Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Лауринчикас, О совместной универсальности дзета-функций Лерха, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 3, 428–437

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8685>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:48:16

О совместной универсальности дзета-функций Лерха

А. Лауринчикас

В статье получена совместная теорема универсальности типа Воронина для дзета-функций Лерха при более слабых условиях, чем в [1].

Библиография: 18 названий.

Памяти Анатолия Алексеевича Карацубы

1. Введение. Дзета-функция Лерха $L(\lambda, \alpha, s)$, $s = \sigma + it$, с параметрами α и λ , $0 < \alpha \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, при $\sigma > 1$ определяется рядом

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m + \alpha)^s}.$$

При $\lambda \notin \mathbb{Z}$ функция $L(\lambda, \alpha, s)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, т.е. является целой функцией. Если $\lambda \in \mathbb{Z}$, то дзета-функция Лерха превращается в дзета-функцию Гурвица

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}, \quad \sigma > 1,$$

которая в точке $s = 1$ имеет простой полюс с вычетом 1. Кроме того, имеют место равенства

$$L(k, 1, s) = \zeta(s), \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$L\left(\frac{1}{2}, 1, s\right) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s), \quad L\left(k, \frac{1}{2}, s\right) = (2^s - 1)\zeta(s),$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана. Таким образом, дзета-функция Лерха является обобщением классических дзета-функций Римана и Гурвица. Теория дзета-функции Лерха изложена в монографии [2].

В настоящей заметке мы будем рассматривать универсальность набора нескольких дзета-функций Лерха. Напоминаем, что свойство универсальности дзета-функций было открыто учеником А. А. Карацубы Ворониным. В 1975 г. он доказал [3], [4] (см. также [5] и [6]) универсальность дзета-функции Римана. Первоначальная формулировка теоремы Воронина такова. Пусть $0 < r < 1/4$, а $f(s)$ – функция, аналитическая внутри круга $|s| \leq r$ и непрерывная вплоть до границы этого круга. Если

Работа выполнена при поддержке Литовского фонда Науки и высшего образования.

$f(s) \neq 0$ при $|s| < r$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\max_{|s| \leq r} \left| \zeta \left(s + \frac{3}{4} + i\tau \right) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Последний вариант теоремы Воронина имеет немножко более общий вид. Через $\text{meas}\{A\}$ обозначим меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$, и пусть для краткости

$$\nu_T(\dots) = \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \dots\},$$

где многоточие означает некоторое условие, которому удовлетворяет τ . Тогда имеет место следующее утверждение [7]. Пусть K – компактное подмножество полосы $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, обладающее связным дополнением, а $f(s)$ – функция, непрерывная и не имеющая нулей в K и аналитическая внутри K . Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Теорема Воронина многими авторами была обобщена для других дзета и L -функций и некоторых классов рядов Дирихле. Результаты и библиографию можно найти в монографиях [2], [5], [7], [8] и в обзорных статьях [9]–[11].

Существует гипотеза Линника–Ибрагимова, что все функции, в некоторой полуплоскости определяемые рядом Дирихле, допускающие аналитическое продолжение на лево от полуплоскости абсолютной сходимости и удовлетворяющие некоторым натуральным условиям роста, являются универсальными в смысле Воронина.

Универсальность дзета-функции Лерха $L(\lambda, \alpha, s)$ с трансцендентным параметром α была получена в [12] (см. также [2]). Предположим, что K – компактное подмножество со связным дополнением полосы D , и пусть функция $f(s)$ непрерывна в K и аналитична внутри K . Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |L(\lambda, \alpha, s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Поскольку при трансцендентном α функция $L(\lambda, \alpha, s)$ не имеет эйлеровского произведения по простым числам, то в этой теореме, в отличие от теоремы Воронина, не требуется, чтобы функция $f(s)$ не имела нулей в K .

Случай рационального параметра α рассматривался в [13], [2].

