Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Дж. Муллани, Двойные пространства Фано с большим сингулярным локусом, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 472–476

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8679>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 10:47:26

Двойные пространства Фано с большим сингулярным локусом

Р. Дж. Муллани

1. Формулировка основного результата. Всюду в дальнейшем предполагается, что $m \geq 6$ – целое фиксированное число. Выберем линейное подпространство $P \subset \mathbb{P}^m$ коразмерности k такое, что выполняется неравенство $m \leq k(k-3)/2 + 2$. Пусть $W = W_{2m} \subset \mathbb{P}^m$ – порождающая гиперповерхность, сингулярная в каждой точке линейного подпространства P (такая, что $P = \text{Sing } W$ – геометрическое место (локус) двойных точек порождающей гиперповерхности W). Ясно, что если выбрать уравнения $x_0 = \dots = x_{k-1} = 0$ для P и координаты $x_k, \dots, x_m$ на плоскости, то W задается уравнением

$$f(x_*) = \sum_{i,j=0}^{k-1} x_i x_j h_{ij}(x_*) = 0,$$

где $h_{ij}(x_*) = h_{ji}(x_*)$ – однородные полиномы степени $2m-2$ относительно $x_0, \dots, x_m$. Пусть $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^m \supset W_{2m}$ – двойное пространство индекса 1, разветвленное над W , которое можно определить явным образом как гиперповерхность, задаваемую уравнением

$$x_{m+1}^2 = f(x_0, \dots, x_m)$$

в весовом проективном пространстве $\mathbb{P}^{m+1}(1, \dots, 1, m)$.

Многообразие V является факторным m -мерным многообразием с сингулярным локусом $P^* = \pi^{-1}(P)$. Кроме того, V – многообразие Фано индекса 1, т.е. $\text{Pic } V = \mathbb{Z}K_V$, где $K_V = -\pi^*H$ и H – класс гиперплоскости в $\mathbb{P}^m$. Эти свойства многообразия V следуют из того, что двойное накрытие $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^m$ может быть продолжено в двойное накрытие $\pi^+: V^+ \rightarrow \mathbb{P}^m$, где $\varphi: V^+ \rightarrow V$ и $\tilde{\varphi}: \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^m$ – раздутья подпространств P^* и P . Так как W является порождающей гиперповерхностью, ее строгое преобразование $\tilde{W} \subset \mathbb{P}^m$ гладкое и, таким образом, V^+ тоже гладкое. Теперь основной результат этой работы можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА. *Многообразие V бирационально супержесткое.*

СЛЕДСТВИЕ. (i) *Невозможно расслоить многообразие V на равнолинейчатые многообразия с помощью некоторого нетривиального рационального отображения.*

(ii) *Многообразие V нерационально.*

(iii) *Группы бирациональных и бирегулярных отображений в себя совпадают: $\text{Bir } V = \text{Aut } V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Теория бирациональной жесткости восходит к классической работе [1] Исковского и Манина о трехмерных квадраках. Основные определения этой теории даны в работе [2]. Из вышеприведенной теоремы следует, что для любой подвижной линейной системы Σ на V ее виртуальный порог канонического присоединения $c_{\text{virt}}(\Sigma, V)$ равен порогу $c(\Sigma, V)$ на V . В силу этого равенства утверждения следствия доказываются стандартным образом [2].

Перечислим существующие результаты, тесно связанные с тематикой данной работы.

ПРИМЕР. (i) При $m \geq 3$ гладкое двойное пространство $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^m \supset W_{2m}$ индекса 1, разветвленное над гладкой гиперповерхностью W степени $2m$, является бирационально супержестким (см. [3]).

(ii) Предположения пункта (i) сохраняются, но W имеет единственную особенность в точке $x \in W$, $\text{mult}_x W = 2l$, $l \leq m-2$, а касательный конус $T_x W$ определяет гладкую

гиперповерхность степени $2l$ в проективном пространстве $\mathbb{P}(T_x \mathbb{P}^m) \cong \mathbb{P}^{m-1}$. Тогда многообразие V бирационально супержесткое (см. [4]). Для случая $m = 3$ предполагается, что W *максимально порождающее* (более подробное изложение дано в [4; предложение 1]).

