Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Бен Фрай, М. Бужельбен, Когомологии алгебры $\mathfrak{osp}(2|2)$, действующей на пространствах линейных дифференциальных операторов на суперпространстве $\mathbb{R}^{1|2}$, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 3, 331–342

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8667>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:17:27

УДК 512.73

Когомологии алгебры $\mathfrak{osp}(2|2)$, действующей на пространствах линейных дифференциальных операторов на суперпространстве $\mathbb{R}^{1|2}$

Н. Бен Фрай, М. Бужельбен

Вычисляется первое пространство дифференциальных когомологий ортосимплектической супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(2|2)$ с коэффициентами в суперпространстве линейных дифференциальных операторов, действующих на пространстве взвешенных плотностей на $(1, 2)$ -мерном вещественном суперпространстве. Кроме того, вычисляется первое пространство $\mathfrak{osp}(1|2)$ -относительных когомологий той же супералгебры с теми же коэффициентами. В явном виде выписаны 1-циклы, порождающие эти пространства когомологий. Полученные результаты представляют собой простейшее обобщение результатов работы [1].

Библиография: 12 названий.

1. Введение

Пространство взвешенных плотностей с весом λ (λ -плотностей) на $\mathbb{R}$, которое обозначается как

$$\mathcal{F}_\lambda = \{f(dx)^\lambda \mid f \in C^\infty(\mathbb{R})\}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

– это пространство сечений линейного расслоения $(T^*\mathbb{R})^{\otimes \lambda}$, где λ – натуральное число. Пусть $\text{Vect}(\mathbb{R})$ – алгебра Ли всех векторных полей $X_F = Fd/dx$ на $\mathbb{R}$, где $F \in C^\infty(\mathbb{R})$. Производная Ли L_D вдоль векторного поля D превращает $\mathcal{F}_\lambda$ в $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -модуль для любого $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$L_{X_F}(f(dx)^\lambda) = L_{X_F}^\lambda(f)(dx)^\lambda, \quad \text{где} \quad L_{X_F}^\lambda(f) = Ff' + \lambda fF'; \quad (1.1)$$

здесь через f' и F' обозначены df/dx и dF/dx . На пространстве $D_{\lambda, \mu}$ дифференциальных операторов $\mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{F}_\mu$ структура $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -модуля задается формулой

$$X_F \cdot A = L_{X_F}^\mu \circ A - A \circ L_{X_F}^\lambda \quad (1.2)$$

для всякого дифференциального оператора $A: f(dx)^\lambda \mapsto (Af)(dx)^\mu$.

В [2] Леком нашел пространства когомологий $H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{sl}(2), D_{\lambda, \mu})$ и $H_{\text{diff}}^2(\mathfrak{sl}(2), D_{\lambda, \mu})$, где $\mathfrak{sl}(2)$ реализуется как подалгебра Ли алгебры $\text{Vect}(\mathbb{R})$, порожденная множеством

$\{X_1, X_x, X_{x^2}\}$, а H_{diff}^* обозначает дифференциальные когомологии, которые получаются из коцепей, определяемых только дифференциальными операторами. Такие пространства естественно возникают в задаче описания деформаций $\mathfrak{sl}(2)$ -модуля $\mathcal{S}_{\mu-\lambda} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_{\mu-\lambda-k}$, т.е. пространства символов дифференциальных операторов из $D_{\lambda,\mu}$. Так, элементы пространства $H^1(\mathfrak{sl}(2), V)$ классифицируют бесконечно малые деформации $\mathfrak{sl}(2)$ -модуля V , а препятствия к интегрируемости данной бесконечно малой деформации модуля V являются элементами пространства $H^2(\mathfrak{sl}(2), V)$ (примеры можно найти в [3]–[6]).

Мы исследуем соответствующие суперструктуры. А именно, мы рассматриваем суперпространство $\mathbb{R}^{1|n}$, на котором определена контактная 1-форма α_n , и вводим суперпространство $\mathfrak{F}_{\lambda}^n$ λ -плотностей на суперпространстве $\mathbb{R}^{1|n}$. Пространства $\mathfrak{F}_{\lambda}^n$ являются модулями над супералгеброй Ли $\mathcal{K}(n)$ контактных векторных полей на $\mathbb{R}^{1|n}$; пространство $\mathfrak{D}_{\lambda,\mu}^n$ дифференциальных операторов $\mathfrak{F}_{\lambda}^n \rightarrow \mathfrak{F}_{\mu}^n$ обладает естественной структурой $\mathcal{K}(n)$ -модуля. Пространства $H_{\text{diff}}^i(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{D}_{\lambda,\mu}^n)$ с $i = 1$ и 2 нужно вычислить для того, чтобы описать деформации $\mathfrak{osp}(1|2)$ -модуля

$$\mathcal{S}_{\mu-\lambda}^n = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{F}_{\mu-\lambda-k/2}^n,$$

который является супераналогом модуля $\mathcal{S}_{\mu-\lambda}$ (см. [7]).

В [1] Басдури и Бен Аммар изучили этот вопрос для $n = 1$. В этом случае $\mathfrak{sl}(2)$ заменяется на супералгебру Ли $\mathfrak{osp}(1|2)$, естественно реализованную как подалгебра в $\mathcal{K}(1)$.

По-видимому, для значений n , рассмотренных до сих пор (0, 1 и 2 в настоящей статье), нет концептуальных различий в формулировках и результатах, полученных при изучении когомологий алгебры $\mathfrak{osp}(n|2)$, действующей на пространствах линейных дифференциальных операторов на суперпространстве $\mathbb{R}^{1|n}$. Основная задача состоит не в рассмотрении случаев $n = 3$ и т.д. Дело в том, что поведение и некоторые свойства супералгебр Ли $\mathfrak{osp}(n|2)$ и $\mathcal{K}(n)$ похожи для $n < 4$ [8]; случаи $n = 0$ и $n = 1$ особенно близки. Однако в некоторых вопросах случай $n = 2$ является исключительным из-за возникновения изоморфизма $\mathcal{K}(n) \simeq \text{Vect}(\mathbb{R}^{1|1})$ (см. [9]), и никогда нельзя знать заранее, в вопросах какого типа данное значение n станет исключительным. Есть основания предполагать, что свойства алгебр $\mathfrak{osp}(n|2)$ и $\mathcal{K}(n)$ становятся одинаковыми только для $n > 6$. Поэтому кто-то должен выполнить все вычисления, чтобы выявить интересные факты (как, например, теорема в разделе 4.3).

