Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Чирич, Д. Костич, Об ограниченности множителей Лагранжа в теореме Куна–Такера в применении к задаче минимизации функций Тихонова, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 3, 424–439

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8665>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 18:03:43

Об ограниченности множителей Лагранжа в теореме Куна–Такера в применении к задаче минимизации функций Тихонова

Н. Чирич, Д. Костич

Для доказательства сходимости последовательностей приближений регуляризованным методом линеаризации к последовательностям функций Тихонова применяется теорема Куна–Такера, в которой имеются ограниченные последовательности множителей Лагранжа. В данной статье показано, что в случае ограничений трех возможных типов, именно, в случае (i) функциональных неравенств, строго выполняющихся в какой-либо точке, (ii) линейных функциональных неравенств и (iii) линейного операторного равенства, в теореме Куна–Такера, применяемой к последовательностям функций Тихонова, существуют ограниченные последовательности множителей Лагранжа.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Для доказательства сходимости последовательностей приближений регуляризованным методом линеаризации к последовательностям функций Тихонова применяется теорема Куна–Такера, в которой имеются ограниченные последовательности множителей Лагранжа [1], [2]. Если выполнено условие Слатера, то все последовательности множителей Лагранжа ограничены [1]. Если же условие данного типа не выполняется строго в какой-либо точке допустимого множества, то соответствующие последовательности множителей Лагранжа не обязаны быть ограниченными. Если все ограничения (функционального и операторного типа) линейны, то существуют сходящиеся последовательности множителей Лагранжа [2], [3].

Будем рассматривать задачу выпуклого программирования:

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (1)$$

где U – выпуклое множество банахова пространства X , а $J(u)$ – выпуклая функция в U . Предположим, что

$$J_* = \inf_U J(u) > -\infty, \quad U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \emptyset. \quad (2)$$

ЛЕММА 1 [4; с. 28]. Пусть U – выпуклое множество банахова пространства X и $J(u)$ – выпуклая непрерывно дифференцируемая функция в U . Точка $u_* \in U$ является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0$ для всех $u \in U$. Если $u_* \in \text{int } U$, то последнее неравенство эквивалентно равенству $J'(u_*) = 0$.

2. Теоремы Куна–Такера.

ТЕОРЕМА 1 [5; с. 52]. Пусть выполняются следующие условия: U_0 – выпуклое множество банахова пространства X , $J(u)$ и $g_i(u)$, $i = 1, \dots, t$, – выпуклые функции в U_0 , и множество

$$U = \{u \in U_0 : g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, t\} \quad (3)$$

удовлетворяет следующему условию (Слатера): существует точка $\bar{u} \in U_0$ такая, что $g_i(\bar{u}) < 0$ для всех $i = 1, \dots, t$.

Кроме того, предположим, что условие (2) выполняется в задачах (1) и (3). Тогда для любой точки $u_* \in U_*$ существуют множители Лагранжа $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, t$, такие, что $\lambda_i g_i(u_*) = 0$, $i = 1, \dots, t$, и $L(u_*) \leq L(u)$ для всех $u \in U_0$, где

$$L(u) = J(u) + \lambda_1 g_1(u) + \lambda_2 g_2(u) + \dots + \lambda_t g_t(u).$$

ЛЕММА 2 [5; с. 277]. Пусть выполняются следующие условия: X и Y – банаховы пространства, A – ограниченный линейный оператор, отображающий X на Y , $a_i \in X^*$, $i = 1, \dots, s$, где X^* – пространство, сопряженное пространству X и

$$K = \{u \in X : \langle a_i, u \rangle \leq 0, i = 1, \dots, s, Au = 0\}.$$

Тогда для любого

$$a \in K^* = \{x^* \in X^* : \langle x^*, u \rangle \geq 0 \text{ для всех } u \in K\}$$

существуют $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, s$, и $y^* \in Y^*$ такие, что

$$a + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s + A^* y^* = 0.$$

ТЕОРЕМА 2 (теорема Куна–Такера). Пусть выполняются следующие условия: X и Y – банаховы пространства, A – ограниченный линейный оператор, отображающий X на Y и такой, что множество AX замкнуто в Y , $b \in Y$, $J(u)$ – выпуклая непрерывно дифференцируемая функция в X , $a_i \in X^*$, $b_i \in \mathbb{R}$, $g_i(u) = \langle a_i, u \rangle - b_i$, $i = 1, \dots, s$, и

$$U = \{u \in X : g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, s, Au = b\}. \quad (4)$$

Кроме того, пусть условие (2) выполняется в задачах (1) и (4). Тогда для любой точки $u_* \in U_*$ существуют множители Лагранжа $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, s$, $y^* \in Y^*$, такие, что $\lambda_i g_i(u_*) = 0$, $i = 1, \dots, s$, и $L(u_*) \leq L(u)$ для всех $u \in X$, где

$$L(u) = J(u) + \lambda_1 g_1(u) + \lambda_2 g_2(u) + \dots + \lambda_s g_s(u) + \langle y^*, Au - b \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $AX = Y$. Ясно, что U – выпуклое множество. Пусть u_* – некоторая произвольная точка в U_* , и

$$I = \{i : 1 \leq i \leq s, g_i(u_*) = 0\}.$$

Докажем, что множество возможных направлений множества U в точке u_* представляет собой конус

$$K = \{e \in X : \langle a_i, e \rangle \leq 0, i \in I, Ae = 0\}.$$

Пусть e – некоторое возможное направление множества U в точке u_* , т.е. пусть существует $t_0 > 0$ такое, что $u_* + te \in U$ для всех $t \in [0, t_0]$. Тогда $\langle a_i, u_* + te \rangle \leq b_i$, $i = 1, \dots, s$, $A(u_* + te) = b$ при $0 \leq t \leq t_0$, откуда при условии, что $u_* \in U$, следует, что $\langle a_i, e \rangle \leq 0$, $i \in I$, и $Ae = 0$, т.е. $e \in K$. Пусть $e \in K$. Тогда для любого $i \in I$ имеем

$$g_i(u_* + te) = \langle a_i, u_* \rangle + t\langle a_i, e \rangle - b_i \leq 0$$

для всех $t \geq 0$. Если $i \in \{1, 2, \dots, s\} \setminus I$, то $\langle a_i, u_* \rangle - b_i < 0$, откуда следует, что

$$g_i(u_* + te) = \langle a_i, u_* + te \rangle - b_i \leq 0$$

для всех $t \in [0, t_0]$ при достаточно малом t_0 . Наконец,

$$A(u_* + te) - b = Au_* - b + tAe = 0$$

для всех $t > 0$.

Пусть $e \in K$ – произвольное направление, и $t > 0$ такое, что $u_* + te \in U$. Из леммы 1 следует, что $\langle J'(u_*)e \rangle = \langle J'(u_*)u - u_* \rangle / t \geq 0$, т.е. $J'(u_*) \in K^*$. В силу леммы 2 существуют $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, и $y^* \in Y^*$ такие, что

$$J'(u_*) + \sum_{i \in I} \lambda_i a_i + A^* y^* = 0.$$

Полагая $\lambda_i = 0$, $i \in \{1, 2, \dots, s\} \setminus I$, получим $L'(u_*) = 0$. Применяя лемму 1, получим $L(u_*) \leq L(u)$ для всех $u \in X$. Заметим, что $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_i g_i(u_*) = 0$, $i = 1, \dots, s$. Теорема в случае $AX = Y$ доказана.

