Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Грачев, Тензорный подход к проблеме усреднения дифференциальных уравнений с δ -коррелированными случайными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 359–368

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8673>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:49:23

Тензорный подход к проблеме усреднения дифференциальных уравнений с δ -коррелированными случайными коэффициентами

Д. А. Грачев

В работе рассматриваются обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с δ -коррелированными случайными коэффициентами. Вводится понятие линеаризирующего тензора, на основании которого построен алгоритм, позволяющий выводить дифференциальные уравнения для высших статистических моментов решения произвольных натуральных порядков.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. Многие результаты теории дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами можно рассматривать в контексте противопоставления свойств решений и моментных функций решений этих уравнений. Например, статистические моменты решения могут прогрессивно расти со скоростью роста, возрастающей с номером момента, в то время как выборочно (с вероятностью 1) само решение в некоторой точке может даже убывать (в физике случайных сред такое явление называется перемежаемостью [1], [2]).

Поскольку полная характеристика решения уравнения со случайными коэффициентами предполагает рассмотрение поведения моментных функций этого решения, естественным образом возникает необходимость разработки методов, позволяющих для того или иного класса уравнений строить соответствующие усреднения. На этом пути применяется несколько подходов. Иногда решение задачи удается выписать в явном виде через коэффициенты уравнения, после чего непосредственным усреднением и находятся моментные функции решения [3], [4]. Другой подход состоит в том, что для моментных функций строятся цепочки дифференциальных уравнений, которые оказываются, как правило, бесконечными, связанными и незамкнутыми (впрочем, в некоторых случаях их все же удается разорвать или замкнуть, см. например [5]–[7]). Если рассматриваются уравнения с малыми случайными возмущениями, то достаточно эффективным способом исследования оказывается построение асимптотических приближений [8]. Еще один подход, при помощи которого удалось, в частности, получить формулы для моментных функций решений некоторых классов уравнений в частных производных, заключается в использовании аппарата так называемых вариационных (функциональных) производных [9]–[11].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-02-00127).

С точки зрения физики значительный интерес вызывают методы усреднения дифференциальных уравнений с коэффициентами в виде короткокоррелированных случайных процессов, когда корреляционная длина для коэффициентов уравнения считается малой и детали поведения решения на соответствующих масштабах игнорируются (точные формулировки этого так называемого δ -коррелированного приближения см. ниже). Подобные задачи нередко возникают в приложениях; например, в магнитной гидродинамике одна из проблем, возникающих в подходе среднего поля, – это поведение средних решений уравнения индукции, когда время обновления случайного поля скорости стремится к нулю [12], [13].

В настоящей работе сделана попытка прояснить ситуацию для самого простого класса обыкновенных дифференциальных уравнений с δ -коррелированными случайными коэффициентами – класса линейных уравнений. Кроме построения алгоритма, позволяющего выводить уравнения для высших статистических моментов решения, получен результат об общем виде дифференциального уравнения для моментных функций – оказывается, оно является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Другими словами, рассматриваемый класс линейных уравнений замкнут относительно усреднения решений.

2. Задача усреднения m -го порядка. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты $a_j(x) = a_j(x, \omega)$, $j = 0, \dots, n$, являются случайными процессами с некоторыми заданными статистическими характеристиками (см. ниже). Уравнение (1) дополняется некоторыми неслучайными начальными условиями, однако для дальнейшего не существенно, какой конкретно вид эти условия имеют.

Нас будут интересовать статистические моменты $\langle y^m \rangle$ решения (1). В связи с этим дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Сопоставление уравнению (1) дифференциального уравнения для $\langle y^m \rangle$, где $m \in \mathbb{N}$, а y – решение (1), назовем усреднением m -го порядка этого уравнения.*

Теперь дадим конструктивное описание коэффициентов $a_j(x)$. Пусть полупрямая $x \geq 0$ разбита на равные отрезки длины δ (корреляционная длина, которая используется в качестве единицы длины, сам же отрезок принято называть интервалом обновления). Далее, пусть все процессы $a_j(x)$ теряют память точно в точках $x_k = k\delta$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Это означает, что величины $a_{jk}(x)$ (индекс j соответствует номеру коэффициента в (1), а индекс k – номеру интервала обновления) на полусегментах $[0; \delta), \dots, [k\delta; (k+1)\delta)$ предполагаются статистически независимыми и имеющими одинаковые статистические характеристики (среднее значение, дисперсию, и т.д.). Различным процессам a_j соответствуют при этом, вообще говоря, различные статистические характеристики.

