Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Существование решений с точками поворота у нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 520–524

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm867>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:16:47

УДК 517.927.4

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ С ТОЧКАМИ ПОВОРОТА У НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

На отрезке $0 \leq x \leq 1$ рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача

$$\begin{aligned} \varepsilon u'' &= f(x, u, u'), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ g_j(u|_{x=0}, u|_{x=1}, u'|_{x=0}, u'|_{x=1}) &= 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Изучается проблема существования и единственности ее решения $u(x, \varepsilon)$ со следующими свойствами: $u(x, \varepsilon) \rightarrow u_0(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $x \in [0, 1]$, где $u_0(x) \in C^\infty[0, 1]$ – решение вырожденного уравнения $f(x, u, u') = 0$; существует такая точка $x_0 \in (0, 1)$, что $a(x_0) = 0$, $a'(x_0) > 0$, $a(x) < 0$ при $0 \leq x < x_0$, $a(x) > 0$ при $x_0 < x \leq 1$, где $a(x) = f'_v(x, u_0(x), u'_0(x))$.

Библиография: 3 названия.

На отрезке $0 \leq x \leq 1$ рассмотрим сингулярно возмущенную краевую задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon u' &= f(x, u, u'), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad ' = \frac{d}{dx}, \\ g_j(u|_{x=0}, u|_{x=1}, u'|_{x=0}, u'|_{x=1}) &= 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

где функции $f(x, u, v)$, $g_j(u_1, u_2, v_1, v_2)$, $j = 1, 2$, бесконечно дифференцируемы по совокупности переменных $(x, u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^4$. Будем интересоваться существованием решения $u(x, \varepsilon)$, для которого равномерно по $x \in [0, 1]$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = u_0(x); \quad (2)$$

здесь $u_0(x) \in C^\infty[0, 1]$ – решение вырожденного уравнения

$$f(x, u, u') = 0, \quad (3)$$

имеющее точку поворота. Последнее означает наличие такой точки $x_0 \in [0, 1]$, что

$$\begin{aligned} a(x_0) &= 0, \quad a'(x_0) > 0, \\ a(x) &< 0 \quad \text{при } 0 \leq x < x_0, \quad a(x) > 0 \quad \text{при } x_0 < x \leq 1, \end{aligned} \quad (4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и фонда INTAS.

где $a(x) = f'_v(x, u_0(x), u'_0(x))$.

Отметим, что существование нужного решения $u_0(x)$ у уравнения (3) не очевидно и требует дополнительных условий на функцию f . Кроме того, необходимо исследовать и проблему существования решения $u(x, \varepsilon)$ исходной задачи (1) с асимптотическим поведением (2). Однако, как показано ниже, обе эти проблемы сводятся к вопросу о существовании траекторий-уток у некоторой вспомогательной системы дифференциальных уравнений.

Сделаем следующие дополнительные предположения.

УСЛОВИЕ 1. При каждом $x \in [0, 1]$ система уравнений

$$f(x, u, v) = 0, \quad f'_v(x, u, v) = 0 \quad (5)$$

имеет единственное решение $(u, v) = (z(x), w(x)) \in C^\infty[0, 1]$, причем

$$f'_u(x, z(x), w(x)) \neq 0, \quad f''_{vv}(x, z(x), w(x)) \neq 0. \quad (6)$$

УСЛОВИЕ 2. Существует такое $x_0 \in (0, 1)$, что $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi'(x_0) \neq 0$, где $\varphi(x) = w(x) + f'_x(x, z(x), w(x)) / f'_u(x, z(x), w(x))$.

Введем в рассмотрение квадратичный полином $P(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$, $\alpha = f'_u(x_0, z(x_0), w(x_0))$, $\beta = f''_{uu}(x_0, z(x_0), w(x_0)) / f''_{vv}(x_0, z(x_0), w(x_0)) \varphi'(x_0)$.

УСЛОВИЕ 3. Полином $P(\lambda)$ имеет два вещественных корня $\lambda_1 < \lambda_2$, причем $\lambda_2 > 0$.

Покажем, что сформулированные условия позволяют определить требуемое решение $u_0(x)$ уравнения (3) локально (в некоторой достаточно малой окрестности фигурирующей в условии 2 точки x_0). С этой целью сначала, опираясь на первое неравенство (6) и теорему о неявной функции, из первого уравнения (5) находим функцию

$$u = \Psi(x, v): \Psi(x_0, w(x_0)) = z(x_0), \\ \Psi'_x(x_0, w(x_0)) = -\frac{f'_x(x_0, z(x_0), w(x_0))}{f'_u(x_0, z(x_0), w(x_0))}, \quad \Psi'_v(x, w(x)) \equiv 0. \quad (7)$$

Затем, дифференцируя равенство $u = \Psi(x, v)$ по x и полагая $u' = v$, перейдем от (3) к эквивалентному уравнению $v' = (v - \Psi'_x(x, v)) / \Psi'_v(x, v)$.

