Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Дорошенко, Большинство полугрупп преобразований свободны, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 464–467

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8676>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 09:48:15

Большинство полугрупп преобразований свободны

В. В. Дорошенко

1. Введение. Пусть $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел. Множество $T(\mathbb{N})$ всех преобразований $\mathbb{N}$ относительно композиции $fg = f(g)$, $f, g \in T(\mathbb{N})$, образует полугруппу, которую называют *полной полугруппой преобразований натурального ряда*. В данной работе показано, что в самой полугруппе $T(\mathbb{N})$ и в континуальном классе ее подполугрупп в некотором смысле большинство конечно порожденных подполугрупп являются свободными. Аналогичные результаты о свободных подгруппах симметрической группы счетной степени получены в [1], а о свободных подполугруппах полугруппы эндоморфизмов корневого дерева и некоторых матричных полугрупп в [2] и [3] соответственно.

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Для $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ определим ε -шар

$$B(f, \varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

Для натурального N и $x \in X$ обозначим $B_N(x) = B(x, 2^{-N})$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ будем рассматривать m -кратную декартову степень (X^m, ρ_m) , где X^m – декартова степень множества X , а для $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in X^m$ имеем

$$\rho_m(x, y) = \max_{1 \leq k \leq m} \rho(x_k, y_k).$$

Пусть X является полугруппой, в которой умножение непрерывно относительно метрики ρ , т.е. X – непрерывная полугруппа. Свободной полугруппой F_m ранга m со свободными порождающими $x_1, \dots, x_m$ является множество всех слов над алфавитом $x_1, \dots, x_m$ относительно операции приписывания слов. Значением слова $w = x_{n_1} \dots x_{n_k} \in F_m$ от элементов $a_1, \dots, a_m \in X$ будем называть произведение $a_{n_1} \dots a_{n_k}$, которое обозначим $w(a_1, \dots, a_m)$. Будем говорить, что полугруппа X обладает *свойством типичности* (ubiquity) свободных подполугрупп, если для любого $m \in \mathbb{N}$ множество всех таких наборов $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$, что полугруппа $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$, порожденная компонентами каждого из них, изоморфна свободной полугруппе F_m , является множеством второй категории в (X^m, ρ_m) , а его дополнение – множеством первой категории.

Введем метрику на $T(\mathbb{N})$. Для $f, g \in T(\mathbb{N})$ положим

$$\rho(f, g) = \begin{cases} 0, & f = g, \\ 2^{-n}, & f(k) = g(k), \quad k = 1, \dots, n-1, \quad f(n) \neq g(n). \end{cases}$$

Легко видеть, что ρ действительно есть метрика. Заметим, что для $f \in T(\mathbb{N})$ и $N \in \mathbb{N}$ шар $B_N(f)$ состоит из всех функций, совпадающих с f на множестве $\{1, \dots, N\}$.

Заметим, что любой ε -шар равен некоторому 2^{-N} -шару. Поэтому достаточно рассматривать только 2^{-N} -шары.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Умножение в $T(\mathbb{N})$ непрерывно относительно ρ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. $(T(\mathbb{N}), \rho)$ – полное метрическое пространство.

2. Основная теорема. Пусть S – подполугруппа $T(\mathbb{N})$. Тогда S будет метрическим пространством с метрикой, индуцированной из $T(\mathbb{N})$. Зафиксируем натуральное число m .

Определим множество

$$C_m = \{(f_1, \dots, f_m) \in S^m \mid \langle f_1, \dots, f_m \rangle \text{ изоморфна } F_m\}.$$

Для произвольных $w_1, w_2 \in F_m$, $w_1 \neq w_2$, положим

$$A_{w_1 w_2} = \{(f_1, \dots, f_m) \in S^m \mid w_1(f_1, \dots, f_m) = w_2(f_1, \dots, f_m)\}.$$

Тогда очевидно равенство $C_m = S^m \setminus \bigcup A_{w_1 w_2}$, где объединение берется по всем парам различных слов из свободной полугруппы F_m .

Доказательство следующей леммы стандартно.

ЛЕММА 2.1. *Для произвольных $w_1, w_2 \in F_m$, $w_1 \neq w_2$, множество $A_{w_1 w_2}$ замкнуто в метрическом пространстве (S^m, ρ_m) .*

Назовем отображение $f \in T(\mathbb{N})$ почти инъективным, если его сужение на некоторое подмножество с конечным дополнением в множестве $\mathbb{N}$ инъективно. Это означает, что число пар (x, y) различных натуральных чисел таких, что $f(x) = f(y)$, конечно, т.е. существует натуральное N такое, что для любых натуральных x, y , $x > y \geq N$ выполняется неравенство $f(x) \neq f(y)$.

