Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Бояринов, О нулях дзета-функции Римана большой кратности, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 5, 652–657

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8684>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 11:23:34

О нулях дзета-функции Римана большой кратности

Р. Н. Бояринов

Получена новая верхняя оценка количества нулей дзета-функции Римана, имеющих заданную кратность и лежащих в заданном прямоугольнике критической полосы.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. Будем следовать обозначениям, определениям и схеме доказательства из работы [1]. Введем два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для положительного T , отличного от мнимой части нуля дзета-функции Римана $\zeta(s)$, через $N(T)$ обозначим число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$. Если T совпадает с ординатой нуля $\zeta(s)$, то положим $N(T) = 0.5(N(T+0) + N(T-0))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначая через $k(\rho)$ кратность нуля ρ , для целого $j \geq 1$ величину $N_j(T)$ положим равной числу различных нулей ρ дзета-функции с условием $k(\rho) = j$, ордината которых положительна и не превосходит T .

Известно (см. [2]), что если точка $T = \gamma$ является ординатой нулей $\rho_1, \dots, \rho_m$, то при переходе через эту точку функция $N(T)$ совершает скачок на величину, равную сумме кратностей этих нулей: $N(\gamma+0) - N(\gamma-0) = k(\rho_1) + \dots + k(\rho_m)$, а функция $\zeta(s)$ не имеет нулей с ординатой γ , кратность которых была бы выше $18 \ln |\gamma|$.

Фуджи в 1975 г. доказал [3] неравенство $N_j(T) \leq N(T) \exp(-c\sqrt{j})$, в котором c – положительная абсолютная постоянная, j – достаточно большое целое число, $T > T_0(j) > 0$.

Королёв [1] доказал несколько утверждений, уточняющих неравенство Фуджи.

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда для любого целого $j \geq 1$ имеет место оценка

$$N_j(T+H) - N_j(T) \leq e^{7.2}(N(T+H) - N(T)) \exp(-\varkappa_0 j),$$

где $\varkappa_0 = 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}/(e\sqrt{10B})$, $B = e^{37}\pi^{-2}$.

ТЕОРЕМА 2 [1]. При любом $j \geq 1$ и $T > T_0 > 0$ справедлива оценка

$$N_j(T) \leq c_1 N(T) \exp(-cj), \quad \text{где } c_1 = e^{7.3}, \quad c = e^{-30.3}.$$

Цель настоящей работы уточнить неравенства, полученные в теоремах 1 и 2. Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда для любого целого $j \geq j_0$ имеет место оценка

$$N_j(T+H) - N_j(T) \leq \frac{2\kappa e^{3.1}}{(1-e^{-3})^2} (N(T+H) - N(T)) \exp(-\kappa j),$$

где $\kappa = 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}/(3e\sqrt{B})$, $B = e^{37}\pi^{-2}$, $j_0 = (3 + 0.1\kappa + 2(1.5\varepsilon e)^{2/3})/\kappa$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неравенство из теоремы 3 при $H = X^\varepsilon$ справедливо для всех T из промежутка $(X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon)$, за исключением значений из некоторого множества, мера которого не превосходит $X^{1-0.01\varepsilon}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $H = T^{27/82+\varepsilon}$ для любого целого $j \geq j_0$ верно неравенство

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_j(T+H) - N_j(T)}{N(T+H) - N(T)} \leq \frac{2\kappa e^3}{(1-e^{-3})^2} \exp(-\kappa j),$$

где $\kappa = 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}/(3e\sqrt{B})$, $B = e^{37}\pi^{-2}$, $j_0 = (3 + 0.1\kappa + 2(1.5\varepsilon e)^{2/3})/\kappa$.

ТЕОРЕМА 4. При любом $j \geq 3.1/\alpha$ и $T > T_0 > 0$ справедлива оценка

$$N_j(T) \leq \beta N(T) \exp(-\alpha j), \quad \text{где } \alpha = \frac{\pi\sqrt{5}}{3} 10^{-5} e^{-19.5}, \quad \beta = \frac{2\alpha e^{3.2}}{(1-e^{-3})^2}.$$

2. Вспомогательные леммы. Всюду далее $S(t)$ – аргумент дзета-функции Римана. О простейших свойствах $S(t)$ можно прочесть в работе [2].