Первый результат о совместной универсальности также принадлежит Воронину. В 1975 г. [14] (см. также [5] и [6]) он получил совместную универсальность L -функций Дирихле $L(s, \chi)$. Пусть $0 < r < 1/4$, $\chi_1, \dots, \chi_r$ – попарно неэквивалентные характеры Дирихле, а $f_1(s), \dots, f_r(s)$ – функции, аналитические внутри круга $|s| \leq r$, непрерывные вплоть до границы этого круга и не имеющие нулей при $|s| < r$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $j = 1, \dots, r$ выполняется неравенство

$$\max_{|s| \leq r} \left| L \left(s + \frac{3}{4} + i\tau, \chi_j \right) - f_j(s) \right| < \varepsilon.$$

Совместная универсальность дзета-функций Лерха была начата изучаться в работах [15] и [1]. В них была получена совместная универсальность набора функций

$L(\lambda_1, \alpha_1, s), \dots, L(\lambda_r, \alpha_r, s)$ с рациональными параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ и алгебраически независимыми параметрами $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Самый общий результат в этом направлении содержится в [1]. Пусть $k_1, \dots, k_r$ – целые положительные числа, а $\lambda_{lj} \notin \mathbb{Z}$ – произвольные рациональные числа со знаменателями q_{lj} , $l = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, k_l$. В [1] рассматривался набор серий дзета-функций Лерха

$$L(\lambda_{11}, \alpha_1, s), \quad \dots, \quad L(\lambda_{1k_1}, \alpha_1, s), \quad L(\lambda_{21}, \alpha_2, s), \quad \dots, \\ L(\lambda_{2k_2}, \alpha_2, s), \quad \dots, \quad L(\lambda_{r1}, \alpha_r, s), \quad \dots, \quad L(\lambda_{rk_r}, \alpha_r, s).$$

Через k обозначим наименьшее общее кратное чисел $q_{11}, \dots, q_{1k_1}, \dots, q_{r1}, \dots, q_{rk_r}$ и определим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \lambda_{11}} & e^{2\pi i \lambda_{12}} & \dots & e^{2\pi i \lambda_{1k_1}} & \dots & e^{2\pi i \lambda_{r1}} & e^{2\pi i \lambda_{r2}} & \dots & e^{2\pi i \lambda_{rk_r}} \\ e^{4\pi i \lambda_{11}} & e^{4\pi i \lambda_{12}} & \dots & e^{4\pi i \lambda_{1k_1}} & \dots & e^{4\pi i \lambda_{r1}} & e^{4\pi i \lambda_{r2}} & \dots & e^{4\pi i \lambda_{rk_r}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{2\pi i k \lambda_{11}} & e^{2\pi i k \lambda_{12}} & \dots & e^{2\pi i k \lambda_{1k_1}} & \dots & e^{2\pi i k \lambda_{r1}} & e^{2\pi i k \lambda_{r2}} & \dots & e^{2\pi i k \lambda_{rk_r}} \end{pmatrix}.$$

Пусть $d = k_1 + \dots + k_r$. В [1] было доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ алгебраически независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а $\text{rank}(A) = d$. Пусть K_{lj} – компактные подмножества со связными дополнениями полосы D , а функции $f_{lj}(s)$ непрерывны в K_{lj} и аналитичны внутри K_{lj} , $l = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, k_l$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq l \leq r} \sup_{1 \leq j \leq k_l} \sup_{s \in K_{lj}} |L(\lambda_{lj}, \alpha_l, s + i\tau) - f_{lj}(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Цель настоящей заметки – ослабить условие, связанное с рангом матрицы A в теореме 1. Пусть v_l – наименьшее общее кратное знаменателей $q_{l1}, q_{l2}, \dots, q_{lk_l}$, $l = 1, \dots, r$. Определим матрицы

$$B_l = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \lambda_{l1}} & e^{2\pi i \lambda_{l2}} & \dots & e^{2\pi i \lambda_{lk_l}} \\ e^{4\pi i \lambda_{l1}} & e^{4\pi i \lambda_{l2}} & \dots & e^{4\pi i \lambda_{lk_l}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{2\pi i v_l \lambda_{l1}} & e^{2\pi i v_l \lambda_{l2}} & \dots & e^{2\pi i v_l \lambda_{lk_l}} \end{pmatrix}, \quad l = 1, \dots, r.$$