(iii) Предположения пункта (i) сохраняются, но W имеет кратные изолированные особенности, каждая из которых удовлетворяет условиям пункта (ii). Тогда V бирационально супержесткое (см. [5]).

(iv) Бирациональная геометрия трехкратных двойных пространств с двойной линией оказывается более сложной, поскольку эти пространства могут расслаиваться на поверхности дель Пеццо (см. [6]).

2. План и начало доказательства. Пусть V – не супержесткое многообразие. По определению это значит, что можно зафиксировать некоторую подвижную линейную систему $\Sigma \subset |-nK_V|$ такую, что

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) < c(\Sigma, V) = n.$$

Из стандартных рассуждений теории бирациональной жесткости [2] следует, что линейная система Σ имеет максимальную сингулярность, т.е. для некоторого неприводимого исключительного дивизора $E^\sharp \subset V^\sharp$ на некоторой модели $\psi: V^\sharp \rightarrow V$ многообразия V выполняется неравенство Нётер–Фано:

$$\text{ord}_{E^\sharp} \psi^*(\Sigma) > na(E^\sharp).$$

Иначе говоря, пара $(V, \Sigma/n)$ не является канонической, а $E^\sharp$ – некоторая неканоническая особенность этой пары. Пусть $B = \psi(E^\sharp)$ – ее центр на V . Теперь, рассуждая как в работе [2], исключим возможность того, что $B \not\subset P^* = \text{Sing } V$: если $\text{codim } B = 2$, то можно дословно повторить доказательство, приведенное в [2; гл. 2, предложение 2.9], так как $\text{codim } P^* \geq 5$. Иначе говоря, $\text{codim } B \geq 3$, и проводя вычисления для точки, порождающей B , которая не является сингулярной на V , получим неравенство

$$\text{mult}_B Z > 4n^2 \tag{1}$$

для самопересечения $Z = (D_1 \circ D_2)$ линейной системы Σ (подробное изложение дано в [2; гл. 2, теорема 2.2]). Неравенство (1) невозможно, так как $\deg Z = 2n^2$. Следовательно, можно считать, что $B \subset \text{Sing } V = P^*$.

3. Максимальные особенности над подмногообразием в сингулярном локусе. Выше было показано, что так как W – порождающая гиперповерхность, раздутие $\varphi: V^+ \rightarrow V$ сингулярного локуса P^* является гладким многообразием с исключительным дивизором $E^+ = \varphi^{-1}(P^*)$. Подмногообразием E^+ гладкое, и $\varphi_{E^+}: E^+ \rightarrow P^* \cong P$ – его расслоение на квадратики. В обозначениях, принятых выше,

$$h_{ij}(x_0, \dots, x_m) = P_{ij}(x_k, \dots, x_m) + h_{ij}^+,$$

где каждый член однородных многочленов h_{ij}^+ содержит по крайней мере одну из переменных $x_0, \dots, x_{k-1}$. В этих обозначениях, можно идентифицировать слой расслоения φ_{E^+} над точкой $(0 : \dots : 0 : a_k : \dots : a_m)$ как квадратичную гиперповерхность

$$x_{m+1}^2 = \sum_{i,j=0}^{k-1} x_i x_j P_{ij}(a_k, \dots, a_m).$$

В нашем дальнейшем доказательстве основные технические трудности возникают из-за того, что некоторые слои в E^+/P^* могут быть сингулярными. Поэтому, чтобы закончить доказательство, мы должны в точности понять, до какой степени слои квадратики могут вырождаться.

Заметим, что если $B = P^*$ является полным сингулярным локусом, то можно использовать рассуждения, почти идентичные рассуждениям в гладком случае: изменяя доказательство, приведенное в работе [2], придем к неравенству $\text{mult}_B Z > 4n^2$ для самопересечения $Z = (D_1 \circ D_2)$ линейной системы Σ , а затем придем к противоречию, как и в [2].