Следующий этап связан с переходом от этого уравнения к эквивалентной ему системе на плоскости $\dot{x} = \Psi'_v(x, v)$, $\dot{v} = v - \Psi'_x(x, v)$, $\dot{\cdot} = d/dt$, от которой, в свою очередь, посредством замены $v = w(x) + \xi$ перейдем к системе

$$\dot{x} = \Psi'_v(x, w(x) + \xi), \\ \dot{\xi} = w(x) + \xi - \Psi'_x(x, w(x) + \xi) - w'(x)\Psi'_v(x, w(x) + \xi). \quad (8)$$

Из указанных выше условий и из свойств функции Ψ (см. (7)) заключаем, что система (8) имеет состояние равновесия $x = x_0$, $\xi = 0$ с характеристическими показателями (корнями полинома) $\mu_j = -\lambda_j / (f'_u(x_0, z(x_0), w(x_0)))$, $j = 1, 2$. А так как (условия 2 и 3) $\lambda_1 \lambda_2 = \beta \neq 0$, то это положение равновесия является либо седлом (при $\lambda_1 < 0$),

либо узлом (при $\lambda_1 > 0$). Но в любом случае интегральное многообразие системы (8), отвечающее наибольшему по модулю показателю μ_2 , задается равенством

$$\xi = \xi_0(x): \xi_0(x_0) = 0, \quad \xi'_0(x_0) = \frac{\lambda_2}{f''_{vv}(x_0, z(x_0), w(x_0))}, \quad (9)$$

где функция $\xi_0(x) \in C^\infty$ определена в некоторой достаточно малой окрестности точки $x = x_0$ (см., например, [1]).

Итак, при условиях 1–3 уравнение (3) в некоторой малой окрестности точки $x = x_0$ имеет решение

$$u_0(x) = z(x_0) + \int_{x_0}^x [w(s) + \xi_0(s)] ds \quad (10)$$

со свойствами (4), причем для функции $a(x)$ справедливы равенства $a(x_0) = 0$, $a'(x_0) = \lambda_2 > 0$. Однако, вообще говоря, такое решение не обязано существовать на всем отрезке $0 \leq x \leq 1$ (ибо соответствующее интегральное многообразие системы (8) равенством (9) при всех $0 \leq x \leq 1$ задается не всегда). Поэтому возникает необходимость в еще одном предположении.

УСЛОВИЕ 4. *Решение (10) уравнения (3) продолжается на весь отрезок $0 \leq x \leq 1$ с сохранением свойств (4).*

Условия 1–4 обеспечивают существование требуемого решения $u_0(x)$ вырожденного уравнения (3). Следующая группа предложений нужна для того, чтобы гарантировать существование решения $u(x, \varepsilon)$ исходной краевой задачи (1) с данным нулевым приближением $u_0(x)$. Положим

$$\begin{aligned} G_j(v_1, v_2) &= g_j(u_0(0), u_0(1), v_1, v_2), \quad j = 1, 2; \\ F_1(v) &= f(0, u_0(0), v), \quad F_2(v) = f(1, u_0(1), v). \end{aligned} \quad (11)$$

УСЛОВИЕ 5. *Система*

$$G_j(v_1, v_2) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (12)$$

имеет единственное решение $(v_1, v_2) = (v_1^0, v_2^0)$, причем отличен от нуля соответствующий якобиан.

УСЛОВИЕ 6. *Решение $v_j(t)$, $j = 1, 2$, задач Коши*

$$\dot{v} = F_j(v), \quad v|_{t=0} = v_j^0, \quad j = 1, 2, \quad (13)$$

определены соответственно на полуосях $t \geq 0$, $t \leq 0$, и выполнены равенства

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_1(t) = u'_0(0), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} v_2(t) = u'_0(1).$$

Содержательность условий 1–6 проиллюстрируем на простом примере: $f = v^2 + u - 5(x - 1/2)^2$, $g_1 = v_1$, $g_2 = v_2$. Действительно, условия 1–5 здесь очевидным образом выполняются, причем $u_0(x) = (x - 1/2)^2$. Кроме того, в данном случае $v_1(t) = v_2(t) = v(t)$, где $v(t)$ – решение задачи Коши $\dot{v} = v^2 - 1$, $v|_{t=0} = 0$, а значит, выполняется и условие 6.

ТЕОРЕМА. При сформулированных условиях и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение $u(x, \varepsilon)$ краевой задачи (1), удовлетворяющее предельному неравенству (2), существует и единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что в теореме речь идет о единственности решения с фиксированным нулевым приближением $u_0(x)$, в то время как количество самих таких функций $u_0(x)$ определяется в первую очередь количеством нулей функции $\varphi(x)$ (см. условие 2), а значит, может быть любым.