Кроме того, пусть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \{\log(m + \alpha_l) : m \in \mathbb{N}_0, l = 1, \dots, r\}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что система $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независима над полем $\mathbb{Q}$, и что $\text{rank}(B_l) = k_l$, $l = 1, \dots, r$. Пусть K_{lj} и $f_{lj}(s)$ те же самые, что и в теореме 1. Тогда имеет место утверждение теоремы 1.*

В теореме 2, в отличие от теоремы 1, используется информация лишь о тех λ_{lj} , которые связаны с α_l . Например, в теореме 1 все λ_{lj} должны быть различными, а в теореме 2 некоторые уже могут повторяться. Кроме того, в теореме 2 на числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ налагается более общее условие.

2. Совместная предельная теорема. Самые общие результаты при изучении универсальности рядов Дирихле дает применение предельных теорем в смысле слабой сходимости вероятностных мер в пространстве аналитических функций. Теорема такого типа для дзета-функций Лерха была получена в [1]. Для ее формулировки нам нужны некоторые обозначения и определения. Через $\mathcal{B}(S)$ будем обозначать класс борелевских множеств пространства S , а через $H(D)$ – пространство аналитических в D функций, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах. Кроме того, пусть

$$H^d(D) = \underbrace{H(D) \times \cdots \times H(D)}_d.$$

Определим

$$\Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

где $\gamma_m = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$. В силу теоремы Тихонова бесконечномерный тор Ω является компактной топологической абелевой группой. Поэтому на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ может быть определена вероятностная мера Хаара m_H . Получаем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Кроме того, пусть

$$\Omega^r = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_r,$$

где $\Omega_l = \Omega$ для всех $l = 1, \dots, r$. Опять в силу теоремы Тихонова имеем, что Ω^r – компактная топологическая абелевая группа. Это приводит к новому вероятностному пространству $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), m_H^r)$, где m_H^r – вероятностная мера Хаара на $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r))$. Для краткости положим $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $\underline{\lambda} = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1k_1}, \dots, \lambda_{r1}, \dots, \lambda_{rk_r})$, через $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ будем обозначать элементы группы Ω^r , через $\omega_l(m)$ – проекцию элемента $\omega_l \in \Omega_l$ на координатное пространство γ_m , $m \in \mathbb{N}_0$, и на вероятностном пространстве $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), m_H^r)$ определим $H^d(D)$ -значный случайный элемент $\underline{L}(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s, \underline{\omega})$ формулой

$$\underline{L}(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s, \underline{\omega}) = (L(\lambda_{11}, \alpha_1, s, \omega_1), \dots, L(\lambda_{1k_1}, \alpha_1, s, \omega_1), \dots, \\ L(\lambda_{r1}, \alpha_r, s, \omega_r), \dots, L(\lambda_{rk_r}, \alpha_r, s, \omega_r)),$$

где

$$L(\lambda_{lj}, \alpha_l, s, \omega_l) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda_{lj} m \omega_l(m)}}{(m + \alpha_l)^s}, \quad l = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, k_l.$$

Через $P_{\underline{L}}$ обозначим распределение случайного элемента $\underline{L}(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s, \underline{\omega})$, т.е.

$$P_{\underline{L}}(A) = m_H^r(\underline{\omega} \in \Omega^r : \underline{L}(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s, \underline{\omega}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H^d(D)).$$

Пусть

$$\underline{L}(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s) = (L(\lambda_{11}, \alpha_1, s), \dots, L(\lambda_{1k_1}, \alpha_1, s), \dots, L(\lambda_{r1}, \alpha_r, s), \dots, L(\lambda_{rk_r}, \alpha_r, s)).$$

На $(H^d(D), \mathcal{B}(H^d(D)))$ определим

$$P_T(A) = \nu_T(\underline{L}(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s + i\tau) \in A).$$

ЛЕММА 1. Вероятностная мера P_T при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере $P_{\underline{L}}$.