К сожалению, этот подход нельзя применить и в случае произвольного подмногообразия $B \subset P^*$. Дело в том, что, раздувая B , а затем центр максимальной особенности на раздутии, и так далее, мы получим последовательность сингулярных многообразий, особенности которых трудно исследовать. Поэтому, нужен другой подход.

Во-первых, пусть $\Pi \subset \mathbb{P}^m$ – порождающее линейное подпространство размерности $\text{codim } B \geq 6$, $V_\Pi = \pi^{-1}(\Pi)$ – соответствующее двойное накрытие, и $\Sigma_\Pi = \Sigma|_{V_\Pi}$ – подвижная линейная система, определенная как сужение линейной системы Σ на V_Π . Так как Π – порождающая гиперповерхность, то пара $(V_\Pi, \Sigma_\Pi/n)$ является канонической, т.е. Σ_Π имеет максимальную особенность, центр которой является точкой сингулярного локуса $P^* \cap V_\Pi$; именно, одной из точек пересечения $B \cap V_\Pi$. Следовательно, задача свелась к случаю, в котором центр максимальной особенности оказывается точкой сингулярного локуса. Чтобы изучить этот случай, нам надо исследовать вырожденные слои многообразия E^+ над $P^* \cong P$.

4. Вырождающиеся квадрики. Пусть S – пространство симметричных $k \times k$ -матриц с $\mathbb{C}$ -элементами, это пространство имеет размерность $k(k+1)/2$, и пусть $\mathbf{S}$ – пространство симметричных $k \times k$ -матриц, элементы которых являются однородными полиномами степени $2m-2$ относительно $x_k, \dots, x_m$. Так как число мономов степени n относительно r переменных равно $\binom{n+r-1}{n}$, то пространство $\mathbf{S}$ имеет размерность

$$\frac{k(k+1)}{2} \binom{3m-k-2}{2m-2}.$$

Пусть (p, A) – элемент пространства $\mathbb{P}^{m-k} \times \mathbf{S}$, в котором $\mathbb{P}^{m-k}$ идентифицируется с P^* . Заметим, что ранг $\text{rk } A(p)$ не зависит от выбора координат переменной p : если координаты $(a_k, \dots, a_m)$ заменить на $(\lambda a_k, \dots, \lambda a_m)$, то $A(a_k, \dots, a_m)$ заменяется на $\lambda^{2m-2} A(a_k, \dots, a_m)$, так что ранг матрицы остается тем же и, следовательно, $\text{rk } A(p)$ вполне определен для $p \in \mathbb{P}^{m-k}$. Введем

$$\mathbf{X}_e = \{(p, A) \mid \text{rk } A(p) \leq k - e\} \subset \mathbb{P}^{m-k} \times \mathbf{S}$$

и положим

$$\mathbf{X}_e(A) = \{p \in \mathbb{P}^{m-k} \mid \text{rk } A(p) \leq k - e\}$$

для $A \in \mathbf{S}$ и

$$\mathbf{X}_e(p) = \{A \mid \text{rk } A(p) \leq k - e\}$$

для $p \in \mathbb{P}^{m-k}$.

ЛЕММА 1. Если $e(e+1)/2 \geq m - k + 1$, то для порождающего элемента $A \in \mathbf{S}$ имеем $\mathbf{X}_e(A) = \emptyset$, т.е. для любого $p \in \mathbb{P}^{m-k}$ выполняется неравенство $\text{rk } A(p) \geq k - e + 1$.

Доказательство этой леммы очевидным образом получается из следующего утверждения.

