Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, М. Руло, Квазиклассический аналог принципа Мопертюи–Якоби и его приложение к линейной теории волн на воде, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 458–463

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8675>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:35:05

Квазиклассический аналог принципа Мопертюи–Якоби и его приложение к линейной теории волн на воде

С. Ю. Доброхотов, М. Руло

1. Введение. Пусть M – d -мерное гладкое многообразие, T^*M – фазовое пространство с (локальными) координатами

$$y = (p, x), \quad p = {}^t(p_1, \dots, p_d), \quad x = {}^t(x_1, \dots, x_d).$$

Предположим, что на T^*M задано семейство гладко зависящих от параметров $J = (J_1, \dots, J_d)$ лагранжевых многообразий $\Lambda(J) = \{p = P(\varphi, J), x = X(\varphi, J)\}$, диффеоморфных тору

$$\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / 2\pi\mathbb{Z}^d, \quad J = (J_1, \dots, J_d) \in \mathcal{M}.$$

Здесь $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, $\varphi_j \in \mathbb{S}^1$, – угловые координаты на $\Lambda(J)$, задающие полуплотность $|d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_d|^{1/2}$, $\mathcal{M}$ – некоторая область в $\mathbb{R}^d$. Пусть γ_j , $j = 1, \dots, d$, – базисные циклы на $\Lambda(J)$. Они определяют переменные действия, задаваемые в канонических координатах (x, p) формулами $I_j = \oint_{\gamma_j} p dx$, и, кроме того, задают индексы Маслова m_j . В дальнейшем всегда будем считать, что в качестве параметров J_j выбраны действия I_j и что переменные действия J и углы φ на $\Lambda(J)$ образуют симплектические сопряженные координаты (вообще говоря, локальные). В силу предположения о гладкой зависимости $\Lambda(J)$ от параметров можно считать, что циклы γ_j гладко зависят от $J \in \mathcal{M}$, поэтому и индексы Маслова m_j оказываются одинаковыми для γ_j с фиксированным j . Зафиксируем на $\Lambda(J)$ некоторые (отмеченные) точки $r(J)$. Предположим далее, что на $\Lambda(J)$ заданы гладкие функции $\chi(\varphi, J)$, также гладко зависящие от J . Пусть h – малый положительный параметр. Для каждого фиксированного h построим множество $\mathcal{M}_q \in \mathcal{M}$, состоящее из векторов $J(k, h)$, $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^n$, с компонентами $J_j(k, h)$, удовлетворяющими условию квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова

$$J_j(k, h) = \left(\frac{m_j}{4} + k_j \right) h, \quad J(k, h) \in \mathcal{M}.$$

Тогда для таких $J(k, h)$ с точностью до $O(h)$ (в подходящей норме) определен канонический оператор Маслова [1], [2]

$$K_{\Lambda(J(k, h))}^h : C^\infty(\Lambda(J^k(h))) \mapsto C^\infty(M),$$

и по каждой функции $\chi \in C^\infty(\Lambda(J))$ можно построить функции $u_k(x, h) = K_{\Lambda(J(k, h))}^h \circ \chi$. Функции $u_k(x, h)$ локализованы в окрестности проекций $\pi_x \Lambda(J(k, h))$ на многообразие M : при $h \rightarrow +0$ $\text{supp } u_k(x, h) \rightarrow \pi_x \Lambda(J^k(h))$. Границы $\pi_x \Lambda(J(k, h))$ состоят из поверхностей (кривых), называемых каустиками.

Семейства лагранжевых торов, их параметризация переменными действия, канонический оператор Маслова на них и т.д. определяются независимо от гамильтоновых систем и дифференциальных операторов. Рассмотрим h -псевдодифференциальный самосопряженный оператор

$$\hat{L} = L\left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}; h\right),$$

заданный своим вейлевским символом $L(x, p; h)$, принадлежащим соответствующему классу функций на T^*M (см. [1], [3]) и имеющим разложение

$$L = H(x, p) + hL_1(x, p) + h^2L_2(x, p) + \dots$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00726) и фонда CNRS.