Доказательство леммы содержится в [1; теорема 1].

3. Плотностная лемма. При доказательстве теоремы 2 нам будет нужен носитель меры P_L . Для этой цели мы рассмотрим множество всех сходящихся рядов в $H^{k_l}(D)$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{e^{2\pi i \lambda_{l1} m} a_m}{(m + \alpha_l)^s}, \dots, \frac{e^{2\pi i \lambda_{lk_l} m} a_m}{(m + \alpha_l)^s} \right), \quad l = 1, \dots, r, \quad (3.1)$$

где $|a_m| = 1$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$.

ЛЕММА 2. *Предположим, что $\text{rank}(B_l) = k_l$. Тогда множество всех сходящихся рядов (3.1) всюду плотно в $H^{k_l}(D)$, $l = 1, \dots, r$.*

Для доказательства леммы 2 мы воспользуемся следующими утверждениями.

ЛЕММА 3. *Пусть $\{(g_{m1}(s), g_{m2}(s), \dots, g_{mk_l}(s)) : m \in \mathbb{N}_0\}$ – последовательность в $H^{k_l}(D)$, удовлетворяющая условиям*

- 1) *если $\mu_1, \dots, \mu_{k_l}$ – комплекснозначные меры на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактными носителями, содержащимися в D , такие, что*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{k_l} \int_{\mathbb{C}} g_{mj}(s) d\mu_j(s) \right| < \infty,$$

то

$$\int_{\mathbb{C}} s^k d\mu_j(s) = 0, \quad j = 1, \dots, k_l, \quad k \in \mathbb{N}_0;$$

- 2) *ряд*

$$\sum_{m=0}^{\infty} (g_{m1}(s), \dots, g_{mk_l}(s))$$

сходится в $H^{k_l}(D)$;

- 3) *для любого компактного подмножества $K \subset D$*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_l} \sup_{s \in K} |g_{mj}(s)|^2 < \infty.$$

Тогда множество всех сходящихся рядов

$$\sum_{m=0}^{\infty} (g_{m1}(s)a_m, \dots, g_{mk_l}(s)a_m)$$

с $|a_m| = 1$, $m \in \mathbb{N}_0$, всюду плотно в $H^{k_l}(D)$.

Лемма 3 является частным случаем общего утверждения, доказанного в [16; лемма 6].

ЛЕММА 4. *Пусть μ – комплекснозначная мера на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактным носителем, содержащимся в полуплоскости $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_0\}$, и*

$$g(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{sz} d\mu(s), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Если $g(z) \neq 0$, то

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |g(r)|}{r} > \sigma_0.$$

Доказательство см. в [7; лемма 6.4.10].

Пусть множество $A \subset \mathbb{N}$ имеет положительную плотность.

ЛЕММА 5. Пусть $g(s)$ – функция экспоненциального типа и

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |g(r)|}{r} > -1.$$

Тогда

$$\sum_{m \in A} |g(\log m)| = +\infty.$$

Доказательство см. в [15; лемма 5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Для всякого $l = 1, \dots, r$ и $j = 1, \dots, k_l$ функция $L(\lambda_{lj}, \alpha_j, s, \omega_j)$ является $H(D)$ -значным случайным элементом на вероятностном пространстве $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), m_H^r)$. Следовательно, ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda_{lj} m} \omega_l(m)}{(m + \alpha_l)^s}, \quad l = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, k_l,$$