Пусть $A \subset \mathbb{N}$. Будем говорить, что образ f почти содержится в A , если множество

$$\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \notin A\} = f^{-1}(\mathbb{N} \setminus A)$$

конечно.

ЛЕММА 2.2. 1) *Произведение почти инъекций есть почти инъекция.*

2) *Пусть $f, g, h \in T(\mathbb{N})$ – почти инъекции и множество $\{x \in \mathbb{N} \mid g(x) \neq h(x)\}$ бесконечно. Тогда $fg \neq fh$.*

3) *Пусть $f \in T(\mathbb{N})$ почти инъекция, $A \subset \mathbb{N}$, $g \in T(\mathbb{N})$ и образ g почти содержится в A . Тогда образ gf почти содержится в A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $f, g \in T(\mathbb{N})$ почти инъекции. Обозначим символом D множество всех натуральных чисел, прообраз каждого из которых относительно f содержит более одного элемента. Тогда D конечно. Рассмотрим множество

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \neq y, fg(x) = fg(y)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \neq y, g(x) = g(y)\} \\ &\cup \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \neq y, g(x) \neq g(y), f(g(x)) = f(g(y))\}. \end{aligned}$$

Первое множество в объединении конечно по определению почти инъекции, а второе содержится в

$$\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid g(x), g(y) \in D\} = g^{-1}(D) \times g^{-1}(D)$$

и поэтому конечно, так как прообраз конечного множества относительно почти инъективного отображения конечен. Итак, множество C конечно и поэтому fg – почти инъекция.

2) Существует натуральное N такое, что для всех $x, y \in \mathbb{N}$, $x > y \geq N$, имеет место неравенство $f(x) \neq f(y)$. Выберем натуральное M так, что для всех $x \in \mathbb{N}$, $x \geq M$, выполнены неравенства $g(x), h(x) \geq N$. Поскольку g, h отличаются в бесконечном количестве точек, существует натуральное $x \geq M$ такое, что $g(x) \neq h(x)$. Тогда $fg(x) \neq fh(x)$.

3) Рассмотрим множество $(gf)^{-1}(\mathbb{N} \setminus A) = f^{-1}(g^{-1}(\mathbb{N} \setminus A))$. Множество $g^{-1}(\mathbb{N} \setminus A)$ конечно, так как образ g почти содержится в A , а прообраз конечного множества относительно почти инъективного отображения конечен. Поэтому множество $(gf)^{-1}(\mathbb{N} \setminus A)$ конечно и получаем требуемое.

Определим следующие условия для полугруппы S .

УСЛОВИЕ 1. Полугруппа S – замкнутое подмножество в метрическом пространстве $(T(\mathbb{N}), \rho)$.

УСЛОВИЕ 2. Существуют бесконечные непересекающиеся множества $A, B \subset \mathbb{N}$ такие, что для любого отображения $f \in S$ в любой окрестности f найдутся почти инъективные $g, h \in S$, для которых образ g почти содержится в A и образ h почти содержится в B .

ЛЕММА 2.3. Если полугруппа S удовлетворяет условию 2, то для любых различных $w_1, w_2 \in F^m$ множество $A_{w_1 w_2}$ не содержит внутренних точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = (f_1, \dots, f_m) \in A_{w_1 w_2}$. Докажем, что f – не внутренняя точка $A_{w_1 w_2}$. Зафиксируем $N > 0$. Пусть $w_1 = uv_1$, $w_2 = uv_2$, где u – общий префикс, а слова v_1, v_2 начинаются с разных букв или одно из них пусто. По условию 2 существуют почти инъекции $g_i, h_i \in B_N(f_i)$, $1 \leq i \leq m$, такие, что образы g_i, h_i почти попадают в A и B соответственно. Пусть

$$l_i = \begin{cases} g_i, & \text{если } x_i \text{ не первая буква } v_2, \\ h_i, & \text{если } x_i \text{ первая буква } v_2, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m.$$

Тогда $l = (l_1, \dots, l_m) \in B_N(f)$. Докажем, что $v_1(l) \neq v_2(l)$. Есть две возможности.

1) Одно из слов v_1, v_2 пусто. Пусть пусто v_1 . По лемме 2.2, 1), 3) образ $v_2(l)$ почти содержится в B , т.е. является собственным подмножеством $\mathbb{N}$. Образ $v_1(l)$ равен $\mathbb{N}$ и поэтому $v_1(l) \neq v_2(l)$.

2) Оба слова v_1, v_2 не пусты и начинаются с различных букв. По лемме 2.2, 1), 3) образ $v_1(l)$ почти содержится в A , образ $v_2(l)$ почти содержится в B . Поскольку $A \cap B = \emptyset$, то $v_1(l)$ и $v_2(l)$ не совпадают на бесконечном множестве точек.