с параметром h . Главный символ – функция $H(x, p)$ – называется *гамильтонианом*; для упрощения изложения считаем, что $L_1(x, p) = 0$ (от этого предположения можно отказаться). Рассмотрим теперь семейство лагранжевых многообразий, инвариантных по отношению к векторному полю X_H , порожденному гамильтонианом H . Тогда описанная выше процедура позволяет построить “асимптотические” собственные функции $u^k(x, h)$ и значения $E^k(h)$ в том смысле, что $(\hat{L} - E^k(h))u^k(x, h) = \mathcal{O}()$. Последовательности $u^k(x, h)$, $E^k(h)$ часто называют “квазимодами” или спектральными сериями.

Семейства лагранжевых торов, описанных выше, может быть построено, например, в случае, когда гамильтонова система, задаваемая H , вполне интегрируема, и $\Lambda(J) = ((x, p) = X(\varphi, J), P(\varphi, J))$ – связанные компактные компоненты максимальной размерности в T^*M отображения момента m , которое предполагается регулярным на некотором $\Lambda_0 = \Lambda(I^0)$, лежащем на линии уровня $H = E$. Тогда $\Lambda(J)$ – лиувиллевы торы, инвариантные относительно фазового потока, порожденного гамильтонианом H . Выбирая функции χ на $\Lambda(J)$ равными 1 и полагая $E^k(h) = E(J(k, h))$, мы получаем множество квазимод (“спектральную серию”) $u^k(x, h)$, $E^k(h)$ оператора $\hat{L}$, отвечающих семейству $\Lambda(J)$ [1]. Предположение о гладкой зависимости семейства $\Lambda(J)$ от параметров J (в обычном смысле) не обязательно, сказанное остается в силе при соответствующем изменении множества значений $\{J(k, h)\}$; в частности, вместо лиувиллевых торов можно рассматривать КАМ-торы, возникающие в том случае, когда гамильтониан H представляет собой возмущение некоторого интегрируемого гамильтониана. Таким ситуациям вместе с вопросами о полноте квазимод или “мощности” спектральной серии (по отношению к полному спектру оператора $\hat{L}$) посвящены глубокие исследования, проведенные в [4], [5].

Требование интегрируемости гамильтоновой системы является весьма жестким. Цель этой заметки – показать, используя соображения близкие к [6], что некоторые спектральные серии можно получить в случае существования у гамильтоновой системы лишь одного (индивидуального) лагранжева тора с почтипериодическим или периодическим движением, и объяснить, как такие торы получить с помощью принципа Мопертюи–Якоби.

2. Почти инвариантные торы и квазиклассические спектральные серии псевдодифференциальных операторов с параметром.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть N – некоторое натуральное число, X_H – гамильтоново векторное поле на T^*M , заданное гладким гамильтонианом H , и в некоторой окрестности лагранжева тора Λ_0 задано параметризованное переменными действия J гладкое семейство лагранжевых торов Λ_N^J с квазипериодическим или периодическим движением на них. Назовем Λ_N^J *почти инвариантными mod $O(|J - I^0|^N)$* торами векторного поля X_H , если его траектории на Λ_N^J удовлетворяют соответствующей гамильтоновой системе с точностью до $O(|J - I^0|^N)$ и

$$H|_{\Lambda_N^J} = H^N(J, I^0) + O(|J - I^0|^{N+1}),$$

где $H^N(J, I^0)$ – некоторая гладкая функция.