В этой статье мы изучаем случай $n = 2$. Иными словами, мы рассматриваем ортосимплектическую супералгебру Ли $\mathfrak{osp}(2|2)$, естественно реализованную как подалгебра алгебры $\mathcal{K}(2)$. Мы вычисляем

$$H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(2|2), \mathfrak{D}_{\lambda,\mu}^2) \quad \text{и} \quad H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(2|2), \mathfrak{osp}(1|2); \mathfrak{D}_{\lambda,\mu}^2).$$

Кроме того, мы выводим явные формулы для всех нетривиальных 1-коциклов. Эти пространства возникают при классификации бесконечно малых деформаций $\mathfrak{osp}(2|2)$ -модуля $\mathcal{S}_{\mu-\lambda}^2 = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{F}_{\mu-\lambda-k/2}^2$. В будущем мы надеемся описать все деформации этого модуля.

2. Определения и обозначения

Напомним, что пространство $C^\infty(\mathbb{R}^{1|2})$ состоит из элементов вида

$$F(x, \theta_1, \theta_2) = f_0(x) + f_1(x)\theta_1 + f_2(x)\theta_2 + f_{12}(x)\theta_1\theta_2,$$

где $f_0, f_1, f_2, f_{12} \in C^\infty(\mathbb{R})$, x – четная переменная, а θ_1 и θ_2 – нечетные переменные, т.е. $\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i$. Обозначим четность однородной функции F через $|F|$. Положим

$$\text{Vect}(\mathbb{R}^{1|2}) = \{F_0\partial_x + F_1\partial_1 + F_2\partial_2 \mid F_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{1|2})\},$$

где $\partial_i = \partial/\partial\theta_i$. Пусть $\mathcal{K}(2)$ обозначает супералгебру Ли контактных векторных полей на $\mathbb{R}^{1|2}$:

$$\mathcal{K}(2) = \{X \in \text{Vect}(\mathbb{R}^{1|2}) \mid \text{существует } F \in C^\infty(\mathbb{R}^{1|2}), \text{ для которого } \mathfrak{L}_X(\alpha_2) = F\alpha_2\},$$

где $\mathfrak{L}_X$ – производная Ли вдоль векторного поля X и

$$\alpha_2 = dx + \theta_1 d\theta_1 + \theta_2 d\theta_2.$$

Любое контактное векторное поле на $\mathbb{R}^{1|2}$ можно записать как

$$X_F = F\partial_x - \frac{1}{2}(-1)^{|F|} \sum_{i=1}^2 \bar{\eta}_i(F) \bar{\eta}_i,$$

где $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{1|2})$ и $\bar{\eta}_i = \partial_i - \theta_i\partial_x$. Контактная скобка определяется формулой $[X_F, X_G] = X_{\{F, G\}}$:

$$\{F, G\} = FG' - F'G - \frac{1}{2}(-1)^{|F|} \sum_{i=1}^2 \bar{\eta}_i(F) \cdot \bar{\eta}_i(G). \quad (2.1)$$

Ортосимплектическую супералгебру Ли $\mathfrak{osp}(2|2)$ можно реализовать как подалгебру в $\mathcal{K}(2)$:

$$\mathfrak{osp}(2|2) = \text{Span}(X_1, X_x, X_{x^2}, X_{x\theta_1}, X_{x\theta_2}, X_{\theta_1}, X_{\theta_2}, X_{\theta_1\theta_2}).$$

Легко видеть, что $\mathfrak{osp}(1|2)$ является подалгеброй в $\mathfrak{osp}(2|2)$:

$$\mathfrak{osp}(1|2) = \text{Span}(X_1, X_x, X_{x^2}, X_{x\theta_1}, X_{\theta_1}) \simeq \text{Span}(X_1, X_x, X_{x^2}, X_{x\theta_2}, X_{\theta_2}).$$

Пространство λ -плотностей определяется формулой

$$\mathfrak{F}_\lambda^2 = \{F(x, \theta_1, \theta_2)\alpha_2^\lambda \mid F(x, \theta_1, \theta_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^{1|2})\}. \quad (2.2)$$

Как векторное пространство $\mathfrak{F}_\lambda^2$ изоморфно пространству $C^\infty(\mathbb{R}^{1|2})$, но производная Ли плотности $G\alpha_2^\lambda$ вдоль векторного поля X_F в $\mathcal{K}(2)$ равна

$$\mathfrak{L}_{X_F}(G\alpha_2^\lambda) = \mathfrak{L}_{X_F}^\lambda(G)\alpha_2^\lambda, \quad \text{где } \mathfrak{L}_{X_F}^\lambda(G) = \mathfrak{L}_{X_F}(G) + \lambda F'G. \quad (2.3)$$

В ограничении на подалгебру $\mathfrak{osp}(2|2)$ мы получаем однопараметрическое семейство $\mathfrak{osp}(2|2)$ -модулей на $C^\infty(\mathbb{R}^{1|2})$, для которого мы используем прежнее обозначение $\mathfrak{F}_\lambda^2$. В качестве $\mathfrak{osp}(1|2)$ -модуля пространство плотностей разлагается в сумму

$$\mathfrak{F}_\lambda^2 \simeq \mathfrak{F}_\lambda^1 \oplus \Pi(\mathfrak{F}_{\lambda+1/2}^1), \quad (2.4)$$

где Π – оператор изменения четности.

Поскольку $-\bar{\eta}_i^2 = \partial_x$ и $\partial_i = \bar{\eta}_i - \theta_i \bar{\eta}_i^2$, всякий дифференциальный оператор $A \in \mathfrak{D}_{\lambda,\mu}^2$ можно записать в виде

$$A(F\alpha_2^\lambda) = \sum_{\ell,m} a_{\ell,m}(x, \theta) \bar{\eta}_1^\ell \bar{\eta}_2^m(F) \alpha_2^\mu, \quad (2.5)$$