для почти всех $\omega_l \in \Omega$ относительно меры Хаара m_H сходится равномерно на компактных подмножествах полосы D . Поэтому существует последовательность $\{b_l(m) : |b_l(m)| = 1, m \in \mathbb{N}_0\}$ такая, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{e^{2\pi i \lambda_{l1} m} b_l(m)}{(m + \alpha_l)^s}, \dots, \frac{e^{2\pi i \lambda_{lk_l} m} b_l(m)}{(m + \alpha_l)^s} \right)$$

сходится в пространстве $H^{k_l}(D)$, $l = 1, \dots, r$. Таким образом, достаточно показать, что множество всех сходящихся рядов

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{e^{2\pi i \lambda_{l1} m} b_l(m) a(m)}{(m + \alpha_l)^s}, \dots, \frac{e^{2\pi i \lambda_{lk_l} m} b_l(m) a(m)}{(m + \alpha_l)^s} \right)$$

с $|a(m)| = 1$, $m \in \mathbb{N}_0$, всюду плотно в $H^{k_l}(D)$, $l = 1, \dots, r$. Для этой цели воспользуемся леммой 3. Покажем, что для всякого $l = 1, \dots, r$ последовательность

$$\left\{ \left(\frac{e^{2\pi i \lambda_{l1} m} b_l(m)}{(m + \alpha_l)^s}, \dots, \frac{e^{2\pi i \lambda_{lk_l} m} b_l(m)}{(m + \alpha_l)^s} \right) : m \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (3.2)$$

удовлетворяет условиям леммы 3. Очевидно, что условие 2) леммы 3 выполнено в силу выбора последовательности $\{b_l(m) : m \in \mathbb{N}_0\}$. Пусть K – любое компактное подмножество полосы D . Тогда из определения D следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_l} \sup_{s \in K} \left| \frac{e^{2\pi i \lambda_{lj} m} b_l(m)}{(m + \alpha_l)^s} \right|^2 < \infty, \quad l = 1, \dots, r,$$

т.е. условие 3) леммы 3 также имеет место. Остается проверить условие 1) леммы 3.

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_{k_l}$ – комплекснозначные меры на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактными носителями, содержащимися в полосе D , такие, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{k_l} \int_{\mathbb{C}} \frac{e^{2\pi i \lambda_{lj} m} b_l(m)}{(m + \alpha_l)^s} d\mu_j(s) \right| < \infty. \quad (3.3)$$

Поскольку v_l – наименьшее общее кратное знаменателей чисел $\lambda_{l1}, \lambda_{l2}, \dots, \lambda_{lk_l}$, оно является периодом последовательностей $\{e^{2\pi i \lambda_{l1} m} : m \in \mathbb{N}_0\}, \dots, \{e^{2\pi i \lambda_{lk_l} m} : m \in \mathbb{N}_0\}$, $l = 1, \dots, r$. Поэтому из (3.3) следует, что для всех $u = 1, \dots, v_l$ и $l = 1, \dots, r$

$$\sum_{\substack{m=0 \\ m \equiv u \pmod{v_l}}}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{k_l} e^{2\pi i \lambda_{lj} u} \int_{\mathbb{C}} \frac{d\mu_j(s)}{(m + \alpha_l)^s} \right| < \infty. \quad (3.4)$$

Определим

$$\nu_{lu}(A) = \sum_{j=1}^{k_l} e^{2\pi i \lambda_{lj} u} \mu_j(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}). \quad (3.5)$$

Тогда ν_{lu} для всякого $u = 1, \dots, v_l$ является комплекснозначной мерой на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактным носителем, содержащимся в полосе D , и в силу (3.4) и (3.5) имеем, что для всех $u = 1, \dots, v_l$

$$\sum_{\substack{m=0 \\ m \equiv u \pmod{v_l}}}^{\infty} \left| \int_{\mathbb{C}} \frac{d\nu_{lu}(s)}{(m + \alpha_l)^s} \right| < \infty. \quad (3.6)$$

