Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Малыхин, Усредненный модуль непрерывности
и скобочная компактность, *Матем. заметки*, 2010,
том 87, выпуск 3, 468–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8678>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:32:18

Усредненный модуль непрерывности и скобочная компактность

Ю. В. Малыхин

1. Определения. Пусть f – ограниченная измеримая функция $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Усредненным модулем непрерывности функции f порядка $\delta > 0$ называется величина

$$\tau(f, \delta) = \int_{\mathbb{T}} \left(\sup_{|x-t| \leq \delta/2} f(x) - \inf_{|x-t| \leq \delta/2} f(x) \right) dt.$$

Модуль τ был введен Сендовым и Поповым. В их книге [1] устанавливается связь τ с погрешностью односторонних приближений. В частности, ими доказывается, что величина наилучшего одностороннего приближения функции f тригонометрическими полиномами степени не выше n в метрике L_1

$$E_{[]} (f, \mathcal{T}_n) := \inf \{ \|P - Q\|_1 : P(x) \leq f(x) \leq Q(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{T}, P, Q \in \mathcal{T}_n \}$$

удовлетворяет аналогу неравенства Джексона:

$$E_{[]} (f, \mathcal{T}_n) \leq 120 \cdot \tau \left(f, \frac{1}{n} \right).$$

Также отметим простое утверждение о том, что функция сколько угодно хорошо односторонне приближается непрерывными функциями в L_1 , если и только если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tau(f, \delta) = 0$$

(все это равносильно интегрируемости по Риману).

Возможность сколь угодно точного одностороннего приближения класса конечными множествами означает компактность в некотором смысле. Поскольку одностороннее приближение соответствует покрытию множествами

$$[P, Q] = \{f : P(x) \leq f(x) \leq Q(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{T}\},$$

называемыми в англоязычной литературе “скобками” (brackets), будем употреблять термин “скобочная компактность”, или “[]-компактность”. Дадим формальное определение.

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторый класс измеримых функций $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых конечен интеграл $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{T}} |f(x)| dx$. Класс $\mathcal{F}$ назовем []-компактным, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $N \in \mathbb{N}$ и функции $P_i, Q_i, i = 1, 2, \dots, N$, такие, что

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^N [P_i, Q_i] \quad \text{и} \quad \|P_i - Q_i\|_1 < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

2. Связь τ и скобочной компактности. Мы установим критерий []-компактности в случае, когда $\mathcal{F}$ инвариантен относительно сдвигов, т.е. из $f(\cdot) \in \mathcal{F}$ и $h \in \mathbb{T}$ следует $f(\cdot - h) \in \mathcal{F}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ ОФИ-М 09-01-12173 и 08-01-0028), и Программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3810.2008.1).

ТЕОРЕМА. Класс $\mathcal{F}$, инвариантный относительно сдвигов, является $[\cdot]$ -компактным, если и только если выполнены следующие условия:

- $\mathcal{F}$ равномерно ограничен: $\sup_{f \in \mathcal{F}, x \in \mathbb{T}} |f(x)| < \infty$;
- усредненные модули непрерывности функций из $\mathcal{F}$ равномерно стремятся к нулю:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{f \in \mathcal{F}} \tau(f, \delta) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}$ $[\cdot]$ -компактен. Установим равномерную ограниченность. Пусть для какого-либо $\varepsilon > 0$ класс $\mathcal{F}$ покрывается N множествами $[P_i, Q_i]$. Покажем, что

$$|f| \leq N \max_{i=1, \dots, N} \max(\|P_i\|_1, \|Q_i\|_1).$$

Предположим, что $f(x_0) > C$. В силу инвариантности $\mathcal{F}$ относительно сдвигов существуют множества $H_1, \dots, H_N \subset \mathbb{T}$ такие, что

$$f(\cdot - h) \in [P_i, Q_i] \quad \text{для} \quad h \in H_i \quad \text{и} \quad \bigcup_{i=1}^N H_i = \mathbb{T}.$$

Найдется i_0 такой, что $\mu^*(H_{i_0}) \geq 1/N$. Очевидно, $Q_{i_0} > C$ на множестве $x_0 + H_{i_0}$, откуда $\int_{\mathbb{T}} |Q_{i_0}| dx \geq C/N$, т.е.

$$C \leq N \|Q_{i_0}\|_1.$$

Аналогично значения f оцениваются снизу через $\|P_i\|_1$.