где коэффициенты $a_{\ell,m}(x, \theta)$ – произвольные функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *В качестве $\mathfrak{osp}(1|2)$ -модуля пространство $\mathfrak{D}_{\lambda,\mu}^2$ допускает разложение*

$$\mathfrak{D}_{\lambda,\mu}^2 \simeq \mathfrak{D}_{\lambda,\mu}^1 \oplus \mathfrak{D}_{\lambda+1/2,\mu+1/2}^1 \oplus \Pi(\mathfrak{D}_{\lambda,\mu+1/2}^1 \oplus \mathfrak{D}_{\lambda+1/2,\mu}^1). \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой элемент $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{1|2})$ можно единственным образом записать в виде $F = F_1 + F_2\theta_2$, где $\partial_2 F_1 = \partial_2 F_2 = 0$. Отсюда легко вывести, что для всякого $X_H \in \mathfrak{osp}(1|2)$

$$\mathfrak{L}_{X_H}^\lambda(F) = \mathfrak{L}_{X_H}^\lambda(F_1) + \mathfrak{L}_{X_H}^{\lambda+1/2}(F_2)\theta_2.$$

Значит, отображение

$$\Phi_\lambda : \mathfrak{F}_\lambda^2 \rightarrow \mathfrak{F}_\lambda^1 \oplus \Pi(\mathfrak{F}_{\lambda+1/2}^1), \quad F\alpha_2^\lambda \mapsto (F_1\alpha_1^\lambda, \Pi(F_2\alpha_1^{\lambda+1/2})), \quad (2.7)$$

является $\mathfrak{osp}(1|2)$ -изоморфизмом. Отсюда получаем $\mathfrak{osp}(1|2)$ -изоморфизм

$$\Psi_{\lambda,\mu} : \mathfrak{D}_{\lambda,\mu}^1 \oplus \mathfrak{D}_{\lambda+1/2,\mu+1/2}^1 \oplus \Pi(\mathfrak{D}_{\lambda,\mu+1/2}^1 \oplus \mathfrak{D}_{\lambda+1/2,\mu}^1) \rightarrow \mathfrak{D}_{\lambda,\mu}^2, \quad A \mapsto \Phi_\mu^{-1} \circ A \circ \Phi_\lambda. \quad (2.8)$$

Здесь мы отождествляем $\mathfrak{osp}(1|2)$ -модули с помощью изоморфизмов

$$\begin{aligned} \Pi(\mathfrak{D}_{\lambda,\mu+1/2}^1) &\rightarrow \text{Hom}_{\text{diff}}(\mathfrak{F}_\lambda^1, \Pi(\mathfrak{F}_{\mu+1/2}^1)), & \Pi(A) &\mapsto \Pi \circ A, \\ \Pi(\mathfrak{D}_{\lambda+1/2,\mu}^1) &\rightarrow \text{Hom}_{\text{diff}}(\mathfrak{F}_{\lambda+1/2}^1, \Pi(\mathfrak{F}_\mu^1)), & \Pi(A) &\mapsto A \circ \Pi, \\ \mathfrak{D}_{\lambda+1/2,\mu+1/2}^1 &\rightarrow \text{Hom}_{\text{diff}}(\Pi(\mathfrak{F}_{\lambda+1/2}^1), \Pi(\mathfrak{F}_{\mu+1/2}^1)), & \Pi(A) &\mapsto \Pi \circ A \circ \Pi. \end{aligned}$$

3. Пространство $H^1(\mathfrak{osp}(2|2), \mathfrak{D}_{\lambda,\mu}^2)$

3.1. Когомологии супералгебры Ли [10]. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ – супералгебра Ли, действующая на суперпространстве $V = V_0 \oplus V_1$, и пусть $\mathfrak{k}$ – подалгебра в $\mathfrak{g}$. (Когда символ $\mathfrak{k}$ отсутствует в соответствующих формулах, подразумевается, что $\mathfrak{k} = \{0\}$.) Пространство $\mathfrak{k}$ -относительных n -коцепей в $\mathfrak{g}$ со значениями в V определяется как $\mathfrak{g}$ -модуль

$$C^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; V) := \text{Hom}_{\mathfrak{k}}(\Lambda^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}); V).$$

Кограничный оператор $\delta_n : C^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; V) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; V)$ является $\mathfrak{g}$ -отображением, удовлетворяющим условию $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$. Ядро оператора δ_n , которое обозначается через $Z^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; V)$, называется пространством $\mathfrak{k}$ -относительных n -коциклов, а элементы этого ядра, принадлежащие образу оператора δ_{n-1} , называются $\mathfrak{k}$ -относительными n -кограницами. Мы обозначаем пространство n -кограниц через $B^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; V)$.

По определению n -е пространство $\mathfrak{k}$ -относительных когомологий – это фактор-пространство

$$H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; V) = Z^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; V) / B^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; V).$$

Нам понадобятся явные выражения для операторов δ_n (которые мы в дальнейшем обозначаем через δ) только при $n = 0$ и 1 ; для $v \in C^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; V) = V^{\mathfrak{k}}$ оператор δ выражается формулой $\delta v(g) := (-1)^{|g||v|} g \cdot v$, где

$$V^{\mathfrak{k}} = \{v \in V \mid h \cdot v = 0 \text{ для всех } h \in \mathfrak{k}\},$$

а для $\Upsilon \in C^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; V)$ – формулой

$$\delta(\Upsilon)(g, h) := (-1)^{|g||\Upsilon|} g \cdot \Upsilon(h) - (-1)^{|h|(|g|+|\Upsilon|)} h \cdot \Upsilon(g) - \Upsilon([g, h]) \quad \text{для любых } g, h \in \mathfrak{g}.$$

3.2. Основная теорема. Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пространство $H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(2|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2)$ чисто четное. Его структура описывается следующим образом:*

$$H_{\text{diff}}^1(\mathcal{K}(2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}^2, & \text{если } \mu - \lambda = 0; \\ \mathbb{R}^3, & \text{если } (\lambda, \mu) = \left(-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right) \text{ и } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Соответствующие пространства когомологий порождаются 1-коциклами

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\lambda, \lambda}(X_G) &= G', \\ \tilde{\Upsilon}_{\lambda, \lambda}(X_G) &= \begin{cases} \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2(G), & \text{если } \lambda = 0, \\ 2\lambda \bar{\eta}_1(\partial_2(G)) - (-1)^{|G|}(\partial_2(G) \bar{\eta}_1 + \theta_2 \bar{\eta}_2 \bar{\eta}_1(G) \bar{\eta}_2), & \text{если } \lambda \neq 0, \end{cases} \\ \Upsilon_{-k/2, k/2}(X_G) &= G' \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2^{2k-1}, \\ \tilde{\Upsilon}_{-k/2, k/2}(X_G) &= k \bar{\eta}_1(\partial_2(G)) \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2^{2k-1} - (-1)^{|G|}(\partial_2(G) \bar{\eta}_2^{2k+1} - \bar{\eta}_1(\theta_2 \partial_2(G)) \bar{\eta}_1^{2k+1}), \\ \bar{\Upsilon}_{-k/2, k/2}(X_G) &= (k-1) G'' \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2^{2k-3} + (-1)^{|G|}(\bar{\eta}_2(G') \bar{\eta}_1^{2k-1} - \bar{\eta}_1(G') \bar{\eta}_2^{2k-1}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Доказательству теоремы 3.1 посвящен раздел 5. В нем используется описание пространства когомологий $H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2)$ и пространства $\mathfrak{osp}(1|2)$ -относительных когомологий $H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(2|2), \mathfrak{osp}(1|2); \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2)$. В свою очередь, описание последнего пространства использует описание некоторых билинейных $\mathfrak{osp}(1|2)$ -инвариантных отображений.