При выводе уравнений для $\langle y^m \rangle$ удобно использовать представление случайных коэффициентов $a_j(x)$ в виде

$$a_j(x) = \bar{a}_j + \alpha_j(x),$$

где $\bar{a}_j$ – их средние значения, а члены $\alpha_j(x)$ описывают случайные флуктуации. Кроме того, поскольку вывод моментных уравнений осуществляется в приближении мгновенной потери памяти у всех процессов $a_j(x)$, то приходится выполнять перенормировку случайных коэффициентов, т.е. считать, что величина $\langle a_j^2 \delta \rangle$ имеет конечный предел $\mathcal{A}_j$ при $\delta \rightarrow 0$. По сути это означает, что флуктуации $\alpha_j(x)$ остаются значительными при $\delta \rightarrow 0$, а саму величину $\mathcal{A}_j$ при этом можно понимать как некоторое эффективное значение случайного процесса $a_j(x)$. Отметим, что в некоторых задачах перенормировку делают так, чтобы конечный предел при $\delta \rightarrow 0$ существовал у величины $\langle a_j^2 \delta^2 \rangle$ (см., например, [14]).

Для простейшего представителя класса уравнений (1) – уравнения

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y, \quad (2)$$

которое в качестве модельного уже рассматривалось ранее в [1] и [15], задача усреднения m -го порядка решается достаточно легко. В самом деле, умножим обе части (2) на величину $my^{m-1} \neq 0$:

$$\frac{d(y^m)}{dx} = may^m,$$

откуда получаем

$$\frac{d}{dx}[\ln(y^m)] = ma.$$

Проинтегрируем последнее уравнение от точки обновления x до точки обновления $x + \delta$:

$$y^m(x + \delta) = y^m(x) \cdot \exp(ma\delta).$$

Разлагая экспоненту в ряд с точностью до первых не исчезающих членов, имеем

$$\frac{y^m(x + \delta) - y^m(x)}{\delta} = y^m(x) \left(ma + \frac{1}{2} m^2 a^2 \delta + \dots \right),$$

откуда после усреднения и предельного перехода при $\delta \rightarrow 0$ получаем следующее семейство моментных уравнений, зависящих от порядка m :

$$\frac{d}{dx} \langle y^m \rangle - \left(m \cdot \bar{a} + \frac{1}{2} m^2 \cdot \mathcal{A} \right) \langle y^m \rangle = 0. \quad (3)$$

Из (3) следует, в частности, что при $\bar{a} = 0$ нормированные моменты $\langle y^m \rangle^{1/m}$ решения уравнения (2) экспоненциально растут со скоростью

$$\gamma_m = \frac{1}{2} m \cdot \mathcal{A},$$

которая тем больше, чем больше номер самого момента. Любопытно, что при этом типичная реализация решения (2) при $\bar{a} = 0$ не демонстрирует никакого экспоненциального роста. В самом деле, в рамках нашей модели решение (2) формируется как произведение независимых случайных чисел, а именно, экспонент от a_n . Согласно центральной предельной теореме такая конструкция при $n \rightarrow \infty$ растет лишь как $\exp \xi \sqrt{n}$, где ξ – гауссовская случайная величина с нулевым средним и некоторой дисперсией. Отметим, что результаты численного моделирования уравнения (2)

подтверждают субэкспоненциальный рост типичной реализации решения и экспоненциальный рост его моментов (см. [15]).

Простота вывода моментного уравнения (3) объясняется тем, что дифференциальное уравнение для m -й степени решения (2) линейно. Однако уже при $n = 1$ в (1) такое уравнение существенно нелинейно. Например, для простейшего уравнения со второй производной

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a(x)y = 0 \quad (4)$$

дифференциальное уравнение для квадрата решения $Y \equiv y^2$ имеет вид

$$2Y \frac{d^2 Y}{dx^2} - \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 + 4a(x)Y^2 = 0. \quad (5)$$

В самом деле, запишем (4) в виде $y'' + a(x)y = 0$ и умножим левую и правую части на $y' \neq 0$. Поскольку $yy' = (y^2)'/2$ и $y'y'' = ((y')^2)'/2$, то $((y')^2)' + a(x)(y^2)' = 0$. Для получения (5) остается воспользоваться равенством $(y')^2 = ((y^2)')^2/4y^2$ и проделать затем несколько несложных преобразований.