ЛЕММА 1. Пусть ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $x = T^{0.1\varepsilon}$, m – целое число, $1 \leq m < (\ln x)/192$, $x^{1/(4m)} < y \leq x^{1/m}$. Тогда имеет место оценка

$$\int_T^{T+H} \left(S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2m} dt < (e^{37}\pi^{-2}\varepsilon^{-3}m^2)^m H.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [1; с. 11].

ЛЕММА 2. Пусть ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $A > 0$, $T > T_0(\varepsilon, A) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $h = \pi A/(\ln(T/(2\pi)))$, m – целое число, $(\varepsilon^5 A^2/B)^{1/3} \leq m < (\ln x)/192$. Тогда имеет место оценка

$$I_m = \int_T^{T+H} (S(t+2h) - S(t))^{2m} dt < (9B\varepsilon^{-3}m^2)^m H, \quad B = e^{37}\pi^{-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y = x^{1/m}$ и обозначим через $U(t)$ следующий тригонометрический полином: $\sum_{p < y} a(p)p^{-0.5+it}$, $a(p) = p^{ih} \sin(h \ln p)$. Тогда разность $S(t+2h) - S(t)$ запишется в виде

$$\left(S(t+2h) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin((t+2h) \ln p)}{\sqrt{p}} \right) - \left(S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right) - \frac{1}{\pi} (U(t) + \overline{U}(t)).$$

Возводя это выражение в степень $2m$ и применяя к нему неравенство Гёльдера, приходим к соотношению $I_m \leq 3^{2m-1}(2J_1 + J_2)$, в котором

$$J_1 = \int_T^{T+H+2h} \left(S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2m} dt, \quad J_2 = \pi^{-2m} \int_T^{T+H} (U(t) + \overline{U}(t))^{2m} dt.$$

Тогда из леммы 1 получаем оценку $J_1 \leq (B\varepsilon^{-3}m^2)^m(H + 2h)$. Далее, интеграл J_2 представляется суммой

$$\pi^{-2m} \left(\binom{2m}{m} H S_m + 2\theta \sum_{\nu=0}^{2m} \binom{2m}{\nu} \sum_{P_\nu \neq Q_\nu} \frac{1}{\sqrt{P_\nu Q_\nu}} \left| \ln \frac{P_\nu}{Q_\nu} \right|^{-1} \right),$$

$$S_m = \sum_{P_m = Q_m} \frac{|a(p_1)|^2 \cdots |a(p_m)|^2}{\sqrt{P_m Q_m}},$$

в которой через P_ν , Q_ν обозначены произведения $p_1 \cdots p_\nu$ и $q_1 \cdots q_{2m-\nu}$ соответственно. Так как наибольшее из чисел P_ν , Q_ν при любом ν не превосходит y^{2m} , а общее количество пар (P_ν, Q_ν) не превосходит $(\pi(y))^{2m}$, верхней границей каждой из сумм по $P_\nu \neq Q_\nu$ служит величина $(y\pi(y))^{2m} < x^4 \leq H^{0.2}$. Поскольку число решений уравнения $p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m$ в простых числах $q_1, \dots, q_m$ при фиксированной левой части не превосходит $m!$, сумма S_m удовлетворяет следующей цепочке неравенств:

$$S_m \leq m! \left(\sum_{p < y} \frac{|a(p)|^2}{p} \right)^m = m! \left(\sum_{p < y} \frac{\sin^2(h \ln p)}{p} \right)^m \leq m! \left(h^2 \ln y \sum_{p < y} \frac{\ln p}{p} \right)^m$$

$$\leq m! (2h \ln y)^{2m} = m! \left(\frac{2\pi A}{\ln(T/(2\pi))} \frac{\varepsilon \ln T}{10m} \right)^{2m} \leq \left(\frac{\varepsilon A}{\sqrt{m}} \right)^{2m}.$$

Следовательно,

$$J_2 \leq \pi^{-2m} \left(\binom{2m}{m} H S_m + 2^{2m+1} H^{0.2} \right) \leq \pi^{-2m} \left(H \left(\frac{2\varepsilon A}{\sqrt{m}} \right)^{2m} + 2^{2m} H^{0.3} \right)$$

$$\leq 0.5 H \left(\frac{\varepsilon A}{\sqrt{m}} \right)^{2m} + 0.1 H \leq 0.5 (B\varepsilon^{-3}m^2)^m H + 0.1 H \leq 0.6 (B\varepsilon^{-3}m^2)^m H,$$

