Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Бибило, Изомонодромное слияние особых точек,
Матем. заметки, 2010, том 87, выпуск 3, 330–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8672>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:10:21

Изомонодромное слияние особых точек

Ю. П. Бибило

Рассматривается вопрос о слиянии особых точек при изомонодромных деформациях линейных систем. Доказано, что система с иррегулярными особыми точками является результатом изомонодромного слияния особых точек с минимальными рангами Пуанкаре, т.е. особых точек, ранг Пуанкаре которых не уменьшается при калибровочных преобразованиях.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Вопрос об изомонодромных деформациях линейных дифференциальных уравнений впервые был поставлен Риманом в 1857 г. Позже Шлезингер и Лаппо–Данилевский сформулировали этот вопрос для линейных мероморфных систем

$$\frac{dy}{dz} = A(z)y$$

на сфере Римана $\mathbb{CP}^1$. Наиболее изученными являются деформации фуксовых систем; в разное время существенные результаты были получены Шлезингером, Мальгранжем, Итсом и Новокшеновым, Сибуйей, Болибрухом и другими.

Одна из задач, связанных с изомонодромными деформациями есть задача о изомонодромном слиянии особых точек. Арнольдом был сформулирован вопрос о том, как описать множество систем с регулярными особыми точками в терминах пределов изомонодромных деформаций фуксовых систем (задачи 1984-7, 1987-12 в [1]). Болибрух, рассматривая так называемые нормализованные изомонодромные слияния особых точек фуксовых систем, получил два замечательных результата.

ТЕОРЕМА 1 [2]. *Результатом нормализованного изомонодромного слияния особых точек семейства фуксовых систем является система с регулярными особыми точками.*

ТЕОРЕМА 2 [3]. *Любая система линейных дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками на сфере Римана является результатом нормализованного изомонодромного слияния особых точек семейства фуксовых систем.*

Джимбо и Мива [4] рассмотрели изомонодромные деформации линейных систем с иррегулярными особыми точками в случае общего положения (а именно в предположении, что все особые точки нерезонансные).

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-3178.2009.1).

В данной работе обобщается результат теоремы 2 на случай систем с иррегулярными особыми точками.

2. Фуксовы и иррегулярные особые точки. Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dz} = A(z)y, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p, \quad (2.1)$$

из p линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на сфере Римана $\mathbb{CP}^1$, где $A(z)$ – мероморфная матричная функция с полюсами в точках $a_1, \dots, a_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Особая точка a_i называется *регулярной* особой точкой системы (2.1), если для любого сектора S конечного раствора с вершиной в точке a_i фундаментальная матрица $Y(z)$ системы при $z \rightarrow a_i$, $z \in S$, имеет не более чем степенной рост в a_i . В противном случае, a_i называется *иррегулярной* особой точкой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если матричная функция $A(z)$ в точке a_i имеет полюс первого порядка, то a_i называется *фуксовой* особой точкой системы (2.1).

Фуксовы особые точки являются регулярными [5]. Систему, у которой все особые точки фуксовы, называют фуксовой.

Для каждой регулярной особой точки a_i имеется фундаментальное решение, называемое *левелевским*, которое в окрестности этой точки представляется в виде

$$Y^i(z) = U(z)(z - a_i)^{\Lambda^i} (z - a_i)^{E^i}, \quad (2.2)$$

где $E^i = (1/(2\pi\sqrt{-1})) \ln G^i$ – логарифм матрицы монодромии G^i , нормированный условием, что действительные части собственных значений E^i лежат в полуинтервале $[0, 1)$, Λ^i – диагональная целочисленная матрица нормирований, элементы которой упорядочены по убыванию. Матрица $U(z)$ голоморфна в окрестности точки a_i , и в случае, если a_i фуксова, выполнено $\det U(a_i) \neq 0$ [5].