Очевидно, что прямое усреднение уравнения (5) является весьма сложной задачей, не говоря уже об усреднении дифференциальных уравнений для m -х степеней решения (1) при $n > 1$. Таким образом, возникает необходимость разработки метода, позволяющего выводить моментные уравнения для $\langle y^m \rangle$ в обход непосредственного усреднения нелинейных уравнений со случайными коэффициентами для y^m .

3. Математическое ожидание решения уравнения (1). Полагая

$$z_1(x) = y(x), \quad z_2(x) = y'(x), \quad z_3(x) = y''(x), \quad \dots, \quad z_{n+1}(x) = y^{(n)}(x),$$

перепишем уравнение (1) в виде системы уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{z}(x) = \mathbf{z}(x)A(x), \quad (6)$$

где $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$ — $(n+1)$ -мерный вектор-строка, а $A(x)$ — это $(n+1) \times (n+1)$ квадратная матрица, имеющая вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0(x) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1(x) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_n(x) \end{pmatrix}.$$

Покажем, как можно найти среднее решение уравнения (1). Чтобы избежать проблемы, связанной с усреднением зависимых случайных сомножителей, поступим аналогично тому, как мы поступили при усреднении m -го порядка уравнения (2). Для этого введем фундаментальную матрицу $B(s, x)$ системы (6), т.е. матрицу, обладающую свойством $\mathbf{z}(x) = \mathbf{z}(s)B(s, x)$ при $s < x$. Используя B , можно получить формулу, связывающую векторы $\mathbf{z}(x + \delta)$ и $\mathbf{z}(x)$:

$$\mathbf{z}(x + \delta) = \mathbf{z}(x)B(x, x + \delta). \quad (7)$$

В общем случае явное выражение для фундаментальной матрицы содержит мультипликативный интеграл, конструктивное вычисление которого удобно производить, используя его связь с обычным аддитивным интегралом (см. [16]):

$$\begin{aligned} B(x, x + \delta) &= \prod_{u=x}^{x+\delta} [I + A(u) du] \\ &= I + \sum_{k=1}^{\infty} \int \dots \int_{x \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_k \leq x+\delta} A(\tau_1) \dots A(\tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k, \end{aligned} \quad (8)$$

где I – единичная матрица $(n+1) \times (n+1)$.

Используя (7) и (8), можно записать

$$\frac{\mathbf{z}(x + \delta) - \mathbf{z}(x)}{\delta} = \mathbf{z}(x) \hat{P}(x, \delta), \quad (9)$$

где $\hat{P}(x, \delta)$ – некоторая $(n+1) \times (n+1)$ -матрица, полученная из разложения (8), которое играет ту же роль, что и разложение в ряд по степеням δ случайной экспоненты при усреднении m -го порядка уравнения (2). Нахождение в каждом конкретном случае $\hat{P}(x, \delta)$ облегчается тем, что вычисления достаточно вести лишь с точностью до исчезающих при $\delta \rightarrow 0$ членов; см. например [14].

Ниже нам потребуется индексная форма записи разностной системы (9), а именно, ее представление в виде

$$\frac{z_i(x + \delta) - z_i(x)}{\delta} = z_\alpha \hat{P}_i^\alpha, \quad (10)$$

где верхний индекс у $\hat{P} = \hat{P}(x, \delta)$, по которому ведется суммирование – номер строки, а нижний – номер столбца.

Считая, что потеря памяти у всех случайных коэффициентов происходит точно в точке x , мы можем усреднить (9) (подчеркнем, что сомножители в правой части относятся к разным интервалам обновления и поэтому статистически независимы). Последующий предельный переход при $\delta \rightarrow 0$ дает уравнение для $\langle \mathbf{z} \rangle$

$$\frac{d}{dx} \langle \mathbf{z} \rangle(x) = \langle \mathbf{z} \rangle(x) \langle \hat{P} \rangle. \quad (11)$$

Матрица $\langle \hat{P} \rangle$ в (11) не зависит от x , так как в ней присутствуют лишь средние и эффективные значения случайных процессов $a_j(x)$. Поскольку вектор $\langle \mathbf{z} \rangle$ зависит только от функции $\langle y \rangle$ и ее производных, то уравнение (11) сводится к линейному дифференциальному уравнению $(n+1)$ -го порядка для $\langle y \rangle$.