а

$$I_m \leq 3^{2m-1} (2(B\varepsilon^{-3}m^2)^m (H + 2h) + 0.6 (B\varepsilon^{-3}m^2)^m H) \leq (9B\varepsilon^{-3}m^2)^m H.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, A – любое положительное фиксированное число, $T > T_0(\varepsilon, A) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, а $D(\lambda)$ – множество тех значений t из промежутка $T \leq t \leq T + H$, для которых выполняется неравенство

$$|S(t + 2h) - S(t)| \geq \lambda.$$

Тогда при любом $\lambda \geq \lambda_0$ для меры этого множества справедлива следующая оценка:

$$\text{mes } D(\lambda) \leq e^2 H \exp(-\varkappa \lambda),$$

где $\varkappa = 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}/(3e\sqrt{B})$, $B = e^{37}\pi^{-2}$, $\lambda_0 = (2(\varepsilon^5 A^2/B)^{1/3} + 2)/\varkappa$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda > 18 \ln T$, то множество $D(\lambda)$ оказывается пустым (см. [1; с. 18]). Пусть $\lambda_0 \leq \lambda < 18 \ln T$. В этом случае возведем обе части неравенства $\lambda^{-1}|S(t+2h) - S(t)| \geq 1$ в степень $2m = 2[0.5\kappa\lambda]$ и проинтегрируем по множеству $D(\lambda)$. Получим

$$\text{mes } D(\lambda) \leq \lambda^{-2m} \int_T^{T+H} (S(t+2h) - S(t))^{2m} dt.$$

Поскольку целое число $m = [0.5\kappa\lambda]$ удовлетворяет условиям

$$m > 0.5\kappa\lambda - 1 \geq \left(\frac{\varepsilon^5 A^2}{B} \right)^{1/3},$$

$$m \leq 0.5\kappa(18 \ln T + 1) < 10\kappa \ln T < \frac{0.1\varepsilon \ln T}{192} = \frac{\ln x}{192},$$

к последнему интегралу можно применить лемму 2:

$$\text{mes } D(\lambda) \leq \lambda^{-2m} (9B\varepsilon^{-3}m^2)^m H = \left(\frac{2m}{e\kappa\lambda} \right)^{2m} \leq e^{-2m} H \leq e^2 H \exp(-\kappa\lambda).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, A – любое положительное фиксированное число, $T > T_0(\varepsilon, A) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $h = \pi A / \ln(T/(2\pi))$, $B = e^{37}\pi^{-2}$, $\kappa = 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}/(3e\sqrt{B})$, $j_0 = A + 0.1 + (2(\varepsilon^5 A^2/B)^{1/3} + 2)/\kappa$, а γ – ордината нуля $\zeta(s)$, $T \leq \gamma - h < \gamma \leq T + H$, и пусть промежуток $(\gamma - h, \gamma]$ содержит ровно ν ординат нулей, кратность каждого из которых равна j , $j \geq j_0$. Тогда для любого t из промежутка $(\gamma - 2h, \gamma - h)$ справедливо неравенство

$$S(t+2h) - S(t) \geq \nu j - A - 0.1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное число t , $\gamma - 2h < t < \gamma - h$. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ – все различные ординаты нулей $\zeta(s)$, попавшие в промежуток $(t, t+2h)$ и занумерованные в порядке возрастания. Для каждой величины γ_r через n_r обозначим сумму кратностей нулей, имеющих γ_r своей ординатой. Поскольку $\gamma - h > t$ и $\gamma < t+2h$, промежуток $(\gamma - h, \gamma]$ целиком содержится в промежутке $(t, t+2h)$. Но тогда из условия леммы следует, что в ряде $n_1, n_2, \dots, n_k$ найдется не менее ν чисел, больших или равных j . Пусть (a, b) – промежуток, целиком лежащий в $(t, t+2h)$ и не содержащий точек разрыва $S(t)$. Запишем разность значений $S(t)$ на концах этого промежутка с помощью формулы конечных приращений Лагранжа:

$$S(b) - S(a) = (b-a)S'(\xi) = -(b-a) \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\xi}{2\pi} + O\left(\xi^{-2}\right) \right), \quad \xi \in (a, b).$$