Рассмотрим общий случай. Пусть $Y_1 = AX$ – замкнутое линейное подпространство банахова пространства Y , т.е. банахово пространство. Поскольку $b \in Y_1$, так как в противном случае мы бы имели $U = U_* = \emptyset$, из уже доказанного следует, что все утверждения теоремы будут выполняться, если в формулировке теоремы заменить соотношение $y^* \in Y^*$ на соотношение $y_1^* \in Y_1^*$. В силу теоремы Хана–Банаха y_1^* можно продолжить до $y^* \in Y^*$ так, чтобы $\langle y^*, y \rangle = \langle y_1^*, y \rangle$ для всех $y \in Y_1$, и таким образом, во всех утверждениях теоремы, все $y_1^* \in Y_1^*$ можно заменить на $y^* \in Y^*$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются следующие условия: X и Y – банаховы пространства, $U_0 \subset X$, $J(u)$ и $g_i(u)$, $i = 1, \dots, s$, – функции, определенные в U_0 , A – оператор, отображающий X на Y , $b \in Y$,

$$U = \{u \in U_0 : g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, s, Au = b\}.$$

Кроме того, пусть $u_* \in U$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, s$, и $y^* \in Y^*$ такие, что $\lambda_i g_i(u_*) = 0$, $i = 1, \dots, s$, и $L(u_*) \leq L(u)$ для всех $u \in U_0$, где

$$L(u) = J(u) + \lambda_1 g_1(u) + \lambda_2 g_2(u) + \dots + \lambda_s g_s(u) + \langle y^*, Au - b \rangle.$$

Тогда $J(u_*) \leq J(u)$ для всех $u \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\lambda_i g_i(u_*) = 0$, $i = 1, \dots, s$, и $Au = b$ для всех $u \in U$, то $J(u_*) = L(u_*) \leq L(u) \leq J(u)$ для всех $u \in U$. Теорема доказана.

Предположим, что все условия теоремы 2 выполняются и $u_* \in U_*$. Введем обозначения

$$U_0 = \{u \in X : g_i(u) \leq 0, i = 2, \dots, s, Au = b\}, \quad L(u) = J(u) + \lambda g_1(u), \quad (5)$$

$$U_0^+ = \{u \in U_0 : g_1(u) \geq 0\}, \quad (6)$$

$$M(V) = \{\lambda \geq 0 : \lambda g_1(u_*) = 0, L(u_*) \leq L(u) \text{ для всех } u \in V \subset X\}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть все условия теоремы 2 выполняются и пусть $u_* \in U_*$. Тогда $M(U_0) \neq \emptyset$. Если $g_1(u_*) < 0$, то $M(U_0^+) = M(U_0) = \{0\}$. Если $g_1(u_*) = 0$, то $M(U_0^+) = [\underline{\lambda}, +\infty)$ и $M(U_0) = M(U_0^+)$ при условии, что $g_1(u) \geq 0$ для всех $u \in U_0$, и $M(U_0) = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ при условии, что $g_1(\bar{u}) < 0$ для некоторого $\bar{u} \in U_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_* \in U_*$. В силу теоремы 2 существуют $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, s$, и $y^* \in Y^*$ такие, что $\lambda_i g_i(u_*) = 0$, $i = 1, \dots, s$, и $L_1(u_*) \leq L_1(u)$ для всех $u \in X$, тогда как

$$L_1(u) = L(u) + \lambda_2 g_2(u) + \lambda_3 g_3(u) + \dots + \lambda_s g_s(u) + \langle y^*, Au - b \rangle,$$

где $L(u)$ определено в (5), и $\lambda = \lambda_1$. Применяя теорему 3 к задаче $L(u) \rightarrow \inf$, $u \in U_0$, получим первое утверждение нашей теоремы.

Пусть $g_1(u_*) < 0$. Из $\lambda g_1(u_*) = 0$ следует, что $\lambda = 0$, и таким образом, $M(U_0^+) = M(U_0) = \{0\}$. Пусть $g_1(u_*) = 0$. Так как $g_1(u) \geq 0$ для всех $u \in U_0^+$, то из $\lambda \in M(U_0^+)$ и $\lambda' > \lambda$ следует, что $\lambda' \in M(U_0^+)$. Пусть $\lambda_k \in M(U_0^+)$, $k \in \mathbb{N}$, и пусть $\lambda_k \rightarrow \lambda'$ при $k \rightarrow \infty$. Если положить $\lambda = \lambda_k$ в соотношениях, определяющих $M(U_0^+)$, и устремить $k \rightarrow \infty$, то мы получим $\lambda' \in M(U_0^+)$. Это доказывает, что $M(U_0^+) = [\underline{\lambda}, +\infty)$. Если $g_1(u) \geq 0$ для всех $u \in U_0$, то $U_0 = U_0^+$, и таким образом, $M(U_0) = M(U_0^+)$. Пусть $\bar{u} \in U_0$ и $g_1(\bar{u}) < 0$. Поскольку $U = \{u \in U_0 : g_1(u) \leq 0\}$, $\lambda \in M(U)$, то из $\lambda' \in [0, \lambda]$ следует, что $\lambda' \in M(U)$. Множество $M(U)$ ограничено, так как в противном случае имеем $L(\bar{u}) = J(\bar{u}) + \lambda g_1(\bar{u}) < L(u_*)$ для достаточно больших λ . Замкнутость множества $M(U)$ доказывается так же, как и замкнутость множества $M(U_0^+)$. Следовательно, $M(U) = [0, \bar{\lambda}]$, так что $M(U_0) = M(U) \cap M(U_0^+) = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$. Теорема доказана.

3. О сходимости множителей Лагранжа. Кроме задачи (1) для любого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующие задачи:

$$J_k(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (7)$$

где $J_k(u)$ — непрерывно дифференцируемая функция в U . Предположим, что задачи (7) имеют решения $v_k \in U$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\begin{aligned} \|v_k - u_*\| &\rightarrow 0, & J_k(u) &\rightarrow J(u) \text{ для всех } u \in U, \\ J_k(v_k) &\rightarrow J(u_*), & \|J'_k(v_k) - J'(u_*)\| &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Если α_k , $k \in \mathbb{N}$, — положительная нулевая последовательность, то функция $T_k(u) = J(u) + \alpha_k \|u\|^2$ называется *функцией Тихонова*. Следующая теорема определяет условия, при которых задача (7), где $J_k(u) = T_k(u)$, имеет решение v_k , удовлетворяющее условиям (8).

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполняются следующие условия:

- 1°) U – выпуклое замкнутое множество рефлексивного банахова пространства X , $J(u)$ – выпуклая непрерывно дифференцируемая функция в U и условия (2) выполнены;
- 2°) функция $\|u\|^2$ – строго равномерно выпуклая и непрерывно дифференцируемая в U ;
- 3°) последовательность α_k , $k \in \mathbb{N}$, – положительная нулевая последовательность.

Тогда $v_k \in U$, $k \in \mathbb{N}$, и $u_* \in U_*$ однозначно определяются следующими условиями: $T_k(v_k) \leq T_k(u)$ для всех $u \in U$ и $\|u_*\| \leq \|u\|$ для всех $u \in U_*$, поскольку имеет место (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении вышеуказанных условий на функции $\|u\|^2$ и $T_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, являющиеся равномерно выпуклыми и непрерывными в U , где U_* – выпуклое замкнутое множество, существование и единственность точек u_* и v_k , $k \in \mathbb{N}$, следуют из теоремы 9 из [4; с. 57]. Первое утверждение в условиях (8) – это утверждение теоремы 1 из [4; с. 185], а все другие утверждения следуют из первого утверждения и условия 3°. Теорема доказана.