Особая точка a_i называется *ложной*, если соответствующая матрица монодромии единичная. Вид левелевского фундаментального решения в окрестности ложной особенности упрощается:

$$Y^i(z) = U(z)(z - a_i)^{\Lambda^i}.$$

Допустим, имеется семейство систем вида (2.1), голоморфно зависящее от параметра $t \in V \subset \mathbb{C}^m$:

$$\frac{dy}{dz} = A(z, t)y. \quad (2.3)$$

Семейство (2.3) называется *деформацией* системы (2.1), если при некотором $t^0 \in V$ выполнено равенство $A(z, t^0) = A(z)$. Деформацию называют *изомонодромной*, если для всех $t \in V$ данные монодромии (точное определение которых приведено ниже) одинаковы.

Для фуксовых систем часто в качестве параметра t берется набор $a = (a_1, \dots, a_n)$ особых точек. Изомонодромность семейства (2.3) понимается в этом случае как сохранение представления монодромии (отвечающего какой-нибудь фундаментальной матрице $Y(z, a)$, аналитичной по (z, a))

$$\chi: \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{a_1, \dots, a_n\}) \rightarrow \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$$

при малом изменении положения особых точек.

3. Обобщенные данные монодромии. В случае систем с иррегулярными особыми точками ситуация более сложная, и для того, чтобы определить обобщенные данные монодромии, необходимо рассмотреть формальную фундаментальную матрицу системы (т.е. матрицу, элементами которой являются формальные ряды, и которая при подстановке удовлетворяет системе, см. [6]) в окрестности иррегулярной особой точки, и определить данные Стокса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Рангом Пуанкаре системы (2.1) в точке a_i называется целое неотрицательное число r_i , если ряд Лорана матрицы коэффициентов $A(z)$ в окрестности a_i имеет вид

$$A(z) = \frac{A_{-r_i-1}}{(z-a_i)^{r_i+1}} + \dots + \frac{A_{-1}}{z-a_i} + A_0 + \dots, \quad A_{-r_i-1} \neq 0. \quad (3.1)$$

Минимальным рангом Пуанкаре системы (2.1) в точке a_i называется наименьший из всех рангов Пуанкаре систем, получаемых из данной заменой неизвестной функции

$$\tilde{y}(z) = M(z)y(z), \quad (3.2)$$

где $M(z)$ – мероморфная в точке a_i матрица, $\det M(z) \neq 0$.

Замены (3.2) определяют так называемые калибровочные преобразования системы (2.1).

Из определения ранга Пуанкаре следует, что ранг Пуанкаре фуксовой особой точки равен нулю. Минимальный ранг Пуанкаре регулярной особой точки равен нулю [5]. Если ранг Пуанкаре регулярной особой точки минимален, значит она фуксова. Если a_i – иррегулярная особая точка системы (2.1), то ее минимальный ранг Пуанкаре строго положителен.

Рассмотрим систему (2.1) в окрестности иррегулярной особой точки a_i , минимальный ранг Пуанкаре которой равен r_i . У системы существует формальная фундаментальная матрица решений вида

$$\hat{Y}^i(z) = \hat{F}(z)(z-a_i)^{\hat{E}^i} \exp(Q^i(z)), \quad (3.3)$$

где $\hat{F}(z)$ – формальный ряд Лорана с конечной главной частью, $\exp(2\pi\sqrt{-1}\hat{E}^i)$ – формальная матрица монодромии и $Q^i(z)$ – диагональная матрица, элементами которой являются полиномы от $(z-a_i)^{-1}$ (либо от $(z-a_i)^{-1/s}$, s – натуральное число) степени не выше r_i (или, соответственно, не выше $r_i s$) с нулевыми свободными членами. При этом можно обеспечить, чтобы $\hat{E}^i$ удовлетворяла некоторым дополнительным условиям, подробно описанным в [7], тогда формальное матричное решение (3.3) определено однозначно с точностью до перестановки блоков в жордановой форме матрицы $\hat{E}^i$ и соответствующей перестановки диагональных элементов $Q^i(z)$.

Выделяют резонансный и нерезонансный случай [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если все собственные значения матрицы A_{-r_i-1} попарно различны, то a_i называется *нерезонансной* иррегулярной особой точкой.

В нерезонансном случае все полиномы из $Q^i(z)$ попарно различны и не содержат дробные степени $(z-a_i)$, кроме того, тогда $\hat{F}(z)$ является формальным рядом Тейлора и $\det \hat{F}(a_i) \neq 0$ [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если среди собственных значений матрицы A_{-r_i-1} найдутся одинаковые, то a_i называется *резонансной* иррегулярной особой точкой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Если $Q^i(z)$ не содержит дробных степеней $(z - a_i)$, то особая точка a_i называется *неразветвленной*, в противном случае – *разветвленной*.