Сформулируем основной результат этого пункта в виде следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Среднее решение уравнения (1) удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению $(n+1)$ -го порядка с постоянными коэффициентами.*

4. Линеаризирующий тензор уравнения (1) и его простейшие свойства.

Далее мы будем записывать введенный $(n+1)$ -мерный вектор $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$ в виде z_i . Дадим определение основного понятия настоящей работы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Тензор

$$z_{ilk\dots p} = z_i z_l z_k \dots z_p, \quad (12)$$

где $i, l, k, \dots, p$ — некоторый набор m индексов, каждый из которых независимо от других пробегает от 1 до $n+1$, назовем *линеаризирующим тензором m -го порядка уравнения (1)*.

Поскольку вектор $\mathbf{z}$ принадлежит вспомогательному плоскому $(n+1)$ -мерному линейному пространству, то можно не различать ковариантные и контравариантные индексы. Сформулируем несколько простейших свойств тензора (12). Первое свойство очевидным образом вытекает из определения 2.

СВОЙСТВО 1. *Линеаризирующий тензор (12) имеет $(n+1)^m$ компонент и является симметричным тензором ранга m .*

Отметим, что в силу симметричности различных компонент у (12) будет гораздо меньше, чем $(n+1)^m$. Это существенно облегчает на практике исследование какого-либо конкретного уравнения вида (1).

Для дальнейшего не принципиально, сколько именно различных компонент у тензора $z_{ilk\dots p}$; очевидно, что в общем случае поиск этого числа заключается в решении некоторой комбинаторной задачи. Мы нашли количество различных компонент при $m = 2$ и $m = 3$, поскольку наибольший интерес при исследовании уравнений со случайными коэффициентами представляют среднее решение и его моменты 2- и 3-го порядков.

СВОЙСТВО 2. *Линеаризирующий тензор 2-го порядка z_{ij} имеет $(n+1)(n+2)/2$ различных компонент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод математической индукции. При $n = 1$ утверждение проверяется непосредственно: вектор $\mathbf{z}$ имеет вид (y, y') , поэтому тензор z_{ij} имеет 4 компоненты

$$z_{11} = y^2, \quad z_{12} = z_{21} = yy', \quad z_{22} = (y')^2,$$

из которых 3 = $(1+1)(1+2)/2$ различны.

Покажем теперь, что из предположения истинности утверждения при $n = k$ вытекает истинность и при $n = k+1$. Рассмотрим вектор $\mathbf{z} = (y, y', y'', \dots, y^{(k)}, y^{(k+1)})$. У него $k+2$ компоненты. Введем вектор $\mathbf{z}^0 = (y, y', y'', \dots, y^{(k)})$. Сопоставим вектору $\mathbf{z}$ линеаризирующий тензор z_{ij} , а вектору $\mathbf{z}^0$ — линеаризирующий тензор z_{ij}^0 . Нетрудно заметить, что различных компонент у z_{ij} больше, чем у z_{ij}^0 , ровно на $k+2$. В самом деле, вектор $\mathbf{z}$ условно можно записать в виде $\mathbf{z} = (\mathbf{z}^0, y^{(k+1)})$, откуда видно, что у z_{ij} различных компонент больше, чем у z_{ij}^0 , ровно на число различных сочетаний элемента $y^{(k+1)}$ с компонентами вектора $\mathbf{z}$, которых $k+2$.

По предположению индукции тензор z_{ij}^0 имеет $(k+1)(k+2)/2$ различных компонент; следовательно, тензор z_{ij} имеет

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} + k+2 = \frac{(k+2)(k+3)}{2} = \frac{((k+1)+1)((k+1)+2)}{2}$$

различных компонент. Отсюда заключаем, что свойство 2 доказано для любого $n \in \mathbb{N}$, что и требовалось.

Аналогично доказывается соответствующее утверждение для z_{ijk} .

СВОЙСТВО 3. *Линеаризирующий тензор 3-го порядка z_{ijk} имеет*

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{(k+2)!}{k!} = \frac{1}{6} n^3 + n^2 + \frac{11}{6} n + 1$$

различных компонент.