Предположим, что все условия теоремы 2 выполнены и U_0 определяется условием (5). Из теоремы 2 следует, что существуют множители Лагранжа $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, s$, и $y^* \in Y^*$ такие, что $\lambda_i g_i(u_*) = 0$, $i = 1, \dots, s$, и $L_0(u_*) \leq L_0(u)$ для всех $u \in X$, где

$$L_0(u) = L(u) + \lambda_2 g_2(u) + \lambda_3 g_3(u) + \dots + \lambda_s g_s(u) + \langle y^*, Au - b \rangle,$$

и $L(u) = J(u) + \lambda_1 g_1(u)$. Из теоремы 3 следует, что $L(u_*) \leq L(u)$ для всех $u \in U_0$, т.е. что u_* является решением задачи $L(u) \rightarrow \inf$, $u \in U_0$. Если функция $J_k(u)$ выпуклая и непрерывно дифференцируемая в X , то v_k является решением задачи $L_k(u) \rightarrow \inf$, $u \in U_0$, где $L_k(u) = J_k(u) + \mu_k g_1(u)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть все условия теоремы 2 выполнены, $J_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, – выпуклая непрерывно дифференцируемая функция в X , и v_k и u_* являются решениями задач (7) и (1), удовлетворяющими условиям (8). Тогда существуют множители Лагранжа $\lambda \geq 0$ и $\mu_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что $\lambda g_1(u_*) = \mu_k g_1(v_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, $L(u_*) \leq L(u)$ и $L_k(v_k) \leq L_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$ для всех $u \in U_0$ и

$$\begin{aligned} \mu_k &\rightarrow \lambda, & L_k(u) &\rightarrow L(u) & \text{для всех } u \in X, \\ L_k(v_k) &\rightarrow L(u_*), & \|L'_k(v_k) - L'(u_*)\| &\rightarrow 0 & \text{при } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

для U_0 и $L(u)$, определенных в (5), и $L_k(u) = J_k(u) + \mu_k g_1(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $U \neq U_0$, так как в противном случае достаточно положить $\lambda = \mu_k = 0$. Имеются две возможности: либо $g_1(u) \geq 0$ для всех $u \in U_0$, либо $g_1(\bar{u}) < 0$ для некоторого $\bar{u} \in U_0$.

Рассмотрим первый случай. Тогда $U = U_0 \cap \Gamma$, где $\Gamma = \{u \in X : g_1(u) = 0\}$. Как в доказательстве теоремы 2, можно показать, что множество

$$\{e \in X : \langle a_i, e \rangle \leq 0, i \in I, Ae = 0\}, \quad \text{где } I = \{i : 2 \leq i \leq s, g_i(u_*) = 0\},$$

представляет собой конус возможных направлений множества U_0 в точке u_* . Отсюда следует, что

$$K_0 = \{u \in X : g_i(u) \leq 0, i \in I, Au = b\}$$

является множеством всех точек $u \in X$ таких, что $e = u - u_*$ – некоторое возможное направление множества U_0 в точке u_* . Пусть K – множество всех точек $u \in X$ таких, что $e = u - u_*$ – некоторое возможное направление множества U в точке u_* . Как и в предыдущем случае, можно показать, что $K = K_0 \cap \Gamma$. Ясно, что множества K_0 и K – это конусы с вершиной в точке u_* . Так как $U \neq U_0$ и $U_0 \subset K_0$, существует точка $\bar{u} \in K_0$ такая, что $g_1(\bar{u}) > 0$. Пусть $u = u_* + (\bar{u} - u_*)/g_1(\bar{u})$. Тогда $u \in K_0$ и $g_1(u) = 1$, так что $\Gamma_1 = \{u \in K_0 : g_1(u) = 1\} \neq \emptyset$. Сторона многогранного конуса K_0 определяется множеством

$$K_0 \cap \{u \in X : g_i(u) = 0, i \in I_1\},$$

где I_1 – некоторое произвольное подмножество множества I . Непустые пересечения множества Γ_1 со сторонами многогранного конуса K_0 (их число конечно) будем обозначать через $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n$, и в каждом множестве Γ_i , $i = 1, \dots, n$, выберем одну точку $u_i \in \Gamma_i$.

Пусть $u, v \in X$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} l(u, v) &= \{w \in X : w = u + tv, t \geq 0\}, \\ [u, v] &= \{w \in X : w = \alpha u + (1 - \alpha)v, 0 \leq \alpha \leq 1\}. \end{aligned}$$

Нам также потребуются следующие две леммы.

ЛЕММА 3. Если $v \in K_0$ и $l(\bar{u}, w) \subset K_0$, то $l(v, w) \subset K_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l(\bar{u}, w) \subset K_0$ и $i \in I$. Тогда

$$g_i(\bar{u} + tw) = \langle a_i, \bar{u} \rangle + t\langle a_i, w \rangle - b_i \leq 0, \quad A(\bar{u} + tw) - b = A\bar{u} + tAw - b = 0$$

для всех $t > 0$. Разделив эти соотношения на t и устремив $t \rightarrow \infty$, получим $\langle a_i, w \rangle \leq 0$ и $Aw = 0$. Тогда

$$g_i(v + tw) = \langle a_i, v \rangle + t\langle a_i, w \rangle - b_i \leq 0, \quad A(v + tw) = Av + tAw = b$$

для всех $t \geq 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Если $\bar{u} \in \Gamma_1$ и $v \in K$, то $u' \in \Gamma_1$, $v' \in K$ и существуют $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, такие, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1, \quad u' = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

$u'v - v = \bar{u} - u'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w_1 = \bar{u} \in \Gamma_1$, $w_1 \neq u_1$ и $l(u_1, w_1 - u_1) \not\subset \Gamma_1$. Тогда существует точка $w_2 \in l(u_1, w_1 - u_1)$, принадлежащая одному из множеств Γ_i , $i = 2, \dots, n$, таких, что $\Gamma_i \subset \Gamma_1$ и $\Gamma_i \neq \Gamma_1$. Перенумеруем множества Γ_i и точки u_i , $i = 2, \dots, n$, так, чтобы $w_2 \in \Gamma_2$. Пусть $w_2 \neq u_2$ и $l(u_2, w_2 - u_2) \not\subset \Gamma_2$. Тогда существует точка $w_3 \in l(u_2, w_2 - u_2)$, принадлежащая одному из множеств Γ_i , $i = 3, \dots, n$,

таких, что $\Gamma_i \subset \Gamma_2$ и $\Gamma_i \neq \Gamma_2$. Снова перенумеруем множества Γ_i и точки u_i , $i = 3, \dots, n$, так, чтобы $w_3 \in \Gamma_3$, и т.д. Поскольку имеется конечное число множеств Γ_i , вышеописанный процесс должен закончиться при некотором $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ так, чтобы или $w_p = u_p$, или $l(u_p, w_p - u_p) \subset \Gamma_p$.

Пусть $w_p = u_p$. Тогда

$$w_{p-1} \in [u_{p-1}, u_p], \quad w_{p-2} \in [u_{p-2}, w_{p-1}], \quad \dots, \quad \bar{u} = w_1 \in [u_1, w_2].$$

Легко показать, что в этом случае

$$\bar{u} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p,$$

где $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$, и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = 1$. Тогда для завершения доказательства достаточно положить $u' = \bar{u}$, $v' = v$ и $\alpha_i = 0$, $i = p+1, \dots, n$.