В окрестности точки a_i имеются N_i таких пересекающихся секторов конечно-го раствора, полностью заполняющих эту окрестность, и каждому сектору можно сопоставить такое фундаментальное решение $Y_k^i(z)$ системы (2.1), что формальная фундаментальная матрица (3.3) является его асимптотическим разложением в соответствующем секторе [8]. Фундаментальные матрицы связаны соотношением $Y_k^i(z) = Y_{k+1}^i(z)S_k^i$, где S_k^i – постоянная матрица (матрица Стокса). Таким образом, каждой особой точке соответствует N_i матриц Стокса.

Положим, что одна из особых точек $a_n = \infty$. Так как фундаментальные решения отличаются только на постоянную матрицу, то $Y_1^i(z) = Y_1^n(z)C^i$ и C^i называется матрицей связи.

Таким образом, если a_i – иррегулярная особая точка, то в качестве обобщенных данных монодромии берется следующий набор данных:

- матрица формальной монодромии $\hat{G}^i = \exp(2\pi\sqrt{-1}\hat{E}^i)$,
- матрицы Стокса $S_1^i, \dots, S_{N_i}^i$,
- матрица связи C^i ,

а если a_i – регулярная особая точка, то данные монодромии состоят только из

- матрицы монодромии G_i .

Заметим, что в случае иррегулярной особой точки матрица G_i не включается в набор обобщенных данных монодромии, так как выражается через матрицу формальной монодромии, матрицы связи и матрицы Стокса.

При фиксированном выборе блоков в жордановой форме матрицы $\hat{E}^i$ обобщенные данные монодромии определены однозначно.

4. Слияние особых точек при изомонодромных деформациях. Теперь мы можем определить понятия изомонодромной деформации и изомонодромного слияния особенностей для систем с иррегулярными особыми точками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Деформация (2.3) системы с иррегулярными особыми точками называется *изомонодромной*, если для всех значений параметра t обобщенные данные монодромии одинаковы.

В случае, когда иррегулярные особые точки системы нерезонансны, изомонодромная деформация описана в [4], [8]. В этом случае формальные фундаментальные матрицы решений неразветвлены и разложение $Q^i(z)$ по степеням $(z - a_i)^{-1}$ имеет вид

$$Q^i(z) = \sum_{k=1}^{r_i} \frac{\Psi_{-k}^i}{(z - a_i)^k}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

где $\Psi_{-r_i}^i, \dots, \Psi_{-1}^i$ – диагональные постоянные матрицы. Обозначим полный набор их элементов через $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_h)$. Тогда набор параметров деформации (выше он обозначался t) состоит из $a = (a_1, \dots, a_n)$ и ρ .

Следует заметить, что в полный набор параметров деформации входят и собственные значения матриц $A_{-r_1-1}, \dots, A_{-r_n-1}$, так как они являются коэффициентами при старших степенях полиномов из $Q^1(z), \dots, Q^n(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Будем говорить, что система

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y \quad (4.2)$$

с особыми точками $b_1, \dots, b_m$ является результатом *изомонодромного слияния* особых точек семейства (2.3), если матрица $A(z, a, \rho)$ стремится к $B(z)$, когда точки некоторого набора особых точек $a_{i_1}, \dots, a_{i_{m_i}}$ стремятся к точке b_i , каждая внутри своего сектора с вершиной в b_i , $i = 1, \dots, m$.