По лемме 2.2, 2) $w_1(l) \neq w_2(l)$; следовательно, $l \notin A_{w_1 w_2}$.

Сформулируем теперь основную теорему.

ТЕОРЕМА 2.1. Если S удовлетворяет условиям 1 и 2, то C_m есть множество второй категории, а его дополнение – первой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых различных $w_1, w_2 \in F_m$ по леммам 2.1 и 2.3 множество $A_{w_1 w_2}$ замкнуто и не содержит внутренних точек. Поэтому оно нигде не плотно в S^m . Тогда

$$\bigcup_{w_1, w_2 \in F_m, w_1 \neq w_2} A_{w_1 w_2}$$

– множество первой категории. По условию 1 пространство (S, ρ) полно, поскольку $(T(\mathbb{N}), \rho)$ полно. По теореме Бэра о категории [4] (S^m, ρ_m) есть множество второй категории, поэтому $C_m = S^m \setminus \bigcup_{w_1 \neq w_2} A_{w_1 w_2}$ – множество второй категории, а его дополнение – первой.

3. Примеры. 1. Рассмотрим вначале саму полугруппу $T(\mathbb{N})$. Для нее оказывается справедливой

ТЕОРЕМА 3.1. Полугруппа $T(\mathbb{N})$ обладает свойством типичности свободных подполугрупп.

2. Обозначим символом $O(\mathbb{N})$ подполугруппу $T(\mathbb{N})$, состоящую из всех возрастающих функций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, т.е. $f \in T(\mathbb{N})$ принадлежит $O(\mathbb{N})$, если $f(n) < f(n+1)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим метрическое пространство $(O(\mathbb{N}), \rho)$ с метрикой, индуцированной из $T(\mathbb{N})$. Умножение в $O(\mathbb{N})$ также непрерывно относительно ρ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Полугруппа $O(\mathbb{N})$ – замкнутое подмножество в $T(\mathbb{N})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что в $(T(\mathbb{N}), \rho)$ предел функций из $O(\mathbb{N})$ снова принадлежит $O(\mathbb{N})$. Это следует из того, что если $f_n \rightarrow f$, $n \rightarrow \infty$ в $(T(\mathbb{N}), \rho)$, то для всех $m \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера, все функции f_n принимают одинаковые значения на m .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Полугруппа $O(\mathbb{N})$ обладает свойством типичности свободных подполугрупп.

Аналогично показывается, что подполугруппа всех неубывающих функций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ и полугруппа всех инъективных преобразований $\mathbb{N}$ обладают свойством типичности свободных подполугрупп.

3. Пусть X – бесконечное подмножество $\mathbb{N}$. Обозначим

$$T_X = \{f \in T(\mathbb{N}) \mid f(\mathbb{N}) \subset X\}.$$

Легко видеть, что T_X – замкнутая подполугруппа $T(\mathbb{N})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Полугруппа T_X обладает свойством типичности свободных подполугрупп.

СЛЕДСТВИЕ 1. Полугруппа $T(\mathbb{N})$ содержит континуальное семейство подполугрупп, каждая из которых обладает свойством типичности свободных подполугрупп.

4. Во всех предыдущих примерах утверждалось, что свободных подполугрупп много, но не было приведено ни одного примера свободной подполугруппы. Предъявим явный пример свободной подполугруппы в $T(\mathbb{N})$.

Определим $f_0, f_1 \in T(\mathbb{N})$ следующим образом:

$$f_0(n) = 2n, \quad f_1(n) = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.2. Функции f_0, f_1 порождают свободную подполугруппу ранга 2 в $O(\mathbb{N})$.

Аналогично показывается, что преобразования $g_0, \dots, g_{m-1}$, заданные формулами

$$g_i(n) = mn + i, \quad 0 \leq i < n,$$

порождают свободную подполугруппу $O(\mathbb{N})$ ранга m .

Отметим, что результаты этой статьи можно перенести на полугруппу $PT(\mathbb{N})$ всех частично определенных преобразований множества $\mathbb{N}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. D. Dixon, *Bull. London Math. Soc.*, **22**:3 (1990), 222–226. [2] А. С. Олийнык, *Матем. заметки*, **63**:2 (1998), 248–259. [3] W. Hołubowski, *Semigroup Forum*, **66**:2 (2003), 231–235. [4] Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян, *Общая топология*, Высшая школа, М., 1979.

В. В. Дорошенко

Киевский национальный университет
им. Т. Г. Шевченко, Украина
E-mail: dvadim@univ.kiev.ua

Поступило

31.01.2006

Исправленный вариант

03.06.2009