Пусть $l(u_p w_p - u_p) \subset \Gamma_p$. Тогда существуют

$$w'_p = u_p, \quad w'_{p-1} \in [u_{p-1}, w'_p], \quad w'_{p-2} \in [u_{p-2}, w'_{p-1}], \quad \dots, \quad u' = w'_1 \in [u_1, w'_2]$$

такие, что

$$[w_p, w'_p] // [w_{p-1}, w'_{p-1}] // \dots // [w_1, w'_1] = [\bar{u}, u'],$$

где символ $[u, v] // [u', v']$ означает, что $u - v = t(u' - v')$ при некотором $t > 0$. Как и в первом случае, здесь также можно показать, что

$$u' = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n,$$

где $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Так как $l(w'_p, w_p - w'_p) \subset \Gamma_1 \subset K_0$, из леммы 3 следует, что $l(v, w_p - w'_p) \subset K_0$ и $\bar{u} \in l(u', w_p - w'_p) \subset K_0$, и, таким образом, существует точка $v' \in l(v, w_p - w'_p)$ такая, что $v' - v = \bar{u} - u'$. Тогда

$$g_1(v') = \langle a_1, \bar{u} + v - u' \rangle - b_1 = g_1(v) = 0,$$

так что $v' \in K_0 \cap \Gamma = K$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 6. Из теоремы 4 и леммы 1 следует, что существует $\lambda \geq 0$ такая, что

$$\langle L'(u_*), u_i - u_* \rangle = \langle J'(u_*) + \lambda a_1, u_i - u_* \rangle \geq 0, \quad (9)$$

для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим

$$\beta_k = J'_k(v_k) - J'(u_*), \quad d = \max_{1 \leq i \leq n} \|u_i - u_*\|, \quad \mu_k = \lambda + d \|\beta_k\|. \quad (10)$$

Тогда $\|\beta_k\| \rightarrow 0$ и $\mu_k \rightarrow \lambda$ при $k \rightarrow \infty$. Так как $g_1(u) = 1$ для всех $u \in \Gamma_1$ и $u_i \in \Gamma_1$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, если взять λ и $J'(u_*)$ из (10), подставить в (9) и применить неравенство Коши–Шварца, то мы получим, что для всех $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle J'_k(v_k) - \beta_k + (\mu_k - d \|\beta_k\|) a_1, u_i - u_* \rangle \\ &= \langle J'_k(v_k) + \mu_k a_1, u_i - u_* \rangle - \langle \beta_k, u_i - u_* \rangle - d \|\beta_k\| \langle a_1, u_i - u_* \rangle \\ &\leq \langle L'_k(v_k), u_i - u_* \rangle + \|\beta_k\| \cdot \|u_i - u_*\| - d \|\beta_k\| \cdot g_1(u_i) \\ &= \langle L'_k(v_k), u_i - u_* \rangle + \|\beta_k\| \cdot (\|u_i - u_*\| - d \cdot 1) \leq \langle L'_k(v_k), u_i - u_* \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Из непрерывности функций $g_i(u)$, $g_i(u_*) < 0$ и того, что $\|v_k - u_*\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ следует, что $g_i(v_k) < 0$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, s\} \setminus I$ и достаточно больших k . Множество точек $u \in X$ таких, что $e = u - v_k$ является возможным направлением множества U в точке v_k , представляет собой многогранный конус, содержащий все точки конуса K . Отсюда следует, что при достаточно больших $k \in \mathbb{N}$

$$\langle J'_k(v_k), u - v_k \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } u \in K. \quad (12)$$

Пусть $\bar{u} \in \Gamma_1$ и $v = v_k$. Тогда из леммы 4, (11), (12), того, что $v', v_k, u_* \in K \subset \Gamma$, и того, что $\langle a_1, u - v_k \rangle = 0$ для всех $u \in K$, а также из соотношений $\bar{u} = v' + u' - v_k$ или

$$\bar{u} - v_k = v' - v_k + u' - v_k = v' - v_k + u' - u_* + u_* - v_k$$

следует, что

$$\begin{aligned} \langle L'_k(v_k), \bar{u} - v_k \rangle &= \langle J'_k(v_k) + \mu_k a_1, v' - v_k \rangle \\ &\quad + \langle L'_k(v_k), u' - u_* \rangle + \langle J'_k(v_k) + \mu_k a_1, u_* - v_k \rangle \\ &\geq 0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle L'_k(v_k), u_i - u_* \rangle + 0 \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть $u \in U_0$. Если $u \in U \subset K$, то из (12) следует, что

$$\langle L'_k(v_k), u - v_k \rangle = \langle J'_k(v_k), u - v_k \rangle + \mu_k \langle a_1, u - v_k \rangle \geq 0.$$

Если $0 < \alpha = g_1(u) < 1$, то $\bar{u} = u_* + (u - u_*)/\alpha \in \Gamma_1$, так что из (12), (13), того, что $u_* \in \Gamma$ и

$$u = \alpha \bar{u} + (1 - \alpha)u_* = v_k + \alpha(\bar{u} - v_k) + (1 - \alpha)(u_* - v_k),$$

следует, что

$$\langle L'_k(v_k), u - v_k \rangle = \alpha \langle L'_k(v_k), \bar{u} - v_k \rangle + (1 - \alpha) \langle J'_k(v_k) + \mu_k a_1, u_* - v_k \rangle \geq 0.$$

Если $\alpha = g_1(u) \geq 1$, то $\bar{u} = v_k + (u - v_k)/\alpha \in \Gamma_1$, так что

$$\langle L'_k(v_k), u - v_k \rangle = \alpha \langle L'_k(v_k), \bar{u} - v_k \rangle \geq 0.$$

Заметим, что невозможно доказать случай $\alpha < 1$ тем же способом, что и случай $\alpha \geq 1$, потому что тогда не должно выполняться включение $\bar{u} \in \Gamma_1$. Также невозможно доказать случай $\alpha > 1$ тем же способом, что и случай $\alpha < 1$, потому что тогда $1 - \alpha < 0$. Таким образом, $\langle L'_k(v_k), u - v_k \rangle \geq 0$ для всех $u \in U_0$, и из леммы 1 следует, что $L_k(v_k) \leq L_k(u)$ для всех $u \in U_0$ и достаточно больших k . Существование множителей Лагранжа $\mu_k \geq 0$ таких, что $L_k(v_k) \leq L_k(u)$, для всех $u \in U_0$ и для оставшихся $k \in \mathbb{N}$ получается из следствия к теореме 4.

Рассмотрим случай: $g_1(\bar{u}) < 0$ для некоторого $\bar{u} \in U_0$. Введем обозначение

$$M_k(V) = \{\mu_k \geq 0 : \mu_k g(v_k) = 0, L_k(v_k) \leq L_k(u) \text{ для всех } u \in V \subset U_0\}.$$

Пусть $\mu_k \in M_k(U_0)$, $k \in \mathbb{N}$. Докажем, что каждая предельная точка последовательностей μ_k , $k \in \mathbb{N}$ принадлежит множеству $M(U_0)$, определенному в (6). Пусть

λ – предельная точка последовательности μ_k , $k \in \mathbb{N}$. Тогда данная последовательность содержит некую подпоследовательность, сходящуюся к λ . Удаляя элементы последовательности, которые не являются элементами этой подпоследовательности, можно считать, что $\mu_k \rightarrow \lambda$ при $k \rightarrow \infty$. Если в соотношениях, определяющих множество $M_k(U_0)$, перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$, то мы получим соотношения, из которых следует, что $\lambda \in M(U_0)$. Рассмотрим следующие три возможных случая.