Положим

$$A_{lu} = \{m \in \mathbb{N} : m \equiv u \pmod{v_l}\}, \quad \rho_{lu}(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\nu_{lu}(s), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Хорошо известно, что множество A_{lu} для каждого $u = 1, \dots, v_l$ имеет положительную плотность, а $\rho_{lu}(z)$ является функцией экспоненциального типа. Легко видеть, что для s , принадлежащих компактному множеству полосы D , имеет место оценка

$$(m + \alpha_l)^{-s} = m^{-s} + O(m^{-1-\sigma}), \quad m \geq 2.$$

Отсюда, из определения $\rho_{lu}(z)$ и неравенства (3.6) находим, что для всех $u = 1, \dots, v_l$

$$\sum_{m \in A_{lu}} |\rho_{lu}(\log m)| < \infty.$$

Следовательно, из леммы 5 следует, что

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |\rho_{lu}(x)|}{x} \leq -1.$$

Теперь из леммы 4 получаем, что

$$\rho_{lu}(z) \equiv 0, \quad u = 1, \dots, v_l.$$

Отсюда и из определений $\rho_{lu}(z)$ и ν_{lu} получаем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{k_l} e^{2\pi i \lambda_{lj} u} \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\mu_j(s) \equiv 0, \quad u = 1, \dots, v_l.$$

Поскольку $\text{rank}(B_l) = k_l$, эта система имеет только нулевое решение

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\mu_j(s) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, k_l.$$

Дифференцируя последние равенства k раз и затем полагая $z = 0$, получаем, что для всех $j = 1, \dots, k_l$ и $k \in \mathbb{N}_0$

$$\int_{\mathbb{C}} s^k d\mu_j(s) = 0.$$

Итак мы получили, что условие 1) леммы 3 также выполняется для последовательности (3.2). Следовательно, из леммы 3 получаем, что множество всех сходящихся рядов (3.1) с $|a_m| = 1$, $m \in \mathbb{N}_0$, всюду плотно в $H^{k_l}(D)$, $l = 1, \dots, r$.

4. Носитель меры $P_{\underline{L}}$. Пусть S – сепарабельное метрическое пространство и P – вероятностная мера на $(S, \mathcal{B}(S))$. Напоминаем, что *носителем меры P* называется минимальное замкнутое множество $S_P \in \mathcal{B}(S)$ такое, что $P(S_P) = 1$. Кроме того, носитель S_P состоит из всех таких элементов $x \in S$, что для всякой окрестности G элемента x выполняется неравенство $P(G) > 0$.

Носителем S_X случайного S -значного элемента X называется носитель его распределения.

ЛЕММА 6. *Предположим, что $\text{rank}(B_l) = k_l$, $l = 1, \dots, r$. Тогда носителем меры $P_{\underline{L}}$ является все пространство $H^d(D)$.*

Доказательство леммы 6 опирается на следующее утверждение.

ЛЕММА 7. *Пусть $\{X_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ – последовательность независимых $H^{k_l}(D)$ -значных случайных элементов таких, что ряд*

$$\sum_{m=0}^{\infty} X_m$$

сходится почти наверное. Тогда носителем суммы этого ряда является замыкание множества всех таких $\underline{g} \in H^{k_l}(D)$, которые могут быть записаны в виде сходящегося ряда

$$\underline{g} = \sum_{m=0}^{\infty} \underline{g}_m, \quad \underline{g}_m \in S_{X_m}.$$

Доказательство дано в [16; лемма 5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Сначала для всякого $l = 1, \dots, r$ рассмотрим носитель $H^{k_l}(D)$ -значного случайного элемента

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda_{l1} m} \omega_l(m)}{(m + \alpha_l)^s}, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda_{lk_l} m} \omega_l(m)}{(m + \alpha_l)^s} \right). \quad (4.1)$$

