Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Джумадильдаев, О формуле Гессе–Мюра для определителя матрицы вида $A^{n-1}B^2$, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 456–457

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8677>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:33:40

О формуле Гессе–Мюра для определителя матрицы вида $A^{n-1}B^2$

А. С. Джумадильдаев

В [1] Гессе приводит тождество

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & x_1 \\ b & c & x_2 \\ x_1 & x_2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b & x_1 \\ b & c & x_2 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b & x_1 \\ b & c & x_2 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b & y_1 \\ b & c & y_2 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

В [2] Мюр обобщает этот результат. Он показывает, что для любой $n \times n$ -симметрической матрицы $A = (a_{i,j})$ и для любой $n \times n$ -матрицы $B = (x_{i,j})$ имеет место следующая формула для детерминантов:

$$|A^{n-1}B^2| = (-1)^n \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} A & x_1^t \\ x_1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A & x_1^t \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} A & x_1^t \\ x_n & 0 \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} A & x_n^t \\ x_1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A & x_n^t \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} A & x_n^t \\ x_n & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ – i -я строка матрицы B и x_i^t – эта строка, написанная в виде столбца.

В нашей заметке мы даем простое доказательство этого факта для любой, не обязательно симметрической, матрицы A .

ТЕОРЕМА. Формула (1) верна для любых $n \times n$ -матриц A и B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим правую часть формулы (1) через F . Для матрицы A обозначим через $\text{adj } A = (a_{j,i})$ ее присоединенную матрицу и через A^t – ее транспозицию.

Для любой строки u и столбца v длины n и для любого скаляра λ , справедлива формула

$$\begin{vmatrix} A & v \\ u & \lambda \end{vmatrix} = \lambda|A| - u(\text{adj } A)v$$

(см. [2; теорема 3.1.3]). Поэтому

$$\begin{vmatrix} A & x_i^t \\ x_j & 0 \end{vmatrix} = -x_j(\text{adj } A)x_i^t.$$

Значит,

$$F = |G|,$$

где

$$G = \begin{pmatrix} x_1(\text{adj } A)x_1^t & x_2(\text{adj } A)x_1^t & \cdots & x_n(\text{adj } A)x_1^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(\text{adj } A)x_n^t & x_2(\text{adj } A)x_n^t & \cdots & x_n(\text{adj } A)x_n^t \end{pmatrix} = B(\text{adj } A)^t B^t.$$

Остается использовать известные формулы об определителях

$$|(\operatorname{adj} A)^t| = |\operatorname{adj} A| = |A|^{n-1}, \quad |B^t| = |B|,$$

чтобы заключить

$$F = |A|^{n-1}|B|^2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] О. Hesse, *Crelle's J.*, **49** (1855), 243–264. [2] Т. Muir, *Amer. J. Math.*, **4**:1–4 (1881), 273–275. [3] В. В. Прасолов, *Задачи и теоремы линейной алгебры*, Наука, М., 1996.

А. С. Джумадильдаев

Институт математики МОН Республики Казахстан

E-mail: askar@math.kz, askar56@hotmail.com

Поступило

14.12.2009