1. Если $g_1(v_k) < 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ за исключением некоторого конечного числа элементов, то в силу теоремы 4 $M_k(U_0) = \{0\}$ для всех k таких, что $\mu_k \rightarrow \lambda = 0$ при $k \rightarrow \infty$, и $\lambda = 0 \in M(U_0)$.

2. Если $g_1(v_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ за исключением некоторого конечного числа элементов, то из непрерывности функции $g_1(u)$ следует, что $g_1(u_*) = 0$. Удалим это конечное число элементов k и положим $\lambda = \underline{\lambda} = \inf M(U_0)$. Тогда в силу утверждения, доказанного в первом случае, существуют $\mu'_k \in [\mu_k, +\infty) = M_k(U_0^+)$ такие, что $\mu'_k \rightarrow \lambda$ при $k \rightarrow \infty$. Положим $\mu_k = \mu'_k$, если $g_1(v_k) = 0$, и $\mu_k = 0$, если $g_1(v_k) < 0$. Из того, что $\mu_k \in M_k(U_0)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и того, что каждая предельная точка последовательности μ_k , $k \in \mathbb{N}$, принадлежит множеству $M(U_0)$, так что $\mu_k \leq \mu'_k$, для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\mu'_k \rightarrow \lambda$ при $k \rightarrow \infty$, следует, что $\mu_k \rightarrow \lambda$ при $k \rightarrow \infty$.

3. Если $g_1(v_k) < 0$ для бесконечной последовательности $k \in \mathbb{N}$, а также $g_1(v_k) = 0$ для бесконечной последовательности $k \in \mathbb{N}$, то, как и в случае 1, получим $\mu_k = 0$ и $\underline{\lambda} = \inf M(U_0) = 0$ при $g_1(v_k) < 0$. Для тех k , при которых $g_1(v_k) = 0$, как и в случае 2, существуют $\mu_k \in M_k(U_0)$ такие, что $\mu_k \rightarrow \underline{\lambda}$ при $k \rightarrow \infty$. Полагая $\lambda = 0 \in M(U_0)$, получим $\mu_k \rightarrow \lambda$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. Остальные утверждения следуют из условий теоремы и первого утверждения.

ЛЕММА 5 [5; с.128]. Пусть X и Y – банаховы пространства, и пусть A – ограниченный линейный оператор, отображающий X на Y . Тогда существует $c > 0$ и некоторый (не обязательно линейный и не обязательно ограниченный) оператор M , отображающий Y на X , так что $AM(y) = y$ и $\|M(y)\| \leq c\|y\|$ для всех $y \in Y$.

ЛЕММА 6 [5; с.130]. Пусть выполняются все условия леммы 5. Тогда

$$(\text{Ker } A)^\perp = A^*Y^*,$$

где $(\text{Ker } A)^\perp = \{x^* \in X^* : Ax = 0 \Rightarrow \langle x^*, x \rangle = 0\}$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполняются следующие условия: X и Y – банаховы пространства, A – ограниченный линейный оператор, отображающий X на Y , так что множество AX замкнуто в Y , $b \in Y$, $U = \{u \in X : Au = b\}$, и $J(u)$, $J_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, – выпуклые, непрерывно дифференцируемые функции в X . Кроме того, пусть u_* и v_k , $k \in \mathbb{N}$, – решения задач (1) и (7) при условии, что выполнены условия (8). Тогда существуют множители Лагранжа $y^*, y_k^* \in Y^*$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что $\|y_k^* - y^*\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а также $L(u_*) \leq L(u)$ и $L_k(v_k) \leq L_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, для всех $u \in X$, а также $L(u) = J(u) + \langle y^*, Au - b \rangle$, $L_k(u) = J_k(u) + \langle y_k^*, Au - b \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $AX = Y$. Пусть $Av = 0$. Тогда $u = u_* + v \in U$, $u_1 = 2u_* - u \in U$ и из леммы 1 следует, что $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0$ и

$$\langle J'(u_*), u_1 - u_* \rangle = \langle J'(u_*), u_* - u \rangle \geq 0, \text{ т.е.}$$

$$\langle J'(u_*), u - u_* \rangle = \langle J'(u_*), v \rangle = 0.$$

Аналогично доказывается, что $\langle J'_k(v_k), v \rangle = 0$, так что $\langle J'_k(v_k) - J'(u_*), v \rangle = 0$, т.е. $J'_k(v_k) - J'(u_*) \in (\text{Ker } A)^\perp$. Непосредственно проверяется, что $(\text{Ker } A)^\perp$ — замкнутое линейное подпространство банахова пространства X^* , т.е. само является банаховым пространством; таким образом, в силу леммы 6 A^* — ограниченный линейный оператор, отображающий банахово пространство Y^* на банахово пространство $(\text{Ker } A)^\perp$. Из леммы 5 следует, что существует оператор M , отображающий $(\text{Ker } A)^\perp$ на Y^* , так что

$$A^* M(J'_k(v_k) - J'(u_*)) = J'_k(v_k) - J'(u_*), \quad (14)$$

$$\|M(J'_k(v_k) - J'(u_*))\| \leq c \|J'_k(v_k) - J'(u_*)\|. \quad (15)$$

Так как u_* — решение задачи (1), из теоремы (2) и леммы (1) следует, что существует $y^* \in Y^*$ такой, что $L(u_*) \leq L(u)$ для всех $u \in X$, т.е.

$$L'(u_*) = J'(u_*) + A^* y^* = 0. \quad (16)$$

Пусть $y_k^* = y^* - M(J'_k(v_k) - J'(u_*))$. Тогда из (14), (16) и леммы 1 следует, что

$$J'_k(v_k) - J'(u_*) = A^* M(J'_k(v_k) - J'(u_*)) = A^*(y^* - y_k^*) = A^* y^* - A^* y_k^*,$$

так что

$$L'_k(v_k) = J'_k(v_k) + A^* y_k^* = J'(u_*) - A^* y^* = 0,$$

т.е. $L_k(v_k) \leq L_k(u)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и для всех $u \in X$; а из (15) следует, что

$$\|y_k^* - y^*\| = \|-M(J'_k(v_k) - J'(u_*))\| \leq c \cdot \|J'_k(v_k) - J'(u_*)\|,$$

так что $\|y_k^* - y^*\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В случае $AX = Y$ теорема доказана.