4. Инвариантные операторы и когомологии алгебры $\mathfrak{osp}(1|2)$

4.1. Инвариантные билинейные дифференциальные операторы. Заметим, что имеет место изоморфизм $\mathfrak{osp}(1|2)$ -модулей

$$\mathfrak{osp}(2|2) \simeq \mathfrak{osp}(1|2) \oplus \Pi(\mathfrak{h}),$$

где $\mathfrak{h}$ – подпространство в $\mathfrak{F}_{-1/2}^1$, порожденное множеством $\{\theta_1\alpha_1^{-1/2}, x\alpha_1^{-1/2}, \alpha_1^{-1/2}\}$. Действительно, легко видеть, что в присоединенном представлении супералгебра Ли $\mathcal{K}(2)$ изоморфна пространству $\mathfrak{F}_{-1}^2$, которое изоморфно как $\mathfrak{osp}(1|2)$ -модуль прямой сумме $\mathfrak{F}_{-1}^1 \oplus \Pi(\mathfrak{F}_{-1/2}^1)$. Таким образом, пространство $\mathfrak{osp}(2|2)$ изоморфно как $\mathfrak{osp}(1|2)$ -модуль образу $\Phi_\lambda(\mathfrak{osp}(2|2))$ при отображении Φ_λ , определенном формулой (2.7). Точнее, любой элемент X_F можно представить в виде $X_F = X_{F_1} + X_{F_2\theta_2}$, где $\partial_2 F_1 = \partial_2 F_2 = 0$, так что $X_{F_1} \in \mathfrak{osp}(1|2)$, а слагаемое $X_{F_2\theta_2}$ отождествляется с $\Pi(F_2\alpha_1^{-1/2}) \in \Pi(\mathfrak{h})$; в дальнейшем мы обозначаем это слагаемое через $X_{\overline{F}_2}$.

Для вычисления $\mathfrak{osp}(1|2)$ -относительных когомологий алгебры $\mathfrak{osp}(2|2)$ нам понадобится описание $\mathfrak{osp}(1|2)$ -инвариантных отображений из $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{F}_\lambda^1$ в $\mathfrak{F}_\mu^1$. Сначала мы опишем $\mathfrak{sl}(2)$ -инвариантные отображения из $\mathfrak{h} \otimes \mathcal{F}_\lambda$ в $\mathcal{F}_\mu$. Очевидно, имеет место изоморфизм $\mathfrak{sl}(2)$ -модулей $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}_0 \oplus \Pi(\mathfrak{h}_1)$, где $\mathfrak{h}_0$ – подпространство в $\mathcal{F}_{-1/2}$, порожденное множеством $\{x(dx)^{-1/2}, (dx)^{-1/2}\}$, и $\mathfrak{h}_1$ – подпространство в $\mathcal{F}_0$, порожденное элементом 1.

ЛЕММА 4.1 (см. [1]). Пусть $A: \mathfrak{h}_0 \otimes \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{F}_\mu$, $(hdx^{-1/2}, fdx^\lambda) \mapsto A(h, f)dx^\mu$ – $\mathfrak{sl}(2)$ -инвариантный нетривиальный билинейный дифференциальный оператор. Тогда $\mu = \lambda + k - 1/2$, где k – неотрицательное целое, удовлетворяющее условию

$$k(k-1)(2\lambda+k-1)(2\lambda+k-2) = 0,$$

а отображение A определяется с точностью до умножения на скаляр формулой

$$A(h, f) = hf^{(k)} + k(2\lambda+k-1)h'f^{(k-1)}.$$

Следующая лемма доказывается прямыми вычислениями.

ЛЕММА 4.2. Если $B: \mathfrak{h}_1 \otimes \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{F}_\mu$, $(h, fdx^\lambda) \mapsto B(h, f)dx^\mu$ – нетривиальный $\mathfrak{sl}(2)$ -инвариантный билинейный дифференциальный оператор, то

$$\mu = \lambda \quad \text{или} \quad (\lambda, \mu) = \left(\frac{1-k}{2}, \frac{1+k}{2} \right) \quad \text{и} \quad B(h, f) = ahf^{(\mu-\lambda)},$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $\mathcal{A}: \mathfrak{h} \times \mathfrak{F}_\lambda^1 \rightarrow \mathfrak{F}_\mu^1$, $(H\alpha_1^{-1/2}, F\alpha_1^\lambda) \mapsto \mathcal{A}(H, F)\alpha_1^\mu$ – ненулевой $\mathfrak{osp}(1|2)$ -инвариантный билинейный дифференциальный оператор. Тогда справедливо одно из следующих утверждений.