Установим равномерное стремление к нулю $\tau(f, \delta)$. Предположим, оно не имеет места: существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_n > 0$, $f_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \dots$ такие, что $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, но $\tau(f_n, \delta_n) > \varepsilon_0$. В силу равномерной ограниченности мы можем считать, что $|f| \leq 1$ для $f \in \mathcal{F}$. Предположим, для нашего класса выполнено (1) с $\varepsilon = \varepsilon_0^3/130$ и некоторым $N < \infty$. Выведем отсюда противоречие.

Неравенства $|f| \leq 1$ и $\tau(f, \delta) > \varepsilon_0$ влекут

$$\mu \left\{ x \in \mathbb{T} : \exists x', x'' \in \left(x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2} \right) \quad f(x'') - f(x') > \frac{\varepsilon_0}{2} \right\} > \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Если $y'' - y' > t$, то $y' \leq k \cdot t/2 < (k+1) \cdot t/2 \leq y''$ для некоторого целого k . В нашем случае $y' = f(x')$, $y'' = f(x'')$, $t = \varepsilon_0/2$, поэтому $y', y'' \in [-1, 1]$ и k может принимать не более $8/\varepsilon_0$ значений. Получаем

$$\mu \left\{ x : \exists x', x'' \in \left(x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2} \right) \quad f(x') \leq \frac{k\varepsilon_0}{4} < \frac{(k+1)\varepsilon_0}{4} \leq f(x'') \right\} > \frac{\varepsilon_0^2}{32} \quad (2)$$

для некоторого $k \in \mathbb{Z} \cap [-4/\varepsilon_0, 4/\varepsilon_0 - 1]$.

Применяя рассуждения из предыдущего абзаца к f_n , получим, что для подходящих k_n выполнены неравенства (2) с $f = f_n$. Переходя в последовательности $\{f_n\}$ к подпоследовательности, можно считать, что индекс k_n у всех одинаковый: $k_n = k_0$, $n = 1, 2, \dots$. Обозначим $\alpha = k_0 \cdot \varepsilon_0/4$, $\beta = (k_0 + 1) \cdot \varepsilon_0/4$. Итак, мы получили, что множества

$$A_n = \left\{ x : \exists x', x'' \in \left(x - \frac{\delta_n}{2}, x + \frac{\delta_n}{2} \right) \quad f_n(x') \leq \alpha < \beta \leq f_n(x'') \right\}$$

имеют меру $\mu(A_n) > \varepsilon_0^2/32$.

Воспользуемся инвариантностью относительно сдвигов:

$$f_n(\cdot - h) \in [P_i, Q_i] \quad \text{при} \quad i \in H_i^{(n)} \quad \text{и} \quad \bigcup_{i=1}^N H_i^{(n)} = \mathbb{T} \quad \text{для всех} \quad n.$$

Выберем индекс $i = i(n)$ такой, что $\mu^*(H_i^{(n)} \cap [0, \delta_n]) \geq \delta_n/N$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что индекс i для всех n один и тот же: $i(n) = i_0$.

Поскольку $\mu(A_n) \geq \varepsilon_0^2/32$, то же неравенство верно для меры множества

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Мы покажем, что $P_{i_0}(x) \leq \alpha < \beta \leq Q_{i_0}(x)$ для п.в. $x \in A$, откуда

$$\|P_{i_0} - Q_{i_0}\|_1 \geq (\beta - \alpha) \cdot \frac{\varepsilon_0^2}{32} = \frac{\varepsilon_0^3}{128},$$

что даст противоречие.

Возьмем $B = \{x: P(x) \leq \alpha\}$. Если $\mu(A \setminus B) > 0$, то найдется точка плотности $x_0 \in A \setminus B$; для нее существует $\gamma_0 > 0$ такое, что

$$\mu\left(\left(x_0 - \frac{\gamma}{2}, x_0 + \frac{\gamma}{2}\right) \cap (A \setminus B)\right) > \gamma\left(1 - \frac{1}{4N}\right) \quad \text{для всех } \gamma \in (0, \gamma_0). \quad (3)$$