Так как $|\ln \xi - \ln T| \leq HT^{-1} \ll T^{-0.5}$, то

$$S(b) - S(a) = -(b-a) \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^{-0.5}) \right) = -(b-a)(A(2h)^{-1} + O(T^{-0.5})).$$

Пользуясь этим соотношением, преобразуем следующее тождество:

$$S(t+2h) - S(t) = S(\gamma_1 - 0) - S(t) + S(\gamma_1 + 0) - S(\gamma_1 - 0) + \dots$$

$$+ S(\gamma_k + 0) - S(\gamma_k - 0) + S(t+2h) - S(\gamma_k + 0).$$

Поскольку при переходе через точку $t = \gamma_r$ функция $S(t)$ совершает скачок, равный n_r , то $S(\gamma_r + 0) - S(\gamma_r - 0) = n_r$. Таким образом, имеем

$$S(t + 2h) - S(t) \geq n_1 + \dots + n_k - A + O(T^{-0.5}) \geq \nu j - A - 0.1.$$

Лемма доказана.

3. Доказательство теорем. Пусть $j_0 = A + 0.1 + (2(\varepsilon^5 A^2/B)^{1/3} + 2)/\varkappa$. Достаточно рассмотреть лишь случай $j_0 \leq j < 18 \ln(T+H)$, так как для $j > 18 \ln(T+H)$ величины $N_j(T)$ и $N_j(T+H)$ тождественно равны нулю. Пусть γ_1 — наибольшая из ординат нулей функции $\zeta(s)$ с кратностью, большей или равной j , лежащая в промежутке $(T, T+H]$. Возьмем $\Delta_1 = (\gamma_1 - h, \gamma_1]$ и обозначим γ_2 наибольшую из таких ординат, не попавших в Δ_1 , $\gamma_2 \leq \gamma_1 - h$. Положим $\Delta_2 = (\gamma_2 - h, \gamma_2]$ и определим тем же способом величины $\gamma_3, \gamma_4, \dots$ и промежутки $\Delta_3, \Delta_4, \dots$. Это построение мы продолжим до тех пор, пока на промежутке $(T, \gamma_k - h]$ не останется ординат нулей с указанным свойством или пока мы не получим ординату γ_k с условием $\gamma_k - h < T \leq \gamma_k$. Промежутки $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ попарно не пересекаются и имеют одинаковую длину h . Кроме того, в их объединении содержатся все ординаты нулей $\zeta(s)$, кратность которых больше или равна j . Построенные промежутки разобьем на классы $E_1, E_2, \dots$, относя к классу E_r те из них, которые содержат в точности r искомым ординат. Если k_r — число промежутков в классе с номером r , то справедливо следующее неравенство:

$$N_j(T+H) - N_j(T) \leq k_1 + 2k_2 + \dots + rk_r + \dots$$

Оценим каждую из величин k_r сверху. Пусть промежуток $\Delta = (\gamma - h, \gamma]$ принадлежит E_r . Положим тогда $\Delta' = (\gamma - 2h, \gamma - h)$. Согласно лемме 4 для любого t из Δ' справедливо неравенство $S(t+2h) - S(t) \geq rj - A - 0.1$. Таким образом, Δ' целиком содержится во множестве $D(rj - A - 0.1)$. Проведя такое построение для каждого элемента Δ из E_r , убеждаемся, что все k_r промежутков Δ' попарно не пересекаются, имеют одинаковую длину h и содержатся в $D(rj - A - 0.1)$. Следовательно, их общая длина не превосходит меры $D(rj - A - 0.1)$: $k_r h \leq \text{mes } D(rj - A - 0.1)$. Для оценки величины $\text{mes } D(rj - A - 0.1)$ воспользуемся леммой 3:

$$\text{mes } D(rj - A - 0.1) \leq e^2 H \exp(-\varkappa(rj - A - 0.1)),$$

$$\varkappa = \frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{3e\sqrt{B}}, \quad B = e^{37}\pi^{-2}, \quad j \geq j_0.$$