Предположим, что фазовый поток, задаваемый гладким гамильтонианом H , на некотором лагранжевом торе $\Lambda = \Lambda_0 \in T^*M$ имеет форму квазипериодического или периодического движения

$$(P(t), X(t)) = Y^0(\omega^0 t + \varphi), \quad Y^0(\varphi) = (P(\varphi), X(\varphi))$$

(выполнения какого-либо условия о несоизмеримости компонент вектора частот ω^0 здесь не требуется). Обозначим через I^0 d -мерный вектор, состоящий из действий из этого тора. Введем $2d \times d$ матрицу $Y_\varphi^0 = (\partial Y^0 / \partial \varphi_1, \dots, \partial Y^0 / \partial \varphi_d)$ и $d \times d$ симметричную матрицу $M = -(^t Y_\varphi^0 Y_\varphi^0)^{-1}$. Далее обозначим через $\mathbf{J}$ стандартную симплектическую матрицу

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id}_d \\ \text{Id}_d & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{Id}_d - d \times d$ единичная матрица, и положим $Y^J = \mathbf{J}Y_\varphi^0 M$. Определим d -мерную вектор-функцию $q(J, \phi)$ как решение системы квадратных уравнений

$$q_j - \frac{1}{2} \langle q, {}^t Y_I^0 \hat{J} Y_{J\varphi_j}^0 q \rangle = J_j - I_j^0, \quad j = 1, 2, \dots, d,$$

фиксированное условием $q = J - I + O((J - I^0)^2)$ при $J \rightarrow I^0$.

ТЕОРЕМА 1 [7]. 1) Уравнения

$$y = Y(J, \phi) \equiv {}^t(P(J, \varphi), X(J, \varphi)) \equiv Y^0(\varphi) + Y_I^0(\varphi)q(\varphi, J)$$

определяют почти инвариантные $\text{mod } O(|J - I^0|)$ лагранжесвы торы Λ_1 векторного поля X_H , движение на которых задается вектором частот ω^0 и

$$H|_{\Lambda_1} = E + \langle \omega^0, J - I^0 \rangle + O((J - I^0)^2).$$

2) Пусть вектор частот $\omega^0 = (\omega_1^0, \dots, \omega_d^0)$ удовлетворяет диофантовому условию. Тогда для любого натурального N в окрестности $\Lambda_0 \subset \{H = E\}$ существует гладкое каноническое преобразование $\kappa_N: (J, \varphi) \mapsto (J', \varphi')$ и полином $H_N(\iota)$ степени N аргумента $\iota = J' - I^0$ такие, что

$$H \circ \kappa \circ \kappa_N(J', \varphi') = H_N(\iota) + \mathcal{O}(\iota^{N+1})$$

и уравнения $y = Y \circ \kappa \circ \kappa_N(J', \varphi')$ определяют почти инвариантные $\text{mod } O((\iota)^N)$ лагранжесвы торы $\Lambda_N^{J'}$ поля X_H . При этом J' суть переменные действия, вычисленные на циклах γ_j , которые также задают не зависящие от J' индексы Маслова m_j , $j = 1, \dots, d$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Это утверждение дает в точности нормальные формы Бирхгофа. Факт существования почти инвариантных лагранжесвых торов вытекает из теоремы Дарбу–Вайнштейна, справедливой для общих лагранжесвых многообразий [8]. Построения, данные в теореме 1, дают ее простое доказательство и достаточно явные формулы в рассматриваемом случае.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Λ^0 – как и ранее (гладкое) лагранжесво многообразие лежащее на энергетическом уровне E : $H|_{\Lambda^0} = E$. Пусть заданы некоторое натуральное N и вещественное δ , $0 \leq \delta \leq 1$, и при $N \geq 2$ выполнено диофантово условие для вектора частот ω (при $N = \delta = 1$ выполнение диофантова условия не предполагается). Пусть далее Λ_N^J – построенное в теореме 1 семейство почти инвариантных лагранжесвых торов с циклами γ_j , индексами m_j и инвариантной мерой $d\varphi_1^0 \dots d\varphi_d^0$. Определим для каждого фиксированного h множество векторов $J(k, h)$, $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, с компонентами $J_j(k, h) = h(m_j/4 + k_j)$, $j = 1, 2, \dots, d$, где k выбраны таким образом, что $|J(k, h) - I^0| = h^\delta$. Положим

$$E(k, h) = E + H_N(J(k, h) - I^0) \equiv E + \langle \omega, J(k, h) - I^0 \rangle + O(|J(k, h) - I^0|^2)$$