5. Уравнение для среднего линеаризирующего тензора m -го порядка и его скаляризация. Докажем важную лемму об одном замечательном свойстве среднего тензора $z_{ilk\dots p}$.

ЛЕММА 2. *Математическое ожидание $\langle z_{ilk\dots p} \rangle$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению первого порядка с постоянными коэффициентами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцируем тензор $z_{ilk\dots p}$ по x (это всегда можно сделать ввиду того, что каждая компонента (12) представляет собой произведение некоторой степени $n+1$ раз дифференцируемой функции y и ее производных, причем порядок этих производных не выше n)

$$\frac{d}{dx} z_{ilk\dots p} = z_l z_k \dots z_p \frac{dz_i}{dx} + z_i z_k \dots z_p \frac{dz_l}{dx} + \dots + z_i z_l z_k \dots \frac{dz_p}{dx}$$

и перейдем к разностной форме полученного тождества:

$$\begin{aligned} \frac{z_{ilk\dots p}(x+\delta) - z_{ilk\dots p}(x)}{\delta} &= z_l z_k \dots z_p \frac{z_i(x+\delta) - z_i(x)}{\delta} + z_i z_k \dots z_p \frac{z_l(x+\delta) - z_l(x)}{\delta} \\ &\quad + \dots + z_i z_l z_k \dots \frac{z_p(x+\delta) - z_p(x)}{\delta} + \varepsilon, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = o(1)$ при $\delta \rightarrow 0$.

Заменим в правой части последнего выражения по формуле (10) сомножители вида $(z_i(x+\delta) - z_i(x))/\delta$

$$\frac{z_{ilk\dots p}(x+\delta) - z_{ilk\dots p}(x)}{\delta} = z_{\alpha l k \dots p} \hat{P}_i^\alpha + z_{i \beta k \dots p} \hat{P}_l^\beta + \dots + z_{i l k \dots \gamma} \hat{P}_p^\gamma + \varepsilon, \quad (13)$$

усредним полученную формулу и затем перейдем к пределу при $\delta \rightarrow 0$:

$$\frac{d}{dx} \langle z_{ilk\dots p} \rangle = \langle z_{\alpha l k \dots p} \rangle \langle \hat{P} \rangle_i^\alpha + \langle z_{i \beta k \dots p} \rangle \langle \hat{P} \rangle_l^\beta + \dots + \langle z_{i l k \dots \gamma} \rangle \langle \hat{P} \rangle_p^\gamma. \quad (14)$$

При выводе (14) мы учли, что каждое из m слагаемых в правой части (13) при усреднении можно расцепить на произведение среднего линеаризирующего тензора и средней матрицы $\hat{P}$ (сомножители в каждом таком слагаемом относятся к разным интервалам обновления и поэтому статистически независимы). Лемма 2 доказана.

Очевидно, что перебором всевозможных значений индексов $i, l, k, \dots, p$ уравнение (14) может быть записано в виде системы линейных скалярных уравнений первого порядка для усредненных компонент $z_{ilk\dots p}$. Следующая лемма связывает число уравнений в этой системе с числом различных компонент соответствующего линеаризирующего тензора.

ЛЕММА 3. *Число k' дифференциальных уравнений в скаляризованной системе равно числу k'' различных компонент линеаризирующего тензора.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что заведомо $k' \geq k''$, поскольку в левой части каждого такого уравнения стоит производная от некоторой усредненной компоненты $z_{ilk\dots p}$. Другими словами, пока процедура скаляризации не исчерпает всевозможных различных компонент линеаризирующего тензора, не закончится и добавление в нашу систему новых уравнений.

Покажем теперь, что $k' \leq k''$. Допустим, что это не так. Тогда, по меньшей мере, у двух различных уравнений данной системы совпадают левые части – производные от усредненной компоненты, соответствующей некоторому фиксированному набору индексов $i_0, l_0, k_0, \dots, p_0$. Но в этом случае, как вытекает из свойства 1 (симметричность тензора (12)), у этих уравнений неизбежно совпадут и правые части, поскольку они с точностью до перестановок слагаемых однозначно определяются этим фиксированным набором $i_0, l_0, k_0, \dots, p_0$. Значит, совпадут и сами уравнения, что противоречит допущению о том, что они различны.

Из неравенств $k' \geq k''$ и $k' \leq k''$ следует, что $k' = k''$, что и требовалось доказать.