Сформулируем формальный аналог ключевого утверждения из [3] в виде леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $\hat{F}(z) = F_0 + F_1 z + \dots$ – формальный ряд Тейлора и $\det \hat{F}(0) = 0$. Тогда $\hat{F}(z)$ представим в виде произведения

$$\hat{F}(z) = P(z)\hat{U}(z), \quad P(z) = P_0 z^{L_1} P_1 z^{-L_1} \dots z^{L_s} P_s z^{-L_s} z^K, \quad (4.3)$$

где $\hat{U}(z)$ – формальный ряд Тейлора, $\det \hat{U}(0) \neq 0$; все L_j и матрица K – диагональные целочисленные матрицы, элементы которых неотрицательны; $P_0, P_1, \dots, P_s$ – постоянные матрицы, и все матричные функции $z^{L_i} P_i z^{-L_i}$ голоморфны в бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k – ранг матрицы F_0 . Будем считать, что первые k строк F_0 линейно независимы, а остальные нулевые (это можно добиться, умножив слева $\hat{F}(z)$ на подходящую постоянную матрицу V). Значит, $V\hat{F}(z) = z^{L_1}\hat{F}'(z)$, где L_1 – диагональная целочисленная матрица и, будем полагать, что ее элементы упорядочены по убыванию (это можно добиться сопряжением z^{L_1} на подходящую матрицу перестановок). Обозначим $P_0 = V^{-1}$.

Далее $\hat{F}'(z) = F'_0 + F'_1 z + \dots$ и пусть первые v строк матрицы F'_0 линейно независимы, а $(v+1)$ -я строка является их линейной комбинацией. Тогда найдется постоянная нижнетреугольная матрица T такая, что $(v+1)$ -я строка у TF'_0 нулевая. Тогда $T\hat{F}'(z) = z^{K_2}\hat{F}''(z)$ и $\hat{F}''(z)$ – снова формальный ряд. Обозначим $P_1 = T^{-1}$; тогда $z^{L_1} P_1 z^{-L_1}$ голоморфна в бесконечности и $\hat{F}(z) = P_0 z^{L_1} P_1 z^{-L_1} z^{L_2} \hat{F}''(z)$, где $L_2 = L_1 + K_2$.

Продолжая таким образом далее, за конечное число шагов получим требуемое разложение (4.3).

ТЕОРЕМА 3. Любая система (4.2) является результатом *изомонодромного слияния* особых точек семейства (2.3), ранги Пуанкаре всех особенностей которого минимальны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если все особые точки b_i регулярны, то утверждение сводится к теореме 2. Пусть у системы (4.2) существует иррегулярная особая точка. Без ограничения общности будем считать, что это точка $b_1 = 0$. Кроме того, положим $b_m = \infty$. Матрица коэффициентов системы в окрестности нуля представляется в виде

$$B(z) = \frac{B_{-r_1-1}}{z^{r_1+1}} + \dots + \frac{B_{-1}}{z} + \dots$$

и будем полагать, что ранг Пуанкаре r_1 системы в нуле не минимален. В противном случае нечего доказывать. Достаточно рассмотреть случай единственной особой точки не минимального ранга Пуанкаре.

Формальная фундаментальная матрица решений в окрестности нуля имеет вид

$$\widehat{Y}(z) = \widehat{M}(z) z^{\widehat{E}^1} \exp[Q^1(z)], \quad (4.4)$$

где $\widehat{M}(z)$ – формальный ряд Лорана с конечной главной частью. Найдется такое целое неотрицательное число k , что $\widehat{F}(z) = \widehat{M}(z) z^{kI}$ – формальный ряд Тейлора (I – единичная матрица).

Рассмотрим сперва случай когда $\det \widehat{F}(0) = 0$.

Пусть $Y(z)$ – фундаментальное решение системы (4.2).

Представив $\widehat{F}(z)$ в виде произведения матриц согласно лемме 1, получаем

$$\widehat{F}(z) z^{-kI} = P(z) \widehat{U}(z), \quad P(z) = P_0 z^{L_1} P_1 z^{-L_1} \dots z^{L_s} P_s z^{-L_s} z^{(K-kI)}.$$

Рассмотрим $H(z, a, c) = P_0 H_1(z, a, c) \dots H_s(z, a, c) G(z, a)$, где

$$H_i(z, a, c) = \prod_{j=1}^{\text{tr } L_i} (z - a_j^i)^{N_j^i} P_i \prod_{j=1}^{\text{tr } L_i} (z - c_j^i)^{-N_j^i}, \quad i = 1, \dots, s,$$

$$G(z, a) = \prod_{j=1}^{\text{tr } K} (z - a_j^{s+1})^{N_j^{s+1}} \prod_{j=1}^{kp} (z - a_j^{s+2})^{-N_j^{s+2}},$$

а N_j^i – такие матрицы, все элементы которых равны нулю, кроме одного диагонального элемента, равного единице, и $L_i = \sum_j N_j^i$, $K = \sum_j N_j^{s+1}$, $kI = \sum_j N_j^{s+2}$ и все точки $\{a_j^i, c_j^i, b_l\}$ различны. Мы добавили к точкам $\{b_l\}$ новые точки $\{a_j^i, c_j^i\}$, которые будут ложными особенностями у конструируемой нами системы.