i) Если $\mu = \lambda + k - 1/2$, где k – неотрицательное целое, удовлетворяющее условию $k(k-1)(2\lambda+k-1) = 0$, то с точностью до умножения на скаляр отображение $\mathcal{A}$ задается формулой

$$\mathcal{A}(H, F) = HF^{(k)} + k(2\lambda+k-1)H'F^{(k-1)} - (-1)^{|H|}k\bar{\eta}_1(H)\bar{\eta}_1(F^{(k-1)}). \quad (4.1)$$

ii) Если $\mu = \lambda + k$, где k – неотрицательное целое, удовлетворяющее условию $k(2\lambda+k)(2\lambda+k-1) = 0$, то с точностью до умножения на скаляр отображение $\mathcal{A}$ задается формулой

$$\mathcal{A}(H, F) = (-1)^{|H|}H\bar{\eta}_1(F^{(k)}) + (2\lambda+k)(\bar{\eta}_1(H)F^{(k)} + kH'\bar{\eta}_1(F^{(k-1)})). \quad (4.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Для $k = 0, 1$ операторы (4.1) и (4.2) не только $\mathfrak{osp}(1|2)$ -инвариантны, но и $\mathcal{K}(1)$ -инвариантны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = A_{\bar{0}} + A_{\bar{1}}$ – разложение отображения A на четную и нечетную составляющие. Имеет место изоморфизм $\mathfrak{sl}(2)$ -модулей:

$$\mathfrak{h} \times \mathfrak{F}_{\lambda}^1 \simeq \mathfrak{h}_0 \otimes \mathcal{F}_{\lambda} \oplus \mathfrak{h}_0 \otimes \Pi(\mathcal{F}_{\lambda+1/2}) \oplus \Pi(\mathfrak{h}_1) \otimes \mathcal{F}_{\lambda} \oplus \Pi(\mathfrak{h}_1) \otimes \Pi(\mathcal{F}_{\lambda+1/2}). \quad (4.3)$$

Таким образом, отображение $A_{\bar{0}}$ раскладывается в сумму четырех отображений

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0 \otimes \mathcal{F}_{\lambda} &\rightarrow \mathcal{F}_{\mu}, & \mathfrak{h}_0 \otimes \Pi(\mathcal{F}_{\lambda+1/2}) &\rightarrow \Pi(\mathcal{F}_{\mu+1/2}), \\ \Pi(\mathfrak{h}_1) \otimes \mathcal{F}_{\lambda} &\rightarrow \Pi(\mathcal{F}_{\mu+1/2}), & \Pi(\mathfrak{h}_1) \otimes \Pi(\mathcal{F}_{\lambda+1/2}) &\rightarrow \mathcal{F}_{\mu}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

а $A_{\bar{1}}$ раскладывается в сумму четырех отображений

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0 \otimes \mathcal{F}_{\lambda} &\rightarrow \Pi(\mathcal{F}_{\mu+1/2}), & \mathfrak{h}_0 \otimes \Pi(\mathcal{F}_{\lambda+1/2}) &\rightarrow \mathcal{F}_{\mu}, \\ \Pi(\mathfrak{h}_1) \otimes \mathcal{F}_{\lambda} &\rightarrow \mathcal{F}_{\mu}, & \Pi(\mathfrak{h}_1) \otimes \Pi(\mathcal{F}_{\lambda+1/2}) &\rightarrow \Pi(\mathcal{F}_{\mu+1/2}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Заметим, что оператор смены четности Π коммутирует с действием $\mathfrak{sl}(2)$; значит, выражения для операторов (4.4) и (4.5) можно вывести с помощью лемм 4.1 и 4.2. Осталось воспользоваться инвариантностью относительно X_{θ_1} и $X_{x\theta_1}$.

4.2. Пространство $H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2)$. Рассмотрим супералгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{k}$ – подалгебра и $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}$ -модуль, для которого $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$. Возьмем 1-коцикл $\Upsilon \in Z^1(\mathfrak{g}, V)$, где V – $\mathfrak{g}$ -модуль. Условие коцикличности имеет вид

$$\Upsilon([g, h]) - (-1)^{|g||\Upsilon|} g \cdot \Upsilon(h) + (-1)^{|h|(|g|+|\Upsilon|)} h \cdot \Upsilon(g) = 0, \quad g, h \in \mathfrak{g}.$$

Положим $\Upsilon_{\mathfrak{k}} = \Upsilon|_{\mathfrak{k}}$ и $\Upsilon_{\mathfrak{p}} = \Upsilon|_{\mathfrak{p}}$. Очевидно, $\Upsilon_{\mathfrak{k}}$ является 1-коциклом над $\mathfrak{k}$, и если $\Upsilon_{\mathfrak{k}} = 0$, то $\Upsilon_{\mathfrak{p}}$ – $\mathfrak{k}$ -инвариантен. Таким образом, пространство $H^1(\mathfrak{g}, V)$ тесно связано с пространством $H^1(\mathfrak{k}, V)$. Коциклы $\Upsilon_{\mathfrak{k}}$ и $\Upsilon_{\mathfrak{p}}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\Upsilon_{\mathfrak{p}}([h, p]) - (-1)^{|h||\Upsilon|} h \cdot \Upsilon_{\mathfrak{p}}(p) + (-1)^{|p|(|h|+|\Upsilon|)} p \cdot \Upsilon_{\mathfrak{k}}(h) = 0, \quad h \in \mathfrak{k}, \quad p \in \mathfrak{p}, \quad (4.6)$$

$$\Upsilon_{\mathfrak{k}}([p, p']) - (-1)^{|p||\Upsilon|} p \cdot \Upsilon_{\mathfrak{p}}(p') + (-1)^{|p'|(|p|+|\Upsilon|)} p' \cdot \Upsilon_{\mathfrak{p}}(p) = 0, \quad p, p' \in \mathfrak{p}. \quad (4.7)$$

В рассматриваемой ситуации имеем $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(2|2)$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{osp}(1|2)$, $\mathfrak{p} = \Pi(\mathfrak{h})$ и $V = \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2$. Итак, нашим первым шагом в доказательстве теоремы 3.1 станет вычисление пространства $H^1(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2)$. Благодаря изоморфизму (2.6), зная $H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^1)$, мы можем вычислить $H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2)$:

$$\begin{aligned} H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2) &\simeq H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^1) \oplus H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{D}_{\lambda+1/2, \mu+1/2}^1) \\ &\oplus H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \Pi(\mathfrak{D}_{\lambda, \mu+1/2}^1)) \oplus H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \Pi(\mathfrak{D}_{\lambda+1/2, \mu}^1)). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Очевидно, структуру пространства $H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \Pi(\mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^1))$ можно вывести из структуры $H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^1)$. Действительно, каждому $\Upsilon \in Z_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^1)$ соответствует $\hat{\Upsilon} \in Z_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \Pi(\mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^1))$, где $\hat{\Upsilon}(X_G) = \Pi(\sigma \circ \Upsilon(X_G))$ для $\sigma(F) = (-1)^{|F|} F$.