6. Решение задачи усреднения m -го порядка уравнения (1). Нам потребуется еще одна лемма, обоснование которой в более общем виде можно найти, например, в [17].

ЛЕММА 4. Пусть $g_i = g_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, – какие угодно n раз дифференцируемые функции аргумента x . Тогда система n уравнений вида

$$\frac{d}{dx} g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

может быть сведена к линейному дифференциальному уравнению порядка не выше n для одной из функций $g_i(x)$ (без ограничения общности, для $g_1 = g_1(x)$).

Для нас важно, что в рассматриваемой системе число уравнений совпадает с числом функций. Отметим также, что на коэффициенты a_{ij} не накладывается никаких требований, кроме требования их независимости от x . Даже если для одного или нескольких уравнений все коэффициенты в правой части равны нулю (т.е. для одной из функций g'_i получается тривиальное уравнение вида $g'_i = 0$), лемма 4 останется справедливой.

Теперь у нас есть все, чтобы сформулировать основную теорему об общем виде уравнения для статистических моментов решения (1).

ТЕОРЕМА 1. Класс уравнений (1) с δ -коррелированными случайными коэффициентами замкнут относительно усреднения m -го порядка, причем коэффициенты в дифференциальном уравнении для $\langle y^m \rangle$ постоянны, а его порядок не превосходит числа различных компонент соответствующего линеаризирующего тензора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, требуется доказать, что понимаемое в смысле определения 1 усреднение уравнения (1) приводит к линейному уравнению для $\langle y^m \rangle$, $m \in \mathbb{N}$. Для случая обычного усреднения, т.е. когда $m = 1$, теорема уже доказана, см. лемму 1. Докажем ее для случая $m \geq 2$.

Рассмотрим уравнение (14) из леммы 2 для среднего линеаризирующего тензора m -го порядка и проведем процедуру его скаляризации. В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами, в которой согласно лемме 3 число различных уравнений равно числу

неизвестных функций, т.е. числу различных усредненных компонент линеаризирующего тензора. Одной из них будет являться компонента $\langle y^m \rangle$, соответствующая набору индексов $i = l = k = \dots = p = 1$. Применение леммы 4 для функции $g_1 \equiv \langle y^m \rangle$ завершает доказательство.

Конструктивное решение задачи усреднения m -го порядка (1) удобно сформулировать в виде следующего алгоритма, корректность которого вытекает из доказанной только что основной теоремы. Итак, чтобы для заданного m найти $\langle y^m \rangle$, нужно:

- 1) ввести линеаризирующий тензор $z_{ilk\dots p}$ соответствующего порядка m ;
- 2) продифференцировать его по x ;
- 3) перейти к разностной форме полученного тождества и затем заменить члены вида $(z_i(x + \delta) - z_i(x))/\delta$ по формуле (10);
- 4) усреднить возникшее уравнение, расщепить каждое из m слагаемых в правой его части на $\langle z_{ilk\dots p} \rangle$ и $\langle \hat{P} \rangle$ и перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0$;
- 5) выяснить, исходя из соображений симметричности тензора $z_{ilk\dots p}$, сколько различных компонент он будет иметь, и выписать систему соответствующего числа скалярных уравнений (при $m = 2$ и $m = 3$ число различных компонент найдено в пункте 4);
- 6) свести выписанную систему к уравнению для $\langle y^m \rangle$ и решить его.

7. Обсуждение. При исследовании (1) мы наложили весьма жесткие ограничения на случайные коэффициенты $a_j(x)$, наиболее существенным из которых является требование мгновенной потери памяти. Представляется, что и в случае отказа от условия короткокоррелированности уравнения для среднего и высших статистических моментов решения (1) будут оставаться линейными и определяться соотношениями того же характера, что и в приближении $\delta \rightarrow 0$. По крайней мере, именно так обычно обстоит дело с математическим ожиданием, хотя сами моментные уравнения, вообще говоря, уже являются либо интегральными, либо разностными [18].