Рассмотрим общий случай. В доказательстве теоремы 2 было показано, что $Y_1 = AX$ — банахово подпространство пространства Y и что $b \in Y_1$. Из уже доказанного следует, что существуют $y_1^*, y_{1k}^* \in Y_1^*$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что $\|y_{1k}^* - y_1^*\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а также $L_1(u_*) \leq L_1(u)$ и $L_{1k}(v_k) \leq L_{1k}(u)$, $k \in \mathbb{N}$, для всех $u \in X$, где

$$L_1(u) = J(u) + \{y_1^*, Au - b\}, \quad L_{1k}(u) = J_k(u) + \langle y_{1k}^*, Au - b \rangle.$$

В силу теоремы Хана–Банаха y_1^* можно продолжить до $y^* \in Y^*$, а $\bar{y}_{1k}^* = y_{1k}^* - y_1^*$ до $\bar{y}_k^* \in Y^*$, так что $\langle y^*, y \rangle = \langle y_1^*, y \rangle$ и $\langle \bar{y}_k^*, y \rangle = \langle \bar{y}_{1k}^*, y \rangle$ для всех $y \in Y_1$ и $\|\bar{y}_k^*\|_{Y^*} = \|\bar{y}_{1k}^*\|_{Y_1^*}$. Пусть $y_k^* = \bar{y}_k^* + y^*$. Тогда

$$\langle y_k^*, y \rangle = \langle \bar{y}_k^*, y \rangle + \langle y^*, y \rangle = \langle \bar{y}_{1k}^*, y \rangle + \langle y_1^*, y \rangle = \langle y_{1k}^*, y \rangle - \langle y_1^*, y \rangle + \langle y_1^*, y \rangle = \langle y_{1k}^*, y \rangle$$

для всех $y \in Y_1$, т.е. $y_k^* \in Y^*$ является расширением y_{1k}^* . Кроме того,

$$\|y_k^* - y^*\|_{Y^*} = \|\bar{y}_k^*\|_{Y^*} = \|\bar{y}_{1k}^*\|_{Y_1^*} = \|y_{1k}^* - y_1^*\|_{Y_1^*},$$

так что $\|y_k^* - y^*\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Так как $Au - b \in Y_1$ для всех $u \in X$, то, полагая y^* и y_k^* вместо y_1^* и y_{1k}^* в функциях $L_1(u)$ и $L_{1k}(u)$, получим все утверждения нашей теоремы. Теорема доказана.

ЛЕММА 7. Пусть выполняются следующие условия: X – банахово пространство, $g_i(u)$, $i = r+1, \dots, p$, – непрерывно дифференцируемые функции в X , $U_1 \subset X$,

$$U_0 = \{u \in U_1 : g_i(u) \leq 0, i = r+1, \dots, p\};$$

$J(u)$, $J_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$ и $g_i(u)$, $i = 1, \dots, r$, – непрерывно дифференцируемые функции в U_0 ,

$$U = \{u \in U_0 : g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, r\};$$

u_* и v_k , $k \in \mathbb{N}$, – решения задач (1) и (7), тогда как

$$\|v_k - u_*\| \rightarrow 0, \quad \|J'_k(v_k) - J'(u_*)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

и $\mu_{ik} \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, p$, – множители Лагранжа такие, что $\mu_{ik} \rightarrow \lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$, при $k \rightarrow \infty$, а также

$$\mu_{ik} g_{ik}(v_k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, p, \quad L_k(v_k) \leq L(u), \quad k \in \mathbb{N}, \quad u \in U_1, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} L_k(u) = & \langle J'_k(v_k) + \mu_{1k} g'_1(v_k) + \mu_{2k} g'_2(v_k) + \dots + \mu_{rk} g'_r(v_k), u - v_k \rangle \\ & + \mu_{r+1k} g_{r+1}(u) + \mu_{r+2k} g_{r+2}(u) + \dots + \mu_{pk} g_p(u). \end{aligned}$$

Тогда $\lambda_i g_i(u_*) = 0$, $i = 1, \dots, p$, и $L(u_*) \leq L(u)$ для всех $u \in U_1$, где

$$\begin{aligned} L(u) = & \langle J'(u_*) + \lambda_1 g'_1(u_*) + \lambda_2 g'_2(u_*) + \dots + \lambda_r g'_r(u_*), u - u_* \rangle \\ & + \lambda_{r+1} g_{r+1}(u) + \lambda_{r+2} g_{r+2}(u) + \dots + \lambda_p g_p(u). \end{aligned}$$

Кроме того, тогда $L_k(u) \rightarrow L(u)$ для всех $u \in X$, и

$$L_k(v_k) \rightarrow L(u_*), \quad \|L_k(v_k) - L(u_*)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть этого утверждения доказывается переходом к пределу в (17), а утверждение второй части проверяется непосредственно.

4. Об ограниченности множителей Лагранжа.

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполняются следующие условия:

1°) X и Y – банаховы пространства, $g_i(u)$, $i = r+1, \dots, t$, – выпуклые непрерывно дифференцируемые функции в X , $a_i \in X^*$, $b_i \in \mathbb{R}$, $g_i(u) = \langle a_i, u \rangle - b_i$, $i = t+1, \dots, s$, и A – ограниченный линейный оператор, отображающий X на Y , так что множество AX замкнуто в Y , и $b \in Y$,

$$U_r = \{u \in X : g_i(u) \leq 0, i = r+1, \dots, s, Au = b\};$$

2°) $J(u)$, $J_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$ и $g_i(u)$, $i = 1, \dots, r$, – выпуклые непрерывно дифференцируемые функции в U_r ,

$$U = \{u \in U_r : g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, r\};$$

3°) $g_i(\bar{u}) < 0$, $i = 1, \dots, t$, для некоторого $\bar{u} \in U$;

4°) u_* и v_k , $k \in \mathbb{N}$, – решения задач (1) и (7) такие, что

$$\|v_k - u_*\| \rightarrow 0, \quad \|J'_k(v_k) - J'(u_*)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Тогда $c \geq 0$ и существуют множители Лагранжа $\mu_{ik} \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, s$, и $y_k^* \in Y^*$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mu_{ik} &\leq c, \quad \mu_{ik} g_{ik}(v_k) = 0, \quad i = 1, \dots, s, \\ \|y_k^*\| &\leq c, \quad L_k(v_k) \leq L_k(u) \quad \text{для всех } u \in X, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_k(u) &= \langle J'_k(v_k) + \mu_{1k} g'_1(v_k) + \mu_{2k} g'_2(v_k) + \dots + \mu_{rk} g'_r(v_k), u - v_k \rangle \\ &\quad + \mu_{r+1k} g_{r+1}(u) + \mu_{r+2k} g_{r+2}(u) + \dots + \mu_{sk} g_s(u) + \langle y_k^*, Au - b \rangle. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что $0 = \bar{J}_k(v_k) < \bar{J}_k(u)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $u \in U$, где $\bar{J}_k(u) = \langle J'_k(v_k), u - v_k \rangle$. Применяя теорему 1 к задаче $\bar{J}_k \rightarrow \inf$, $u \in U$, получим, что существуют множители Лагранжа

$$\mu_{ik} \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (18)$$

такие, что, для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\mu_{ik} g_{ik}(v_k) = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad L_{rk}(v_k) \leq L_{rk}(u) \quad \text{для всех } u \in U_r, \quad (19)$$

где

$$L_{rk}(u) = \bar{J}_k(u) + \mu_{1k} g_1(u) + \mu_{2k} g_2(u) + \dots + \mu_{rk} g_r(u).$$

Докажем, что все множители Лагранжа (18) ограничены. Пусть $j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Применяя условие 3° теоремы и условие (18) и полагая $u = \bar{u}$ в (19), получим, что $0 \leq \langle J'_k(v_k), \bar{u} - v_k \rangle + \mu_{jk} g_j(\bar{u})$, откуда следует, что $\mu_{jk} \leq \langle J'_k(v_k), \bar{u} - v_k \rangle / |g_j(\bar{u})|$. Применяя четвертое условие теоремы, получим, что последовательность в правой части последнего неравенства сходится, откуда следует ее ограниченность, что влечет ограниченность последовательности μ_{jk} , $k \in \mathbb{N}$. Если применить лемму 1 к задаче $L_{rk}(u) \rightarrow \inf$, $u \in U_r$, то мы получим, что $\bar{L}_{rk}(v_k) \leq \bar{L}_{rk}(u)$ для всех $u \in U_r$, где

$$\bar{L}_{rk}(u) = \langle L'_{rk}(v_k), u - v_k \rangle = \langle J'_k(v_k) + \mu_{1k} g'_1(v_k) + \mu_{2k} g'_2(v_k) + \dots + \mu_{rk} g'_r(v_k), u - v_k \rangle.$$