Из определения тора $\Omega_l = \Omega$ следует, что $\{\omega_l(m) : m \in \mathbb{N}_0\}$ – последовательность независимых комплекснозначных случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega_l, \mathcal{B}(\Omega_l), m_{lH})$, где m_{lH} – мера Хаара на $(\Omega_l, \mathcal{B}(\Omega_l))$. Так как носителем каждой случайной величины $\omega_l(m)$ является единичная окружность, отсюда вытекает, что

$$\left\{ \left(\frac{e^{2\pi i \lambda_{l1} m} \omega_l(m)}{(m + \alpha_l)^s}, \dots, \frac{e^{2\pi i \lambda_{lk_l} m} \omega_l(m)}{(m + \alpha_l)^s} \right) : m \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

– последовательность независимых $H^{k_l}(D)$ -значных случайных элементов на вероятностном пространстве $(\Omega_l, \mathcal{B}(\Omega_l), m_{lH})$ и носителем каждого такого элемента является множество

$$\left\{ \underline{g} \in H^{k_l}(D) : \underline{g}(s) = \left(\frac{e^{2\pi i \lambda_{l1} m a}}{(m + \alpha_l)^s}, \dots, \frac{e^{2\pi i \lambda_{lk_l} m a}}{(m + \alpha_l)^s} \right), |a| = 1 \right\}.$$

Поэтому, применяя лемму 7, получаем, что для каждого $l = 1, \dots, r$ носителем случайного элемента (4.1) является замыкание всех сходящихся рядов (3.1). Отсюда и из леммы 2 следует, что носителем распределения случайного элемента (4.1) является все пространство $H^{k_l}(D)$, $l = 1, \dots, r$.

Пусть $A_l \in H^{k_l}(D)$, $l = 1, \dots, r$, и

$$A = A_1 \times \dots \times A_r. \quad (4.2)$$

Поскольку пространство $H^d(D)$ сепарабельно, имеем [17], что σ -поле $\mathcal{B}(H^d(D))$ совпадает с

$$\mathcal{B}(H^{k_1}(D)) \times \dots \times \mathcal{B}(H^{k_r}(D)).$$

Другими словами, $\mathcal{B}(H^d(D))$ совпадает с σ -полем, порожденным множествами вида (4.2). С другой стороны, мера Хаара m_H^r на $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r))$ является произведением мер Хаара m_{lH} на $(\Omega_l, \mathcal{B}(\Omega_l))$, $l = 1, \dots, r$. Следовательно, имеем, что распределение $P_{\underline{L}}$ случайного элемента $\underline{L}$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} P_{\underline{L}} &= m_H^r(\underline{\omega} \in \Omega^r : \underline{L}(\lambda, \underline{\alpha}, s, \underline{\omega}) \in A) \\ &= m_{1H}(\omega_1 \in \Omega_1 : (L(\lambda_{11}, \alpha_1, s, \omega_1), \dots, L(\lambda_{1k_1}, \alpha_1, s, \omega_1)) \in A_1) \times \dots \\ &\quad \times m_{rH}(\omega_r \in \Omega_r : (L(\lambda_{r1}, \alpha_r, s, \omega_r), \dots, L(\lambda_{rk_r}, \alpha_r, s, \omega_r)) \in A_r). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Поскольку мы только что получили, что носителем распределения

$$m_{lH}(\omega_l \in \Omega_l : (L(\lambda_{l1}, \alpha_l, s, \omega_l), \dots, L(\lambda_{lk_l}, \alpha_l, s, \omega_l)) \in A_l)$$

случайного элемента (4.1) является все пространство $H^{k_l}(D)$, $l = 1, \dots, r$, отсюда и из равенства (4.3) непосредственно следует, что носитель меры $P_{\underline{L}}$ совпадает с

$$H^{k_1}(D) \times \dots \times H^{k_r}(D) = H^d(D).$$

5. Доказательство теоремы 2. Утверждение теоремы 2 является следствием лемм 1 и 6, а также теоремы Мергеляна [18] о приближении аналитических функций многочленами.