$$\text{и } u_k = K_{\Lambda_N^{J(k, h)}}^h \circ 1.$$

Тогда $(u_k(x, h), E_k(h))$ суть квазимоды оператора $\hat{L} = H(x, -i\hbar\partial/\partial x) + \mathcal{O}(\hbar^2)$:

$$(\hat{L} - E_k(h))u_k(x, h) = \mathcal{O}(\hbar^{1+\delta})$$

и расстояние от любого $E_k(h)$ до спектра оператора $\hat{L}$ не превосходит $\mathcal{O}(\hbar^2)$. В частности, если спектр оператора $\hat{L}$ дискретен, то найдется собственное значение $\hat{E}$ оператора $\hat{H}$ такое, что $\hat{E} = E_k(h) + \mathcal{O}(\hbar^2)$. Построенные квазимоды имеют относительно максимальную плотность в $\hbar^\delta$ -окрестности Λ^0 (см. [4], [5]).

3. Построение почти инвариантных торов с помощью принципа Мопертюи–Якоби. Нахождение даже одного инвариантного тора не интегрируемой гамильтоновой системы относится к числу открытых задач. Покажем, как при ее решении можно использовать известный принцип Мопертюи–Якоби [9]–[11].

Пусть $(\mathcal{H}(p, x), H(p, x))$ – пара функций Гамильтона на T^*M , которые допускают общую регулярную энергетическую поверхность Σ со значениями энергии $(\mathcal{E}, E)$. Тогда известно, что траектории соответствующих гамильтоновых систем на энергетических уровнях $(\mathcal{E}, E)$ связаны равенствами $(\mathcal{P}(\tau), \mathcal{X}(\tau)) = (P(t(\tau)), X(t(\tau)))$ с репараметризацией времени $t = t(\tau)$, определяемой уравнением $dt/d\tau = \mathcal{G}(\tau)$ с некоторой гладкой функцией $\mathcal{G}$, зависящей от начальных условий (см. [10; теорема 3.7.7]). В этом случае пара $(\mathcal{H}, H)$ удовлетворяет принципу Мопертюи–Якоби на уровнях энергии $(\mathcal{E}, E)$.

Для наших целей интересной является ситуация, когда вектор-функции $(\mathcal{P}(\tau), \mathcal{X}(\tau))$ задают квазипериодическое (или периодическое) движение с $(d$ -мерным) вектором частот $\tilde{\omega}$ на d -мерном (лагранжевом) торе

$$\Lambda_0 \subset T^*M, \quad \Lambda_0 = \{p = P^0(\varphi), x = X^0(\varphi)\},$$

где $P^0(\varphi)$, $X^0(\varphi)$ – 2π -периодические функции по каждой фазе φ_j . В этом случае

$$(\mathcal{P}(\tau), \mathcal{X}(\tau)) = (P^0(\tilde{\omega}\tau + \varphi), X^0(\tilde{\omega}\tau + \varphi))$$

и Λ_0 – инвариантный лагранжев гамильтоновой системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$. Этот тор является инвариантным и для гамильтоновой системы с гамильтонианом H , но с несколько другой динамикой.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(\mathcal{H}, H)$ удовлетворяет принципу Мопертюи–Якоби с энергиями $(\mathcal{E}, E)$ и Λ_0 – инвариантный тор гамильтоновой системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$. Предположим, что частоты $\tilde{\omega}$ удовлетворяют диофантовым условиям, и пусть (τ, t) связаны равенством $dt = G(\tilde{\omega}\tau + \varphi_j^0) d\tau$ с гладкой функцией $G(\varphi^0) = \mathcal{G}|_{\Lambda_0}$, 2π -периодической по каждой фазе φ_j^0 . Тогда можно определить репараметризацию Λ_0 равенством

$$\Phi: \varphi_0 \mapsto \varphi = \Phi(\varphi_0) = \varphi_0 + \tilde{\omega}f(\varphi_0),$$

где f – гладкая периодическая функция с нулевым средним $\langle f \rangle = 0$, при этом движение на Λ^0 , порожденное гамильтонианом H , при такой параметризации будет квазипериодическим с вектором частот $\omega = \tilde{\omega}/\langle G \rangle$ и $\det(\partial\Phi/\partial\varphi_0(\varphi_0)) = \langle G \rangle/G$. Здесь $\langle G \rangle$ есть среднее от G по тору Λ_0 .

