leq k$, то максимальный простой делитель $n!$ должен быть также и максимальным простым делителем $b!$, и поэтому не может быть простого делителя между b и n . Теорема Бейкера и др. [2] утверждает: если $p_n - n$ -е простое, то

$$p_{n+1} - p_n < (p_n)^{0.525+\epsilon} \quad \text{для больших } p_n.$$

Отсюда следует, что для достаточно больших n зазор равен $n - b < b^{0.525+\epsilon}$.

Поскольку

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{\infty} ([2^{-j}n] - [2^{-j}b]) &= \sum_{j=1}^{\lfloor \log_2 b \rfloor} ([2^{-j}n] - [2^{-j}b]) + \sum_{j=\lfloor \log_2 b \rfloor}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} [2^{-j}n] \\
 &\leq \sum_{j=1}^{\lfloor \log_2 b \rfloor} (2^{-j}n - (2^{-j}b - 1)) + \frac{n}{b} - 1 \\
 &\leq n - b - \sum_{j=\lfloor \log_2 b \rfloor}^{\infty} (2^{-j}(n - b)) + \log_2 b + \frac{n}{b} - 1 \\
 &\leq n - b - \frac{n - b}{b} + \log_2 b + \frac{n}{b} - 1 < n - b + \log_2 b,
 \end{aligned}$$

мы имеем оценку

$$\alpha(n) - \alpha(b) < n - b + \log_2 b,$$

и мы получаем

$$n - b + \log_2 b > \sum_{j=1}^k \alpha(a_j) > \frac{(n - b) \log b}{\log((n - b) \log n)}.$$

Тем самым, мы имеем

$$n - b < \frac{(\log_2 b) \log((n - b) \log n)}{\log b - \log((n - b) \log n)}.$$

Из полученного выше неравенства (а именно, $n - b < b^{.525+\epsilon}$) мы также можем заключить, что $\sqrt{n} < b$, и, объединяя эти утверждения, получаем, что

$$n - b < \frac{(\log_2 b)(0.6 \log b)}{0.4 \log b} < 3 \log b.$$

Подставляя в уравнение, получаем

$$\begin{aligned}
 n - b &< \frac{(\log_2 b)(\log((n - b) \log n))}{\log b - \log((n - b) \log n)} < \frac{(\log_2 b) \log(3 \log b \log n)}{\log b - \log(3 \log b \log b^2)} \\
 &< \frac{(\log_2 b)(3 \log \log n)}{\log b - \log(1.5 \log b)} < \frac{3(1 + \epsilon) \log_2 b (\log \log n)}{(1 - \epsilon) \log b} < 6 \log \log n.
 \end{aligned}$$

Еще раз используя эту технику, получаем

$$\begin{aligned}
 n - b &< \frac{(\log_2 b)(\log((n - b) \log n))}{\log b - \log((n - b) \log n)} < \frac{(\log_2 b) \log((6 \log \log n) \log n)}{\log b - \log(6(\log \log n) \log n)} \\
 &< \frac{(\log_2 b)((1 + \epsilon) \log \log n)}{\log b - 2 \log \log b} < \frac{(1 + \epsilon) \log_2 b (\log \log n)}{(1 - \epsilon) \log b} < \frac{1 + \epsilon}{\log 2} \log \log n.
 \end{aligned}$$

Итак, мы получаем нужный нам результат:

$$n - b < \frac{1 + \epsilon}{\log 2} \log \log n.$$

Авторы благодарят К. Сриниваса из IMSc Chennai за то, что он предложил эту задачу, и рецензентов за многочисленные полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. Luca, “On factorials which are products of factorials”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **143**:3 (2007), 533–542.
- [2] R. C. Baker, G. Harman, J. Pintz, “The difference between consecutive primes. II”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **83**:3 (2001), 532–562.

К. Дж. Бхат

Indian Institute of Science, Индия

Поступило

03.08.2009

К. Рамачандра

Indian Institute of Science, Индия

E-mail: kram@math.tifrbng.res.in