Из теоремы Мергеляна следует, что существуют такие многочлены $p_{lj}(s)$, что

$$\sup_{1 \leq l \leq r} \sup_{1 \leq j \leq k_l} \sup_{s \in K_{lj}} |f_{lj}(s) - p_{lj}(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.1)$$

Определим множество

$$G = \left\{ (g_{11}, \dots, g_{1k_1}, \dots, g_{r1}, \dots, g_{rk_r}) \in H^d(D) : \sup_{1 \leq l \leq r} \sup_{1 \leq j \leq k_l} \sup_{s \in K_{lj}} |p_{lj}(s) - g_{lj}(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Множество G открыто в пространстве $H^d(D)$, а в силу леммы 6

$$(p_{11}, \dots, p_{1k_1}, \dots, p_{r1}, \dots, p_{rk_r}) \in S_{P_{\underline{L}}}.$$

Следовательно, из леммы 1, теоремы 2.1 из [17] и из свойств носителя меры находим, что

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq l \leq r} \sup_{1 \leq j \leq k_l} \sup_{s \in K_{l,j}} |L(\lambda_{l,j}, \alpha_l, s + i\tau) - p_{l,j}(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right) \geq P_L(G) > 0.$$

Отсюда и из неравенства (5.1) вытекает утверждение теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Laurinćikas, K. Matsumoto, “Joint value distribution theorems on Lerch zeta-functions. III”, *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory*, TEV, Vilnius, 2007, 87–98.
- [2] A. Laurinćikas, R. Garunkštis, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht–Boston–London, 2002.
- [3] С. М. Воронин, “Теорема о распределении значений дзета-функции Римана”, *Докл. АН СССР*, **221**:44 (1975), 771.
- [4] С. М. Воронин, “Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 475–486.
- [5] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.
- [6] С. М. Воронин, *Избранные труды. Математика*, ред. А. А. Карацуба, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, М., 2006.
- [7] A. Laurinćikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Math. Appl., **352**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
- [8] J. Steuding, *Value-Distribution of L-Functions*, Lectures Notes in Math, **1877**, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [9] A. Laurinćikas, “The universality of zeta-functions”, *Acta Appl. Math.*, **78**:1-3 (2003), 251–271.
- [10] K. Matsumoto, “Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions”, *Sugaku Expositions*, **17**:1 (2004), 51–71.
- [11] A. Laurinćikas, “Application of probabilistic methods in the theory of Riemann zeta-function”, *IV Международная конференция “Современные проблемы теории чисел и ее приложения”, посвященная 180-летию П. Л. Чебышёва и 110-летию И. М. Виноградова. Актуальные проблемы*, Ч. 2 (Тула, 10–15 сентября 2001 г.), Изд-во Мех.-мат. фак-та МГУ, М., 2002, 98–116.
- [12] А. Лауринчикас, “Универсальность дзета-функции Лерха”, *Литовский матем. сб.*, **37**:3 (1997), 367–375.
- [13] А. Лауринчикас, “О дзета-функции Лерха с рациональными параметрами”, *Литовский матем. сб.*, **38**:1 (1998), 113–124.
- [14] С. М. Воронин, “О функциональной независимости L -функций Дирихле”, *Acta Arith.*, **27**:2 (1975), 493–503.
- [15] A. Laurinćikas, K. Matsumoto, “The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions”, *Nagoya Math. J.*, **157** (2000), 211–227.
- [16] A. Laurinćikas, K. Matsumoto, “The joint universality of zeta-functions attached to certain cusp forms”, *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, **5** (2002), 58–75.
- [17] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [18] J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **20**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1960.

А. Лауринчикас

Вильнюсский университет, Литва

E-mail: antanas.laurincikas@maf.vu.lt

Поступило

27.07.2009

Исправленный вариант

23.02.2010