Интересной чертой получаемых при помощи линеаризирующего тензора моментных уравнений является появление у них посторонних решений [19]. Дело в том, что сведение скаляризованной системы для усредненных компонент тензора $z_{ilk\dots p}$ к моментному уравнению достигается путем пошагового исключения из этой системы всех компонент, кроме искомой компоненты $\langle y^m \rangle$. На каждом таком шаге происходит дифференцирование соответствующего уравнения и увеличение порядка старшей производной на 1, в результате чего и появляются посторонние решения. Чтобы их исключить, необходимо использовать начальные условия, хотя конкретный вид этих условий, как отмечалось при постановке задачи, не существен при выводе моментных уравнений.

Представляется, что предложенный в настоящей работе тензорный подход применим не только к усреднению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, но и к усреднению более интересных и важных с практической точки зрения уравнений со случайными коэффициентами в частных производных. Разумеется, что конструкция линеаризирующего тензора для того или иного класса уравнений в частных производных может оказаться гораздо сложнее, чем для (1), поскольку его компоненты будут зависеть не только от частных производных разных порядков, но и от их комбинаций (вообще говоря, нелинейных) по различным переменным (например, по координатам и по времени).

Автор выражает благодарность Д. Д. Соколову и В. Н. Тутубалину за оказанную поддержку и сделанные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Я. Б. Зельдович, С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, “Переमेжаемость в случайной среде”, *УФН*, **152**:1 (1987), 3–32.
- [2] Ya. B. Zel’dovich, A. A. Ruzmaikin, D. D. Sokolov, *The Almighty Chance*, World Sci., Singapore, 1991.
- [3] В. И. Тихонов, “Воздействие флуктуаций на простейшие параметрические системы”, *Автоматика и телемеханика*, **19**:8 (1958), 717–723.
- [4] Дж. Адомиан, *Стохастические системы*, Мир, М., 1987.
- [5] А. В. Фурсиков, “Проблема замыкания цепочек моментных уравнений, соответствующих трехмерной системе уравнений Навье–Стокса в случае больших чисел Рейнольдса”, *Докл. АН СССР*, **319**:1 (1991), 83–87.
- [6] А. В. Фурсиков, “Моментная теория для уравнений Навье–Стокса со случайной правой частью”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:6 (1992), 1273–1315.
- [7] В. Е. Шапиро, В. М. Логинов, *Динамические системы при случайных воздействиях. Простые средства анализа*, Изд-во «Наука», Сиб. отд., Новосибирск, 1983.
- [8] А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, Теория вероятностей и математическая статистика, Наука, М., 1979.
- [9] В. Г. Задорожний, Л. Н. Строева, “О моментных функциях решения начальной задачи линейного дифференциального уравнения первого порядка со случайными коэффициентами”, *Дифференц. уравнения*, **36**:3 (2000), 377–385.
- [10] В. Г. Задорожний, “Моментные функции решения уравнения теплопроводности со случайными коэффициентами”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **7**:2 (2001), 351–371.
- [11] В. Г. Задорожний, “О нахождении моментных функций решения задачи Коши уравнения диффузии со случайными коэффициентами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:4 (2002), 119–136.
- [12] С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, “Уравнения динамо в случайном короткокоррелированном поле скорости”, *Магнит. гидродинам.*, **4** (1983), 67–72.
- [13] Д. В. Семенов, “Усреднение параболических дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами”, *Матем. заметки*, **45**:3 (1989), 123–126.
- [14] V. Lamburt, D. Sokoloff, V. Tutubalin, “Light propagation in a Universe with spatial inhomogeneities”, *Astrophys. Space Sci.*, **298**:3 (2005), 409–418.
- [15] Д. А. Грачев, Д. Д. Соколов, “Численное моделирование роста мультипликативных случайных величин”, *Вычислит. методы и програм.*, **8**:1 (2007), 1–5.
- [16] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 2004.
- [17] Л. Э. Эльсгольц, *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*, Курс высшей математики и математической физики, **3**, УРСС, М., 2000.
- [18] Д. А. Грачев, “Влияние эффектов памяти в задаче о распространении света во Вселенной с неоднородностями”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ., астрон.*, **1** (2008), 16–19.
- [19] Д. А. Грачев, Д. Д. Соколов, “Высшие статистические моменты решения уравнения Якоби со случайной кривизной”, *Труды Пятой Всероссийской научной конференции (29–31 мая 2008 г.). Часть 3*, Матем. моделирование и краев. задачи, СамГТУ, Самара, 2008, 83–86.

Д. А. Грачев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: gdmath@mail.ru

Поступило

06.03.2009

Исправленный вариант

08.05.2009