Ясно, что Υ является кограницей тогда и только тогда, когда $\hat{\Upsilon}$ является кограницей. Напомним, что пространство $H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^1)$, которое было вычислено в [1], имеет вид

$$H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } \lambda = \mu; \\ \mathbb{R}^2, & \text{если } \lambda = \frac{1-k}{2}, \mu = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Базис пространства $H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^1)$ состоит из классов когомологий 1-коциклов $\Gamma_{\lambda, \mu}$ и $\tilde{\Gamma}_{\lambda, \mu}$, которые определяются равенствами

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda, \lambda}(X_G) &= G', \\ \Gamma_{(1-k)/2, k/2}(X_G) &= (-1)^{|G|} \bar{\eta}_1^2(G) \bar{\eta}_1^{2k-1}, \\ \tilde{\Gamma}_{(1-k)/2, k/2}(X_G) &= (-1)^{|G|} (k-1) \bar{\eta}_1^4(G) \bar{\eta}_1^{2k-3} + \bar{\eta}_1^3(G) \bar{\eta}_1^{2k-2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.3. Пространство $H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(2|2), \mathfrak{osp}(1|2); \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2)$. В этом подразделе мы вычислим пространство $H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(2|2), \mathfrak{osp}(1|2); \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2)$ и докажем, что оно нетривиально в отличие от случая $n = 1$, в котором $H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{sl}(2); \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^1) = 0$ (см. [1]). Отметим, что первый автор доказал в [11], что пространство $H_{\text{diff}}^1(\mathcal{K}(2), \mathcal{K}(1); \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2)$ тоже нетривиально, тогда как, согласно [12], пространство $H_{\text{diff}}^1(\mathcal{K}(1), \text{Vect}(\mathbb{R}); \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^1)$ тривиально. Таким образом, случай $n = 2$ является в этом смысле особым случаем.

ТЕОРЕМА 4.5. *Выполнено неравенство $\dim H_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(2|2), \mathfrak{osp}(1|2); \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2) \leq 1$. Эта размерность равна 1 тогда и только тогда, когда $\lambda = \mu \neq 0$ или $(\lambda, \mu) = (-k/2, k/2)$, где $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Соответствующие пространства порождаются классами когомологий 1-коциклов*

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon}_{\lambda, \lambda}(X_G) &= 2\lambda \bar{\eta}_1(\partial_2(G)) - (-1)^{|G|} (\partial_2(G) \bar{\eta}_1 + \theta_2 \bar{\eta}_2 \bar{\eta}_1(G) \bar{\eta}_2), \\ \tilde{\Upsilon}_{-k/2, k/2}(X_G) &= k \bar{\eta}_1(\partial_2(G)) \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2^{2k-1} - (-1)^{|G|} (\partial_2(G) \bar{\eta}_2^{2k+1} - \bar{\eta}_1(\theta_2 \partial_2(G)) \bar{\eta}_1^{2k+1}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

В доказательстве теоремы 4.5 используется следующий классический факт:

ЛЕММА 4.6. *Пусть $\mathfrak{g}$ – супералгебра Ли, U, V и W – $\mathfrak{g}$ -модули и $A: U \otimes V \rightarrow W$ – билинейное отображение. Тогда присоединенные отображения*

$$\begin{aligned} A_1: \Pi(U) \otimes V &\rightarrow W, & A_2: \Pi(U) \otimes \Pi(V) &\rightarrow \Pi(W), \\ A_3: \Pi(U) \otimes V &\rightarrow \Pi(W), & A_4: \Pi(U) \otimes \Pi(V) &\rightarrow W, \end{aligned}$$

определенные правилами

$$\begin{aligned} A_1(\Pi(u) \otimes v) &= (-1)^{|u|} A(u \otimes v), & A_2(\Pi(u) \otimes \Pi(v)) &= (-1)^{|u|} \Pi(A(u \otimes v)), \\ A_3(\Pi(u) \otimes v) &= (-1)^{|v|} \Pi(A(u \otimes v)), & A_4(\Pi(u) \otimes \Pi(v)) &= (-1)^{|v|} A(u \otimes v), \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}$ -инвариантны в том и только том случае, если отображение A $\mathfrak{g}$ -инвариантно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.5. Рассмотрим 1-коцикл Υ над $\mathfrak{osp}(2|2)$, обращающийся в нуль на $\mathfrak{osp}(1|2)$. Для такого коцикла уравнения (4.6) и (4.7) принимают вид

$$X_G \cdot \Upsilon(X_{\overline{H}}) - (-1)^{|G||\Upsilon|} \Upsilon([X_G, X_{\overline{H}}]) = 0, \quad (4.11)$$

$$(-1)^{|\overline{H}_1||\Upsilon|} X_{\overline{H}_1} \cdot \Upsilon(X_{\overline{H}_2}) - (-1)^{(|\overline{H}_1|+|\Upsilon|)|\overline{H}_2|} X_{\overline{H}_2} \cdot \Upsilon(X_{\overline{H}_1}) = 0 \quad (4.12)$$

при всех $X_{\overline{H}}, X_{\overline{H}_1}, X_{\overline{H}_2} \in \Pi(\mathfrak{h})$ и $X_G \in \mathfrak{osp}(1|2)$. В соответствии с изоморфизмом (2.7) отображение Υ разлагается на четыре компоненты

$$\begin{aligned} \Pi(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{F}_\lambda^1 &\rightarrow \mathfrak{F}_\mu^1, & \Pi(\mathfrak{h}) \times \Pi(\mathfrak{F}_{\lambda+1/2}^1) &\rightarrow \Pi(\mathfrak{F}_{\mu+1/2}^1), \\ \Pi(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{F}_\lambda^1 &\rightarrow \Pi(\mathfrak{F}_{\mu+1/2}^1), & \Pi(\mathfrak{h}) \times \Pi(\mathfrak{F}_{\lambda+1/2}^1) &\rightarrow \mathfrak{F}_\mu^1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Уравнение (4.11) выражает $\mathfrak{osp}(1|2)$ -инвариантность каждого из этих билинейных отображений. Используя предложение 4.3, лемму 4.6 и уравнение (4.12), мы можем доказать, что если отображение Υ является нечетным 1-коциклом, то с точностью до умножения на скаляр оно представляется в виде

$$\Upsilon = \begin{cases} \delta(a\partial_2^k + b(\overline{\eta}_1 + \theta_2\overline{\eta}_1\overline{\eta}_2)\partial_x^{k-1}), & \text{если } (\lambda, \mu) = \left(\frac{1-k}{2}, \frac{k}{2}\right), \\ \delta(a\partial_2^k + b\theta_2\overline{\eta}_1\overline{\eta}_2\partial_x^{k-1}), & \text{если } (\lambda, \mu) = \left(-\frac{k}{2}, \frac{k-1}{2}\right), \\ \delta(\partial_2), & \text{если } \mu = \lambda + \frac{1}{2} \text{ и } \lambda \neq 0, -\frac{1}{2}; \\ \delta(\theta_2), & \text{если } \mu = \lambda - \frac{1}{2}; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