Ситуация, описанная в теореме 3, имеет место, например, в случае, когда гамильтонова система, задаваемая гамильтонианом $\mathcal{H}$, вполне интегрируема и Λ_0 – некоторый лиувиллев тор векторного поля $X_{\mathcal{H}}$ с почтипериодическим движением с вектором частот $\tilde{\omega}$. Заметим, что нет никакой причины, в силу которой гамильтонова система с гамильтонианом H в общем случае была бы также вполне интегрируемой или близкой к вполне интегрируемой. Но если предположить, что вектор частот $\tilde{\omega}$ удовлетворяет диофантовым условиям, то применяя последовательно теоремы 3, 1 и 2, мы получаем инвариантный тор векторного поля X_H с почтипериодическим движением, затем семейство почти инвариантных торов и спектральную серию соответствующего (псевдо) дифференциального оператора, порожденную этим семейством. Если в теореме 2 ограничиться случаем $N = 1$, то угловые переменные φ на почти инвариантных торах, сопряженные с J , совпадут с угловыми переменными на торе Λ^0 . Тогда

$$d\varphi_1 \dots d\varphi_d = \frac{\langle G \rangle}{G(\varphi^0)} d\varphi_1^0 \dots d\varphi_d^0.$$

Поэтому в каноническом операторе Маслова, определяющем собственные функции $\hat{L}$, можно использовать угловые переменные φ_j^0 (связанные с гамильтонианом $\mathcal{H}$), заменив функцию 1 на $\sqrt{G(\varphi_0)}$.

Напомним один из основных примеров, в котором применяется принцип соответствия Мопертюи–Якоби. Предположим, что на многообразии M с гладкой Римановой метрикой $ds^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq d} g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j$ задан гладкий потенциал V , причем $E > \sup_M V$. Тогда гамильтонианы

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2(E - V)} \sum_{1 \leq i, j \leq d} g^{ij}(x) p_i p_j, \quad H = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} g^{ij}(x) p_i p_j + V(x)$$

удовлетворяют принципу Мопертюи–Якоби на уровнях энергии $(1, E)$, при этом время τ и t связаны равенством $d\tau = (E - V) dt$ и $G = 1/(E - V(X^0(\varphi^0)))$.

4. Приложение к теории волн на воде. Рассмотрим случай, когда $\mathcal{H}(x, p) = g(x)p^2$ задается метрикой $g(x)$ Лиувилля в некоторой области Ω на двумерной плоскости, диффеоморфной кольцу. Все интегрируемые ситуации в случае, когда второй интеграл в инволюции квадратичен по импульсам p_1, p_2 , полностью изучены. Комментарии и библиографию можно найти в [12], а также в работе [13], в которой соответствующие лиувиллевы торы были использованы для построения квазимод оператора $\nabla g(x) \nabla$, описывающих волны на воде, захваченные донными неоднородностями в длинноволновом приближении. Используя эти результаты и квазиклассический аналог принципа Мопертюи–Якоби, сконструируем профили дна бассейна, которые порождают серии квазимод полного псевдодифференциального оператора волн на воде $\hat{L} = L(-i\partial/\partial x, x; h)$ с вейлевским символом

$$L(p, x; h) = H(p, x) + h^2 L_2 + \dots$$

Здесь $H(p, x) = |p| \tanh(D(x)|p|)$ и заданная в области Ω гладкая функция $D(x)$ описывает дно бассейна (см. [2]).