Если $\det \widehat{F}(z) \neq 0$, то положим проще $H(z, a) = \prod_{j=1}^{kp} (z - a_j^{s+2})^{-N_j^{s+2}}$, где N_j^{s+2} вводятся аналогично предыдущему. В этом случае у нас не будет точек $\{c_j^i\}$ и матриц L_j , а $P(z)$ будет единичной матрицей.

По построению матрица $H(z, a, c) P^{-1}(z)$ (в случае когда $\det \widehat{F}(z) \neq 0$ здесь и далее под $H(z, a, c)$ надо понимать $H(z, a)$) голоморфна в бесконечности; следовательно, калибровочное преобразование $\tilde{y} = H(z, a, c) P^{-1}(z) y$ не меняет характер точки ∞ системы (4.2). Фундаментальное решение $Y(z, a, c) = H(z, a, c) P^{-1}(z) Y(z)$ преобразованной системы задает изомонодромное семейство

$$\frac{dy}{dz} = A(z, a, c) y, \quad A(z, a, c) = Y'(z, a, c) Y^{-1}(z, a, c), \quad (4.5)$$

у которого особые точки $\{a_j^i, c_j^i\}$ – ложные фуксовы, особая точка нуль – иррегулярная с минимальным рангом Пуанкаре.

Система (4.2) является результатом изомонодромного слияния особых точек семейства (4.5). Действительно, для произвольной точки $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$ выберем окрестность $\mathcal{D}$ такую, что $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$ и $\mathcal{D} \cap \mathcal{U} = \emptyset$, где $\mathcal{U}$ – малая фиксированная окрестность нуля. На каждом компакте $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ матричная функция $Y(z, a, c)$ стремится к $Y(z)$ равномерно по z , когда точки $\{a_j^i, c_j^i\}$ стремятся к нулю, каждая в своем секторе. Следовательно, по теореме Вейерштрасса $Y'(z, a, c)$ также стремится к $Y'(z)$ при любом $z \in \mathcal{D}$.

Таким образом, $A(z, a, c)$ стремится к $B(z)$, когда $\{a_j^i, c_j^i\}$ стремятся к нулю, и система (4.2) является результатом изомонодромного слияния особых точек построенного семейства систем. Особые точки $\{a_j^i, c_j^i\}$ фуксовы, а в нуле у фундаментальной матрицы $Y(z, a, c)$ системы (4.2) особенность получается только за счет матрицы $Q^1(z)$ из (4.4), ненулевые элементы которой стоят на диагонали и являются полиномами от z^{-1} (или от дробных степеней z^{-1}).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, ФАЗИС, М., 2000.
- [2] А. А. Болибрух, “Об изомонодромных слияниях фуксовых особенностей”, *Локальные и глобальные задачи теории особенностей*, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Тр. МИАН, **221**, Наука, М., 1998, 127–142.
- [3] А. А. Болибрух, “Регулярные особые точки как изомонодромные слияния фуксовых”, *УМН*, **56**:4 (2001), 135–136.
- [4] M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno, “Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I. General theory and τ -function”, *Phys. D*, **2**:2 (1981), 306–352.
- [5] А. А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, Современные лекционные курсы, МЦНМО, М., 2009.
- [6] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1968.
- [7] W. Balser, W. B. Jucart, D. A. Lutz, “A general theory of invariants for meromorphic differential equations. I. Formal invariants”, *Funkcial. Ekvac.*, **22**:2 (1979), 197–221.
- [8] А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*, М.–Ижевск, ИКИ, 2005.

Ю. П. Бибило

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: yulia_bibilo@mail.ru

Поступило

30.09.2009