По условию $\delta_n \rightarrow 0$; значит, $\delta_n < \gamma_0/3$ при $n > n_0$. Так как $x_0 \in A$, то $x_0 \in A_n$ для некоторого $n > n_0$. Значит, $f_n(x_1) \leq \alpha$ для некоторого $x_1 \in (x_0 - \delta_n/2, x_0 + \delta_n/2)$, откуда

$$P_{i_0}(x) \leq \alpha \quad \text{для } x \in x_1 + H_{i_0}^{(n)}.$$

Обозначим $\tilde{H} = x_1 + (H_{i_0}^{(n)} \cap [0, \delta_n])$ и возьмем $\gamma = 3\delta_n$. Имеем $\tilde{H} \subset (x_0 - \gamma/2, x_0 + \gamma/2)$, $\tilde{H} \subset B$ и $\mu^*(\tilde{H}) \geq \delta_n/N = \gamma \cdot (1/(3N))$ в силу выбора i_0 . Но это противоречит (3). Значит, $P(x) \leq \alpha$ для п.в. $x \in A$; аналогично доказывается неравенство $Q(x) \geq \beta$. Необходимость условий доказана.

Установим $[\cdot]$ -компактность равномерно ограниченного класса с равномерно стремящимися к нулю усредненными модулями непрерывности (инвариантность можно не требовать). Рассмотрим множество K_n функций, постоянных на полуинтервалах $[k/n, (k+1)/n)$. Погрешность одностороннего приближения

$$E_{[\cdot]}(\mathcal{F}, K_n) := \sup_{f \in \mathcal{F}} E_{[\cdot]}(f, K_n)$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Класс $K_n \cap \{f: |f| \leq C\}$ является, как легко проверить, $[\cdot]$ -компактным. Из этих двух утверждений следует $[\cdot]$ -компактность $\mathcal{F}$.

3. Равномерный закон больших чисел. В теории вероятностей $[\cdot]$ -компактность используется как достаточное условие сходимости эмпирических процессов, в частности, равномерного закона больших чисел (РЗБЧ).

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины; пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс функций f с $E|f(X_1)| < \infty$. В силу закона больших чисел для каждой $f \in \mathcal{F}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) - Ef(X_1) \right| \rightarrow 0 \quad \text{п.в.,}$$

РЗБЧ означает, что сходимость равномерна по $f \in \mathcal{F}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) - Ef(X_1) \right| = 0 \quad \text{п.в.} \quad (4)$$

Обозначим через μ распределение X_i , $\mu(A) := P(X_1 \in A)$. Хорошо известно (см., например, [2; гл. 2.4]) следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если $\mathcal{F}$ $[\]$ -компактен в $L_1(\mu)$, то для него выполнен РЗБЧ (4).

Обычная компактность в L_1 , конечно, не достаточна для РЗБЧ. С другой стороны, $[\]$ -компактность не является необходимой. Класс характеристических функций последовательности независимых множеств A_n меры $\mu(A_n) = 1/n$ удовлетворяет условию (4), но не является $[\]$ -компактным (пример взят из [3; гл. 7.1]). Мы приведем в определенном смысле более сильный пример.

Везде далее будем говорить о РЗБЧ для класса множеств, имея в виду класс соответствующих характеристических функций.

Первыми вопрос о выполнении РЗБЧ для произвольного семейства множеств рассмотрели Вапник и Червоненкис [4]. Ими было получено достаточное условие для РЗБЧ в комбинаторных терминах. Именно, если $\mathcal{A}$ – семейство множеств, и для некоторого $d \in \mathbb{N}$ выполнено условие

$$\forall B \quad |B| > d \implies (\exists B' \subset B \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad A \cap B \neq B')$$

($|B|$ – мощность множества B), то для $\mathcal{A}$ имеет место РЗБЧ (при любом распределении X_i). Максимальное такое d называют VC-размерностью $\mathcal{A}$.

ПРИМЕР. Пусть $\mathcal{A}$ – семейство сдвигов на $\mathbb{T}$ множества $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Тогда $\mathcal{A}$ имеет VC-размерность 1, но не является $[\]$ -компактным по лебеговой мере.

Условие на VC-размерность легко проверяется. Некомпактность сразу следует из теоремы, поскольку модуль τ везде равен 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Б. Сендов, В. Попов, *Усредненные модули гладкости*, Мир, М., 1988. [2] A. W. van der Vaart, J. A. Wellner, *Weak Convergence and Empirical Processes*, Springer Ser. Statist., Springer-Verlag, New York, NY, 1996. [3] R. M. Dudley, *Uniform Central Limit Theorems*, Cambridge Stud. Adv. Math., **63**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999. [4] В. Н. Вапник, А. Я. Червоненкис, *ТВП*, **16:2** (1971), 264–279.

Ю. В. Малыхин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: jura05@narod.ru

Поступило

01.09.2009