Следовательно, k_r не превосходит величины $Hh^{-1}e^{2+0.1\varkappa+\varkappa A} \exp(-\varkappa rj)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} N_j(T+H) - N_j(T) &\leq Hh^{-1}e^{2+0.1\varkappa+\varkappa A} \sum_{r=1}^{+\infty} r \exp(-\varkappa rj) \\ &= Hh^{-1}e^{2+0.1\varkappa+\varkappa A} \frac{e^{-\varkappa j}}{(1 - e^{-\varkappa j})^2} \leq \frac{Hh^{-1}e^{2+0.1\varkappa+\varkappa A}}{(1 - e^{-\varkappa j_0})^2} \exp(-\varkappa j) \\ &\leq \frac{2\varkappa \exp(2 + 0.2\varkappa)}{(1 - e^{-\varkappa j_0})^2} \frac{\exp(\varkappa A)}{\varkappa A} (N(T+H) - N(T)) \exp(-\varkappa j). \end{aligned}$$

Возьмем $A = 1/\varkappa$. Тогда $3 < \varkappa j_0 = 3 + 0.1\varkappa + 2(\varepsilon^5 A^2/B)^{1/3} < 3.1$. Поэтому

$$\begin{aligned} N_j(T+H) - N_j(T) &\leq \frac{2\varkappa \exp(3 + 0.2\varkappa)}{(1 - e^{-3})^2} (N(T+H) - N(T)) \exp(-\varkappa j) \\ &\leq \frac{2\varkappa e^{3.1}}{(1 - e^{-3})^2} (N(T+H) - N(T)) \exp(-\varkappa j). \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать, что верно неравенство

$$N_j(T+H) - N_j(T) \leq \frac{2\varkappa e^3(1 + O(T^{-0.2}))}{(1 - e^{-3})^2} (N(T+H) - N(T)) \exp(-\varkappa j).$$

Отсюда получаем

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_j(T+H) - N_j(T)}{N(T+H) - N(T)} \leq \frac{2\varkappa e^3}{(1 - e^{-3})^2} \exp(-\varkappa j).$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4 следует из теоремы 3. Будем считать, что $j \leq 18 \ln T$, поскольку при $j > 18 \ln T$ величина $N_j(T)$ тождественно равна нулю. Возьмем $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ и обозначим $\tau = T_0(\varepsilon)$. Далее, определим числа T_s , H_s , $s = 1, 2, \dots$, соотношениями $T_1 = T$, $H_s = T_s^{27/82+\varepsilon}$, $T_{s+1} = T_s - H_s$ и положим s_0 равным номеру первого члена убывающей последовательности T_s с условием $T_{s+1} \leq \tau$. Согласно теореме 3 для $1 \leq s \leq s_0$ при $j \geq 3.1/\alpha$ справедливы неравенства

$$N_j(T_s) - N_j(T_{s+1}) \leq \beta_1 (N(T_s) - N(T_{s+1})) \exp(-\alpha j),$$

где $\alpha = (\pi\sqrt{5}/3)10^{-5}e^{-19.5}$, $j_0 = (3 + 0.1\alpha + 2(7.5e10^{-4})^{2/3})/\alpha < 3.1/\alpha$, $\beta_1 = 2\alpha e^{3.1}/(1 - e^{-3})^2$, сложив которые, получим

$$\begin{aligned} N_j(T) &\leq \beta_1 N(T) \exp(-\alpha j) + N_j(\tau) < \beta_1 N(T) \exp(-\alpha j)(1 + N_j(\tau)T^{-1} \exp(\alpha j)) \\ &\leq \beta_1 N(T) \exp(-\alpha j)(1 + N_j(\tau)T^{-1+18\alpha}) \leq \beta N(T) \exp(-\alpha j), \end{aligned}$$

где $\beta = 2\alpha e^{3.2}/(1 - e^{-3})^2$. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Королев, “О кратных нулях дзета-функции Римана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:3 (2006), 3–22.
- [2] А. А. Карацуба, М. А. Королев, “Аргумент дзета-функции Римана”, *УМН*, **60**:3 (2005), 41–96.
- [3] A. Fujii, “On the distribution of the zeros of the Riemann zeta function in short intervals”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **81**:1 (1975), 139–142.

Р. Н. Бояринов

Московский государственный университет им.

М. В. Ломоносова

E-mail: roma_boyarin@yahoo.com

Поступило

17.02.2010