Заметим, что, в отличие от функций $J_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, и $g_i(u)$, $i = 1, \dots, r$, функция $\bar{L}_{rk}(u)$ определена во всем пространстве X . Введем обозначения

$$U_m = \{u \in X : g_i(u) \leq 0, i = m + 1, \dots, s, Au = b\}.$$

Тогда

$$U_r = \{u \in U_m : g_i(u) \leq 0, i = r + 1, \dots, m\}.$$

Применяя теорему 1 к задаче $\bar{L}_{rk}(u) \rightarrow \inf$, $u \in U_r$, получим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют множители Лагранжа

$$\mu_{ik} \geq 0, \quad i = r + 1, \dots, m, \quad (20)$$

такие, что

$$\mu_{ik}g_i(v_k) = 0, \quad i = r+1, \dots, m, \quad L_{mk}(v_k) \leq L_{mk}(u) \quad \text{для всех } u \in U_m, \quad (21)$$

где

$$L_{mk}(u) = \bar{L}_{rk}(u) + \mu_{r+1k}g_{r+1}(u) + \mu_{r+2k}g_{r+2}(u) + \dots + \mu_{mk}g_m(u).$$

Докажем, что множители Лагранжа (20) ограничены. Пусть

$$j \in \{r+1, r+2, \dots, m\}.$$

Применяя условие 3° теоремы и условие (20), и полагая $u = \bar{u}$ в (21), получим, что $0 \leq \bar{L}_{rk}(u) + \mu_{jk}g_j(\bar{u})$, откуда, применяя неравенство Коши–Шварца и неравенство $\|p+q\| \leq \|p\| + \|q\|$, получим

$$\mu_{jk} \leq (\|J'_k(v_k)\| + \mu_{1k}\|g'_1(v_k)\| + \mu_{2k}\|g'_2(v_k)\| + \dots + \mu_{rk}\|g'_r(v_k)\|) \frac{\|\bar{u} - v_k\|}{|g_j(\bar{u})|}.$$

Из условия 4° и ограниченности последовательностей в правой части последнего неравенства следует ограниченность последовательности μ_{jk} , $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $p \in \{m, m+1, \dots, s-1\}$ и

$$U_p = \{u \in X : g_i(u) \leq 0, i = p+1, \dots, s, Au = b\}.$$

Предположим, что существуют ограниченные последовательности множителей Лагранжа $\mu_{ik} \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, p$, такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$ $L_{pk}(v_k) \leq L_{pk}(u)$ для всех $u \in U_p$, где

$$L_{pk}(u) = \bar{L}_{rk}(u) + \mu_{r+1k}g_{r+1}(u) + \mu_{r+2k}g_{r+2}(u) + \dots + \mu_{pk}g_p(u).$$

Применим теорему 4 к задаче

$$L_{pk}(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U_p = \{u \in U_{p+1} : g_{p+1}(u) \leq 0\}$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\underline{\mu}_{p+1k}$ – наименьший из всех множителей Лагранжа $\mu_{p+1k} \geq 0$ таких, что

$$\mu_{p+1k}g_{p+1}(v_k) = 0, \quad L_{p+1k}(v_k) \leq L_{p+1k}(u) \quad \text{для всех } u \in U_{p+1}, \quad (22)$$

где

$$L_{p+1k}t(u) = L_{pk}(u) + \mu_{p+1k}g_{p+1}(u).$$

Покажем, что последовательность $\underline{\mu}_{p+1k}$, $k \in \mathbb{N}$, ограничена. Если это не так, то существует подпоследовательность, сходящаяся к $+\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Удаляя элементы последовательности, которые не входят в данную подпоследовательность, можно считать, что $\underline{\mu}_{p+1k} \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Последовательность $(\mu_{1k}, \mu_{2k}, \dots, \mu_{pk})$, $k \in \mathbb{N}$, ограничена в пространстве R^p ; таким образом, существует ее сходящаяся подпоследовательность. Снова удаляя элементы последовательности, которые не входят в данную подпоследовательность, можно считать, что существуют $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$, такие, что $\mu_{ik} \rightarrow \lambda_i$, $i = 1, \dots, p$ и $\underline{\mu}_{p+1k} \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Пусть

$$L_p(u) = \langle J'(u_*) + \lambda_1 g'_1(u_*) + \lambda_2 g'_2(u_*) + \dots + \lambda_r g'_r(u_*) + \lambda_{r+1} g_{r+1}(u) + \lambda_{r+2} g_{r+2}(u) + \dots + \lambda_p g_p(u), u - u_* \rangle$$

Из леммы 7 следует, что $L_p(u_*) \leq L_p(u)$ для всех $u \in U_p$ и условия (8) выполняются, если функции $J(u)$ и $J_k(u)$ заменить на функции $L_p(u)$ и $L_{pk}(u)$, так что в силу теоремы 6 существует сходящаяся последовательность множителей Лагранжа $\mu_{p+1k} \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, такая, что выполняется условие (22), а это противоречит условию $\mu_{p+1k} \geq \underline{\mu}_{p+1k}$, $k \in \mathbb{N}$, и тому, что $\underline{\mu}_{p+1k} \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Соответственно, последовательность множителей Лагранжа $\mu_{p+1k} = \underline{\mu}_{p+1k}$, $k \in \mathbb{N}$, ограничена.

Используя это утверждение при $p = m, m+1, \dots, s-1$, получим, что существуют ограниченные последовательности множителей Лагранжа $\mu_{ik} \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, s$, такие, что условие (22) выполняется для всех $p \in \{0, 1, \dots, s-1\}$, а также $U_s = \{u \in X : Au = b\}$.

Применим теорему 2 к задаче $L_{sk}(u) \rightarrow \inf$, $u \in U_s$, для всех $k \in \mathbb{N}$ (что также возможно при $s = 0$, т.е. при $U = U_s = \{u \in X : Au = b\}$), откуда следует, что множество

$$M_k = \{y_k^* \in Y^* : u \in X, L_k(v_k) \leq L_k(u)\}$$

не пусто, где

$$L_k(u) = \langle J'_k(v_k) + \mu_{1k}g'_1(v_k) + \mu_{2k}g'_2(v_k) + \dots + \mu_{rk}g'_r(v_k), u - v_k \rangle + \mu_{r+1k}g_{r+1}(u) + \mu_{r+2k}g_{r+2}(u) + \dots + \mu_{sk}g_s(u) + \langle y_k^*, Au - b \rangle.$$

Предположим, что $\underline{y}_k^* \in M_k$, так что $\|\underline{y}_k^*\| \leq \inf\{\|y_k^*\| + 1 : y_k^* \in M_k\}$. Покажем, что последовательность $\|\underline{y}_k^*\|$, $k \in \mathbb{N}$, ограничена. Если это не так, то существует подпоследовательность данной последовательности, сходящаяся к $+\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Удаляя элементы последовательности, которые не являются элементами данной подпоследовательности, можно считать, что $\|\underline{y}_k^*\| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Действуя аналогично предыдущему (в случае $s = p$), можно считать, что существуют $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, s$, такие, что $\mu_{ik} \rightarrow \lambda_i$, $i = 1, \dots, s$, и $\|\underline{y}_k^*\| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда в силу леммы 7 $L_s(u_*) \leq L_s(u)$ для всех $u \in U_s$ и выполняются условия (8), если в них функции $J(u)$ и $J_k(u)$ заменить на функции $L_s(u)$ и $L_{sk}(u)$; таким образом, в силу теоремы 7 существует сходящаяся (по норме пространства Y^*) последовательность множителей Лагранжа $y_k^* \in M_k$, $k \in \mathbb{N}$, что противоречит условию $\|y_k^*\| + 1 \geq \|\underline{y}_k^*\|$ и тому, что $\|\underline{y}_k^*\| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, последовательность множителей Лагранжа y_k^* , $k \in \mathbb{N}$, также ограничена, и таким образом, существует константа $c \geq 0$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$ $\mu_{ik} \leq c$, $i = 1, \dots, s$, и $\|y_k^*\| \leq c$. Теорема доказана.