здесь $a, b \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Если же Υ является четным 1-коциклом, то с помощью тех же рассуждений мы получаем

$$\Upsilon = \begin{cases} a\tilde{\Upsilon}_{-k/2, k/2} + b\delta(\overline{\eta}_1\partial_2\partial_x^{k-1}), & \text{если } (\lambda, \mu) = \left(-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right), \\ a\tilde{\Upsilon}_{\lambda, \lambda} + b\delta(\theta_2\overline{\eta}_2), & \text{если } \lambda = \mu \neq 0, \\ \delta(\theta_2(a\overline{\eta}_1 + b\overline{\eta}_2)), & \text{если } \lambda = \mu = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\tilde{\Upsilon}_{\lambda, \lambda}$ и $\tilde{\Upsilon}_{-k/2, k/2}$ определены формулами (4.10). Итак, для завершения доказательства теоремы 4.5 осталось вычислить классы когомологий 1-коциклов $\tilde{\Upsilon}_{\lambda, \lambda}$ и $\tilde{\Upsilon}_{-k/2, k/2}$.

ЛЕММА 4.7. *Отображения $\tilde{\Upsilon}_{\lambda, \lambda}$ и $\tilde{\Upsilon}_{-k/2, k/2}$ являются нетривиальными $\mathfrak{osp}(1|2)$ -относительными 1-коциклами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что для любого четного элемента $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{1|2})$

$$\tilde{\Upsilon}_{-k/2, k/2}(X_{\theta_1\theta_2})(F\alpha_2^{-k/2}) = -k\overline{\eta}_1\overline{\eta}_2^{2k-1}(F)\alpha_2^{k/2}. \quad (4.14)$$

Теперь предположим, что существует четный оператор $A \in \mathfrak{D}_{-k/2, k/2}^2$, для которого $\tilde{\Upsilon}_{-k/2, k/2}$ совпадает с δA , т.е.

$$\tilde{\Upsilon}_{-k/2, k/2}(X_G) = \mathfrak{L}_{X_G}^{k/2} \circ A - A \circ \mathfrak{L}_{X_G}^{-k/2}. \quad (4.15)$$

Оператор A имеет вид (2.5); из условия (4.15) вытекает постоянство коэффициентов этого оператора (что равносильно равенству $X_1 \cdot A = 0$). Легко проверить, что уравнение (4.15) не имеет решений: из отношения (2.3) следует, что правая часть (4.15) не может оказаться равной (4.14). Мы получили противоречие. Аналогично доказывается, что коцикл $\tilde{\Upsilon}_{\lambda, \lambda}$ нетривиален, что доказывает лемму 4.7, а вместе с ней и теорему 4.5.

СЛЕДСТВИЕ 4.8. *C точностью до кограницы любой 1-коцикл*

$$\Upsilon \in Z_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(2|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2)$$

инвариантен относительно векторного поля $X_1 = \partial_x$; следовательно, отображение Υ допускает выражение с постоянными коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем условие 1-коцикличности:

$$X_1 \cdot \Upsilon(X_F) - (-1)^{|F| |\Upsilon|} X_F \cdot \Upsilon(X_1) - \Upsilon([X_1, X_F]) = 0. \quad (4.16)$$

Из отношений (4.9) и теоремы 4.5 вытекает, что с точностью до кограницы

$$\Upsilon(X_1) = 0;$$

значит, уравнение (4.16) принимает вид

$$X_1 \cdot \Upsilon(X_F) - \Upsilon([X_1, X_F]) = 0,$$

а это не что иное как условие инвариантности отображения Υ относительно X_1 .

5. Доказательство теоремы 3.1

Рассмотрим 1-коцикл $\Upsilon \in Z_{\text{diff}}^1(\mathfrak{osp}(2|2), \mathfrak{D}_{\lambda, \mu}^2)$. Если коцикл $\Upsilon|_{\mathfrak{osp}(1|2)}$ тривиален, то 1-коцикл Υ полностью описывается теоремой 4.5. Предположим, что $\Upsilon|_{\mathfrak{osp}(1|2)}$ нетривиален. Ясно, что с точностью до границы общий вид коцикла $\Upsilon|_{\mathfrak{osp}(1|2)}$ задается равенствами (4.9) вместе с изоморфизмом (4.8), в то время как $\Upsilon|_{\Pi(\mathfrak{h})}$ по существу описывается уравнением (4.6) и следствием 4.8. А именно, в силу равенств (4.9) и изоморфизма (4.8) 1-коцикл Υ может быть нетривиален, только если либо $\lambda = \mu$, либо $\lambda = \mu \pm 1/2$, либо $(\lambda, \mu) = (-k/2, k/2)$, $((1-k)/2, k/2)$, $(-k/2, (k-1)/2)$, где $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, нам нужно рассмотреть каждый из этих случаев. Всюду ниже через ε обозначаются константы.

Случай 1: $\lambda = \mu$. Рассматривая равенства (4.9) и изоморфизм (4.8), мы выделяем два подслучая.

i) Если $\lambda = \mu \neq 0$, то отображение $\Upsilon|_{\mathfrak{osp}(1|2)}$ задается формулой

$$\Upsilon|_{\mathfrak{osp}(1|2)}(X_{G_1})(F\alpha_2^\lambda) = (\varepsilon_1 G'_1 F_1 + \varepsilon_2 G'_1 F_2 \theta_2) \alpha_2^\lambda,$$

где $F = F_1 + F_2\theta_2$, причем $\partial_2 F_1 = \partial_2 F_2 = 0$. Прямые вычисления с использованием отношений (4.6), (4.7) и следствия 4.8 дают

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad \text{и} \quad \Upsilon_{|\Pi(\mathfrak{h})}(X_{\overline{G_2}})(F\alpha_2^\lambda) = \varepsilon_1(-1)^{|F|}G'_2F\theta_2\alpha_2^\lambda.$$

Значит, Υ кратно $\Upsilon_{\lambda,\lambda}$ (см. (3.2)).