Зафиксируем некоторое положительное E , умножим равенство на $H(p, x) = E$ на $D(x)$ и положим $z = |p|D(x)$, $\phi(z^2) = z \tanh z$. Обозначим через $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ отображение, обратное к $\phi(z^2)$; оно определяется гладкой строго возрастающей функцией, поэтому равенство $H(p, x) = E$ для фиксированного E может быть переписано в виде

$$\mathcal{H}(x, p) = g(x, E)p^2 = 1, \quad g(x, E) = \frac{D^2(x)}{\psi(ED(x))}.$$

На поверхности энергии $\mathcal{H}(x, p) = 1$ гамильтоновы векторные поля X_H и $X_{\mathcal{H}}$ связаны равенством

$$X_{\mathcal{H}} = G' X_H, \quad G' = \frac{\psi(ED(x))}{D(x)\psi'(ED(x))},$$

которое и индуцирует репараметризацию траекторий $dt = G d\tau$, соответствующую принципу Мопертюи–Якоби. Введем отображение $\chi: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1[$, заданное гладкой возрастающей функцией $\chi(D) = D^2/\psi(D)$, и выберем функцию $D(x) = D(x, E)$, задающую дно бассейна, как решение уравнения

$$g(x, E) = g(x) = E^{-2} \chi(ED(x, E)),$$

где $g(x)$ – метрика Лиувилля.

ТЕОРЕМА 4. Пусть метрика $g(x, E)$ выбрана (как и в [13]) так, что геодезический поток $\mathcal{H}(x, p) = g(x, E)p^2$ интегрируем и допускает лиувиллевы торы с векторами частот $\tilde{\omega}$, удовлетворяющими диофантовому условию. Зафиксируем один из этих торов Λ_0 . Тогда для любого $E > 0$ и этой лиувиллевой метрики уравнение

$$g(x) = E^{-2} \chi(ED(x, E))$$

определяет “функцию дна” $D(x) = D(x, E)$ на Ω такую, что Λ_0 есть инвариантный лагранжесов тор пары гамильтонианов $(H, \mathcal{H})$ с квазипериодическими траекториями

с энергиями $(E, 1)$. Этот тор Λ_0 порождает последовательность квазимод оператора $\widehat{L}$ с энергиями (квадратами частот захваченных мод)

$$E + \frac{\langle \omega, J(k, h) - I^0 \rangle}{\langle G' \rangle} + O(|J(k, h) - I^0|^2),$$

где $J(k, h)$, I^0 определены в теоремах 1, 2 и $\langle G' \rangle$ есть среднее от G' на торе Λ_0 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976. [2] S. Yu. Dobrokhotov, P. N. Zhevandrov, *Russ. J. Math. Phys.*, **10**:1 (2003), 1–31. [3] V. Ivrii, *Microlocal Analysis and Precise Spectral Asymptotics*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 1998. [4] V. F. Lazutkin, *KAM Theory and Semi-Classical Approximation to Eigenfunctions*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **24**, Springer-Verlag, Berlin, 1993. [5] Y. Colin de Verdière, *Invent. Math.*, **43** (1977), 15–52. [6] А. Д. Крахнов, *УМН*, **31**:3 (1976), 217–218. [7] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, В. А. Максимов, *ТМФ*, **135**:3 (2003), 378–408. [8] S. Bates, A. Weinstein, *Lectures on the Geometry of Quantization*, Berkeley Math. Lect. Notes, **8**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997. [9] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974. [10] R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings Publ., Reading, MA, 1978. [11] A. V. Tsiganov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8**:1 (2001), 157–182. [12] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern Geometry – Methods and Applications*. Vol. 1. *The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*, Grad. Texts in Math., **93**, Springer-Verlag, New York, NY, 1984. [13] В. С. Матвеев, *Матем. заметки*, **64**:3 (1998), 414–422.

С. Ю. Доброхотов

Институт проблем механики РАН,
Московский физико-технический
институт (государственный университет)
E-mail: doobr@ipmnet.ru

Поступило

01.09.2009

Исправленный вариант

27.10.2009

М. Руло

Centre de Physique Théorique,
Université du Sud Toulon-Var
E-mail: rouleux@cpt.univ-mrs.fr