Рассмотрим ограниченные линейные операторы A и C , отображающие банахово пространство X на банаховы пространства Y и Z . Если в пространстве $Y \times Z$ ввести операции сложения $(y_1, z_1) + (y_2, z_2) = (y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ и умножения на действительное число $t \cdot (y, z) = (ty, tz)$ и норму $\|(y, z)\|_{Y \times Z} = \sqrt{\|y\|_Y^2 + \|z\|_Z^2}$, то оно становится банаховым пространством [5; с. 117]. Тогда каждый элемент $(y, z)^* \in (Y \times Z)^*$ однозначно представляется в виде $\langle (y, z)^*, (y, z) \rangle = \langle y^*, y \rangle + \langle z^*, z \rangle$ [1; с. 118], и уравнение $Ex = (Ax, Cx)$ определяет ограниченный линейный оператор $E: X \rightarrow Y \times Z$ [5; с. 129].

ТЕОРЕМА 9. Пусть выполняются следующие условия:

- 1°) X и Z – банаховы пространства, $f_i(u)$, $i = 1, \dots, m_1$, – выпуклые непрерывно дифференцируемые функции в X , $f_i(u) = \langle c_i, u \rangle - d_i$, $c_i \in X^*$, $d_i \in \mathbb{R}$, $i =$

$m_1 + 1, \dots, s_1$, и C – ограниченный линейный оператор, отображающий X на Z , $d \in Z$,

$$U_0 = \{u \in X : f_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, s_1, Cu = d\};$$

2°) Y – банахово пространство, $J(u)$, $g_i(u)$, $i = 1, \dots, t$, и $J_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, – выпуклые, непрерывно дифференцируемые функции в U_0 , $g_i(u) = \langle a_i, u \rangle - b_i$, $a_i \in X^*$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = t + 1, \dots, s$, и A – ограниченный линейный оператор, отображающий X на Y , $b \in Y$,

$$U = \{u \in U_0 : g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, s, Au = b\};$$

3°) существует $\bar{u} \in U$ такой, что $g_i(\bar{u}) \leq 0$, $i = 1, \dots, t$, и $f_i(\bar{u}) \leq 0$, $i = 1, \dots, t_1$, и множество EX замкнуто в $Y \times Z$;

4°) условия (2) выполняются, u_* – решение задачи (1) с наименьшей нормой, и v_k , $k \in \mathbb{N}$, – решения задачи (7), удовлетворяющие условиям (8).

Тогда существуют $c > 0$ и множители Лагранжа $\mu_{ik} \geq 0$, $i = 1, \dots, s$, и $y_k^* \in Y^*$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что для всех $k \in \mathbb{N}$, $\mu_{ik} \leq c$, $\mu_{ik}g_i(v_k) = 0$, $i = 1, \dots, s$, $\|y_k^*\| \leq c$ и $L_k(v_k) \leq L_k(u)$ для всех $u \in U_0$, где

$$L_k(u) = J_k(u) + \mu_{1k}g_1(u) + \mu_{2k}g_2(u) + \dots + \mu_{sk}g_s(u) + \langle y_k^*, Au - b \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку уравнение $Eu = (b, d)$ эквивалентно уравнениям $Au = b$ и $Cu = d$, то

$$U = \{u \in X : g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, s, f_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, s_1, Eu = (b, d)\}.$$

Так как $\langle (y, z)^*, (y, z) \rangle = \langle y^*, y \rangle + \langle z^*, z \rangle$, все условия теоремы 8 выполняются, и существуют $c > 0$ и множители Лагранжа $\mu_{ik} \geq 0$, $i = 1, \dots, s$, $\mu'_{ik} \geq 0$, $i = 1, \dots, s_1$, $y_k^* \in Y^*$ и $z_k^* \in Z^*$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mu_{ik} \leq c, \quad \mu_{ik}g_i(v_k) = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad \mu'_{ik}f_i(v_k) = 0, \quad i = 1, \dots, s_1, \\ \|y_k^*\| \leq c, \quad L_{1k}(v_k) \leq L_{1k}(u) \quad \text{для всех } u \in X, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_{1k}(u) &= \bar{L}_k(u) + \mu'_{1k}f_1(u) + \mu'_{2k}f_2(u) + \dots + \mu'_{s_1k}f_{s_1}(u) + \langle z_k^*, Cu - d \rangle, \\ \bar{L}_k(u) &= \langle J'_k(v_k) + \mu_{1k}g'_1(v_k) + \mu_{2k}g'_2(v_k) + \dots + \mu_{mk}g'_m(v_k), u - v_k \rangle \\ &\quad + \mu_{m+1k}g_{m+1}(u) + \mu_{m+2k}g_{m+2}(u) + \dots + \mu_{sk}g_s(u) + \langle y_k^*, Au - b \rangle. \end{aligned}$$

Применим теорему 3 к задаче $\bar{L}_k(u) \rightarrow \inf, u \in U_0$. Получим, что $\bar{L}_k(v_k) \leq \bar{L}_k(u)$ выполняется для всех $k \in \mathbb{N}$, $u \in U_0$; таким образом, из леммы 1 следует, что $\langle \bar{L}'_k(v_k), u - v_k \rangle \geq 0$ для всех $u \in U_0$. Так как $\bar{L}'_k(v_k) = L'_k(v_k)$, то $\langle L'_k(v_k), u - v_k \rangle \geq 0$ для всех $u \in U_0$, и таким образом, из леммы 1 следует, что $L_k(v_k) \leq L_k(u)$ для всех $u \in U_0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. П. Васильев, М. С. Солодкая, М. Д. Якимович, “О регуляризованном методе линеаризации при наличии погрешностей в исходных данных”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет.*, 1985, № 4, 3–8.
- [2] Н. Т. Чирич, “О регуляризованном методе линеаризации для минимизации выпуклой функции на многогранном множестве при наличии погрешностей в исходных данных”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет.*, 1987, № 2, 20–25.
- [3] N. Ciric, “On convergence of Lagrange’s multipliers from Kuhn–Tucker’s theorem applied on minimization problem of Tichonov’s function”, *Proceedings of the Mathematical Conference in Priština* (September 28–October 1, 1994), Univ. Priština, Priština, 1995, 129–132.
- [4] Ф. П. Васильев, *Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация*, Учеб. пособие, Наука, М., 1981.
- [5] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979.

Н. Чирич

University of Belgrade, Сербия

E-mail: n.ciric@sf.bg.ac.rs

Поступило

22.10.2009

Д. Костич

University of Belgrade, Сербия

E-mail: d.kostic@sf.bg.ac.rs