ii) Если $\lambda = \mu = 0$, то отображение $\Upsilon_{|\mathfrak{osp}(1|2)}$ задается формулой

$$\Upsilon_{|\mathfrak{osp}(1|2)}(X_{G_1})(F) = (\varepsilon_1 G'_1 F_1 + (\varepsilon_2 G'_1 F_2 + (-1)^{|F_1|}(\varepsilon_3 G'_1 \bar{\eta}_1(F_1) + \varepsilon_4 \eta_1(G'_1 F_1))\theta_2).$$

Те же рассуждения, что и выше, показывают, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_3 = 0$ и

$$\Upsilon_{|\Pi(\mathfrak{h})}(X_{\overline{G_2}})(F) = (\varepsilon_1 G'_2 \theta_2 + \varepsilon_4 (-1)^{|G_2|} \bar{\eta}_1(G_2))F.$$

Значит, Υ является линейной комбинацией отображений $\Upsilon_{0,0}$ и $\tilde{\Upsilon}_{0,0}$ (см. (3.2)).

Случай 2: $\mu - \lambda = k$ и $2\lambda = -k \neq 0$. В этом случае отображение $\Upsilon_{|\mathfrak{osp}(1|2)}$ задается формулой

$$\begin{aligned} \Upsilon_{|\mathfrak{osp}(1|2)}(X_{G_1})(F\alpha_2^{-k/2}) \\ = ((-1)^{|F_1|}(\varepsilon_1 G'_1 \bar{\eta}_1(F_1^{(k)}) + \varepsilon_2(k G''_1 \bar{\eta}_1^{2k-1}(F_1) + \eta_1(G'_1) \bar{\eta}_1^{2k}(F_1)))\theta_2 \\ + (-1)^{|F_2|}(\varepsilon_3((k-1)G''_1 \bar{\eta}_1^{2k-3}(F_2) + \eta_1(G'_1) \bar{\eta}_1^{2k-2}(F_2)) + \varepsilon_4 G'_1 \bar{\eta}_1(F_2^{(k-1)})))\alpha_2^{k/2}. \end{aligned}$$

Из тех же соображений, что и выше, получаем $\varepsilon_4 = -\varepsilon_1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$ и

$$\Upsilon_{|\Pi(\mathfrak{h})}(X_{\overline{G_2}})(F\alpha_2^{-k/2}) = (\varepsilon_1 G'_2 \bar{\eta}_1(F_2^{(k-1)})\theta_2 - \varepsilon_2 G'_2 \bar{\eta}_1^{2k-1}(F))\alpha_2^{k/2}.$$

Значит, Υ является линейной комбинацией отображений

$$\Upsilon_{-k/2,k/2} \quad \text{и} \quad \overline{\Upsilon}_{-k/2,k/2}$$

(см. (3.2)).

В случаях $\lambda = \mu \pm 1/2$ и $(\lambda, \mu) = ((1-k)/2, k/2)$, $(-k/2, (k-1)/2)$ те же рассуждения доказывают тривиальность Υ , что и завершает доказательство теоремы.

Нам приятно выразить благодарность Валентину Овсиенко, Клоду Роже и Кристиану Дювалю за их интерес к нашей работе. Мы особенно признательны Мабруку Бену Аммару за его постоянное внимание к работе и ряд предложений, которые значительно улучшили статью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. Basdouri, M. Ben Ammar, “Cohomology of $\mathfrak{osp}(1|2)$ acting on linear differential operators on the supercircle $S^{1|1}$ ”, *Lett. Math. Phys.*, **81**:3 (2007), 239–251.
- [2] P. B. A. Lecomte, “On the cohomology of $\mathfrak{sl}(m+1; \mathbb{R})$ acting on differential operators and $\mathfrak{sl}(m+1; \mathbb{R})$ -equivariant symbols”, *Indag. Math. (N.S.)*, **11**:1 (2000), 95–114.
- [3] B. Agrebaoui, F. Ammar, P. Lecomte, V. Ovsienko, “Multi-parameter deformations of the module of symbols of differential operators”, *Int. Math. Res. Not.*, **16** (2002), 847–869.
- [4] B. Agrebaoui, M. Ben Ammar, N. Ben Fraj, V. Ovsienko, “Deformations of modules of differential forms”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **10**:2 (2003), 148–156.

- [5] M. Ben Ammar, M. Boujelbene, “ $\mathfrak{sl}(2)$ -Trivial Deformations of $\text{Vect}_{\text{Pol}}(\mathbb{R})$ -Modules of Symbols”, *SIGMA*, **4** (2008), 065, 19 pp.
- [6] A. Nijenhuis, R. W. Richardson, Jr., “Deformations of homomorphisms of Lie groups and Lie algebras”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 175–179.
- [7] H. Gargoubi, N. Mellouli, V. Ovsienko, “Differential operators on supercircle: Conformally equivariant quantization and symbol calculus”, *Lett. Math. Phys.*, **79**:1 (2007), 51–65.
- [8] Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, “Когомологии групп и алгебр Ли”, *Группы Ли и алгебры Ли – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **21**, ВИНТИ, М., 1988, 121–209.
- [9] P. Grozman, D. Leites, I. Shchepochkina, “Lie superalgebras of string theories”, *Acta Math. Vietnam.*, **26**:1 (2001), 27–63, arXiv: hep-th/9702120.
- [10] C. H. Conley, “Conformal symbols and the action of contact vector fields over the superline”, *J. Reine Angew. Math.*, **633** (2009), 115–163, arXiv: math.RT/0712.1780v2.
- [11] N. Ben Fraj, “Cohomology of $\mathcal{K}(2)$ acting on linear differential operators on the superspace $\mathbb{R}^{1|2}$ ”, *Lett. Math. Phys.*, **86**:2-3 (2008), 159–175.
- [12] I. Basdouri, M. Ben Ammar, N. Ben Fraj, M. Boujelben, K. Kammoun, “Cohomology of the Lie superalgebra of contact vector fields on $\mathbb{K}^{1|1}$ and deformations of the superspace of symbols”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **16**:4 (2009), 373–409.

Н. Бен Фрай

Institut Supérieur des Sciences Appliquées
et de Technologie de Sousse, Тунис
E-mail: benfracj_nizar@yahoo.fr

Поступило

23.03.2012

М. Бужельбен

Institut Supérieur des Sciences Appliquées
et de Technologie de Sousse, Тунис
E-mail: Maha.Boujelben@fss.rnu.tn