ЛЕММА 2. Для любого $e \geq 0$ существует непустое открытое подмножество Зарицкого $U \subset \mathbf{S}$ такое, что для $A \in U$ выполняется равенство

$$\text{codim}(\mathbf{X}_e(A) \subset \mathbb{P}^{m-k}) = \min \left\{ \frac{e(e+1)}{2}, m - k + 1 \right\}.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{X}_e(A) = \mathbf{X}_e \cap (\mathbb{P}^{m-k} \times \{A\}).$$

Пространства $\mathbb{P}^{m-k} \times \{A\}$ являются как раз слоями проектирования $\mathbb{P}^{m-k} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$. Можно считать, что ограничивающее проектирование $\mathbf{X}_e \rightarrow \mathbf{S}$ сюръективно, поскольку если оно не сюръективно, то существует $A \in \mathbf{S}$ такое, что $\mathbf{X}_e(A) = \emptyset$, т.е. для всех $p \in \mathbb{P}^{m-k}$ выполняется неравенство $\text{rk } A(p) \geq k - e + 1$, и больше ничего доказывать не нужно. Поэтому дальнейшее доказательство этой леммы очевидным образом получается из следующего утверждения.

ЛЕММА 3. *Выполняется следующее равенство:*

$$\text{codim}(\mathbf{X}_e \subset \mathbb{P}^{m-k} \times \mathbf{S}) = \frac{e(e+1)}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим замкнутое алгебраическое множество $\mathbf{X}_e(p) = \mathbf{X}_e \cap (\{p\} \times \mathbf{S})$. Таким образом, имеем $\dim \mathbf{X}_e = \dim \mathbf{X}_e(p) + (m - k)$, и завершение доказательства получается из следующего утверждения.

ЛЕММА 4. *Выполняется следующее равенство:*

$$\text{codim}(\mathbf{X}_e(p) \subset \mathbf{S}) = \frac{e(e+1)}{2}.$$

Доказательство. Пусть

$$S_e = \{M \in S \mid \text{rk } M \leq k - e\}.$$

Хорошо известно, что $\text{codim}(S_e \subset S) = e(e+1)/2$. Для $p = (a_k : \dots : a_m) \in \mathbb{P}^{m-k}$ введем обозначение $\bar{p} = (a_k, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^{m-k+1}$ и рассмотрим отображение $\{\bar{p}\} \times \mathbf{S} \rightarrow S$, которое определяется вычислением матрицы $A \in \mathbf{S}$ в $\bar{p}$. Ясно, что это отображение сюръективно, и все слои имеют одинаковую размерность и гладкие: координаты выбираются так, чтобы $p = (1 : 0 : \dots : 0)$ при координатах $x_k, \dots, x_m$. Тогда для любого $M \in S$ прообразом будет $\{\bar{p}\} \times (Mx_k^{2m-2} + N)$, где $N \subset \mathbf{S}$ — подпространство матриц, элементы которых не содержат мономов x_k^{2m-2} , а размер слоя равен

$$\Delta = \frac{k(k+1)}{2} \left(\binom{3m-k-2}{2m-2} - 1 \right).$$

Теперь из сказанного ранее следует, что $\mathbf{X}_e(\bar{p}) = \mathbf{X}_e(p)$. Рассмотрим отображение ограничения $\mathbf{X}_e(\bar{p}) \rightarrow S_e$. Тогда, так как это отображение сюръективно, получим $\dim \mathbf{X}_e(\bar{p}) = \dim S_e + \Delta$. что и требовалось доказать в данной лемме.

Напомним, что $\varphi_{E^+} : E^+ \rightarrow P^* \cong P$ — расслоение на квадратики. Теперь элементы пространства квадратичных форм, т.е.

$$x_{m+1}^2 = \sum_{i,j=0}^{k-1} x_i x_j P_{ij}(x_k, \dots, x_m)$$

относительно $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{m+1}$ с переменными коэффициентами $P_{ij}(x_*)$, имеют соответствующие симметричные $(k+1) \times (k+1)$ матрицы, которые очевидным образом находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами пространства $\mathbf{S}$. Следовательно, при заданном выборе P_{ij} , т.е. при заданном выборе W , мы получаем соответствующую матрицу $A \in \mathbf{S}$. Следовательно, подпространство в P^* , над которым квадратичные формы имеют ранг $\leq k+1-e$ можно идентифицировать с пространством $\mathbf{X}_e(A)$, и из лемм 1 и 2 следует, что это пространство либо пусто, либо имеет коразмерность $e(e+1)/2$. В п. 1 мы предположили, что $m \leq k(k-3)/2 + 2$. Из леммы 1 следует, что ранг любого слоя в φ_{E^+} превосходит 4, так как $\mathbf{X}_{k-3}(A) = \emptyset$.