Введем в рассмотрение релаксационную систему

$$\dot{u} = v, \quad \varepsilon \dot{v} = f(x, u, v), \quad \dot{x} = 1 \quad (14)$$

и отвечающую ей вырожденную систему

$$\dot{u} = v, \quad f(x, u, v) = 0, \quad \dot{x} = 1. \quad (15)$$

Фиксировав произвольно малое $\delta_1 > 0$, заметим, что поскольку на кривой $\Gamma_0 = \{(u_0(x), u'_0(x), x) : 0 \leq x \leq x_0 - \delta_1\}$ выполняется неравенство $f'_v < 0$, то в ее окрестности можно разрешить относительно v второе уравнение (15): $v = \Phi(x, u)$. Таким образом, система (15) в этом случае эквивалентна скалярному уравнению, которое мы дополним начальным условием:

$$u' = \Phi(x, u), \quad u|_{x=0} = u_* \in [u_0(0) - \delta_2, u_0(0) + \delta_2], \quad \delta_2 > 0. \quad (16)$$

Заметим, что при подходящем уменьшении δ_2 каждое решение задачи (16) существует на отрезке $0 \leq x \leq x_0 - \delta_1$. Действительно, при $\delta_2 = 0$ решением задачи (16) является функция $u_0(x)$, определенная (согласно условию 4) при всех $0 \leq x \leq 1$. А отсюда требуемый факт вытекает очевидным образом.

Введем две интегральные поверхности $S_0(u_*, \varepsilon)$ и $S_1(u_{**}, \varepsilon)$, которые порождаются траекториями системы (14) с начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_* \in [u_0(0) - \delta_2, u_0(0) + \delta_2], \quad v|_{t=0} = v_*, \quad x|_{t=0} = 0, \quad (17)$$

$$u|_{t=0} = u_{**} \in [u_0(1) - \delta_2, u_0(1) + \delta_2], \quad v|_{t=0} = v_{**}, \quad x|_{t=0} = 1, \quad (18)$$

рассматриваемыми при $t \geq 0$ и $t \leq 0$ соответственно. Здесь (v_*, v_{**}) – решение системы (12), в которой функции G_j , $j = 1, 2$, определены равенствами (11) при замене $u_0(0)$ на u_* и $u_0(1)$ на u_{**} (в силу условия 5 и малости δ_2 такое решение существует и единственно).

Опишем, например, асимптотическое поведение при увеличении t траекторий системы (14) с начальными условиями (17). Согласно результатам монографии [2] сначала происходит быстрое движение в асимптотически малой окрестности прямой $x = 0$, $u = u_*$, описываемой задачей Коши ($\tau = \varepsilon t$)

$$\frac{dv}{d\tau} = f(0, u_*, v), \quad v|_{\tau=0} = v_*.$$

Подчеркнем, что в силу условия 6, а также близости u_* к $u_0(1)$ и v_* к v_1^0 решение $v(\tau)$ этой задачи близко к решению первой из задач Коши (13), а значит, оно определено при

всех $\tau \geq 0$ и $v(\tau) \rightarrow \Phi(0, u_*)$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Таким образом, происходит “падение” каждой из траекторий семейства S_0 на устойчивое многообразие медленного движения $v = \Phi(x, u)$. Затем движение продолжается в асимптотически малой его окрестности по закону (16) вплоть до плоскости $x = x_0 - \delta_1$.

Итак, поверхность S_0 пересекает общим образом плоскость $x = x_0 - \delta_1$. Положим $\Sigma_0 = S_0 \cap \{x = x_0 - \delta_1\}$, а через Σ_1 обозначим пересечение поверхности S_1 с плоскостью $x = x_0 + \delta_1$ (поведение траекторий системы (14) с начальными условиями (18) при $t \leq 0$ аналогично описанному выше). Наконец, воспользуемся результатами монографии [3], из которых вытекает существование единственной траектории-утки

$$L(\varepsilon) = \{(u(x, \varepsilon), v(x, \varepsilon), x), x_0 - \delta_1 \leq x \leq x_0 + \delta_1\},$$

соединяющей Σ_0 и Σ_1 . Ее компонента $u(x, \varepsilon)$ после продолжения на весь отрезок $0 \leq x \leq 1$, очевидно, и будет искомым решением $u(x, \varepsilon)$ краевой задачи (1).

Остается добавить, что (как показано в [3]) равномерно по $0 \leq x \leq 1$ справедливо асимптотическое равенство $u(x, \varepsilon) = u_0(x) + O(\varepsilon)$. Теорема доказана.

В заключение подчеркнем, что условия 1–6 предполагают нетривиальную зависимость функции f от всех ее аргументов, а по переменной v она должна быть существенно нелинейной. Поэтому из нашего рассмотрения заведомо выпадает важный частный случай $f \equiv A(x, u)v + B(x, u)$. Однако для этого случая также возможно построение аналогичной теории.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [2] Васильева А. В., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
- [3] Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Наука, 1995.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
07.12.1999