5. Обращение присоединения. Теперь можно закончить доказательство нашей теоремы. Предположим, что ограниченная пара $(V_\Pi, \Sigma_\Pi/n)$ содержит точку $o \in B \cap V_\Pi$, которая является изолированным центром некоторой неканонической сингулярности, $\varphi: V_\Pi^+ \rightarrow V_\Pi$ – раздутие точки o и E^+ – исключительный дивизор $\varphi^{-1}(o)$, который рассматривается как квадратичная гиперповерхность в $\mathbb{P}^l$, где $\text{codim } B = l$. Далее, пусть D^+ – строгое преобразование $D \in \Sigma_\Pi$ на V_Π^+ . Существует $\mu \in \mathbb{Z}_+$ такое, что

$$D^+ \sim \varphi^* D - \mu E^+. \quad (2)$$

Рассмотрим пару $(V_\Pi, \Sigma_\Pi/n)$. Далее, рассуждаем как в работе [7] (см. также раздел 1 в [8]). Возьмем порождающую тройную плоскость $\Lambda \subset \Pi$, содержащую точку o . Положим $V_\Lambda = \pi^{-1}(\Lambda)$. Пусть Σ_Λ – сужение Σ на V_Λ . В силу обратного преобразования присоединения (см. [9], [10]) пара $V_\Lambda, \Sigma_\Lambda/n$ не является логарифмически канонической. Однако точка $o \in V_\Lambda$ – это невырожденная трехкратная квадратичная особенность. Рассуждая как в предложении 1.3 в работе [7] (или как в [11] в доказательстве предложения 3.10), приходим к выводу, что $\mu > n$.

Следовательно, $\text{mult}_o D > 2n$ в силу (2) и того, что E^+ квадратично. Однако степень D равна

$$\deg D = (D \cdot \pi^* H_\Pi^{l-1}) = 2n,$$

где H_Π – класс гиперповерхности в Π , так как V_Π – двойное накрытие и $D \sim n\pi^* H_\Pi$. Следовательно, получим $\text{mult}_o D > \deg D$, что невозможно. Это противоречие доказывает теорему.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Александру Пухликову за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Исковских, Ю. И. Манин, *Матем. сб.*, **86:1** (1971), 140–166. [2] А. В. Пухликов, *УМН*, **62:5** (2007), 15–106. [3] А. В. Пухликов, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52:1** (1988), 229–239. [4] А. В. Пухликов, *Алгебраическая геометрия – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **24**, ВИНТИ, М., 2001, 177–196. [5] И. А. Чельцов, *Матем. сб.*, **199:2** (2008), 131–148. [6] И. А. Чельцов, *Матем. сб.*, **195:10** (2004), 109–156. [7] A. Pukhlikov, *Birational Geometry of Singular Fano Varieties*, [arXiv:math.AG/0807.3886](https://arxiv.org/abs/math/0807.3886). [8] A. Pukhlikov, *Birational Geometry of Fano Double Spaces of Index Two*, [arXiv:math.AG/0812.3863](https://arxiv.org/abs/math/0812.3863). [9] В. В. Шокуров, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56:1** (1992), 105–203. [10] *Flips and Abundance for Algebraic Threefolds* (Salt Lake City, 1991), *Astérisque*, **211**, ed. J. Kollár, Soc. Math. France, Paris, 1992. [11] A. Corti, *Explicit Birational Geometry of 3-Folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 259–312.

Р. Дж. Муллани

University of Liverpool, Великобритания

E-mail: r.j.mullany@liv.ac.uk

Поступило

30.06.2009