Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Нестеренко, О показателе иррациональности числа $\ln 2$, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 4, 549–564

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8686>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:23:45

О показателе иррациональности числа $\ln 2$

Ю. В. Нестеренко

Предлагается иной способ вывода оценки Марковеккио для меры иррациональности числа $\ln 2$, следующий в основном методу доказательства иррациональности числа $\zeta(3)$, предложенному нами в 1996 г. Доказательство использует однократные комплексные интегралы – так называемые G-функции Мейера и намного проще, чем у Марковеккио.

Библиография: 16 названий.

Для каждого иррационального числа α можно определить количественную характеристику того, насколько α отличается от рациональных. Эта характеристика носит название *показатель иррациональности* и определяется как точная верхняя грань множества чисел $\varkappa$, для которых неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < q^{-\varkappa}$$

имеет бесконечно много решений в рациональных числах p/q . Для показателя иррациональности принято обозначение $\mu(\alpha)$.

В 1798 г. Лагранж доказал некоторую теорему о цепных дробях иррациональных чисел, означающую, в частности, что для любого иррационального числа α выполняется неравенство $\mu(\alpha) \geq 2$. Знаменитая теорема К. Ф. Рота (1955 г.) утверждает, что для любого алгебраического иррационального числа α выполняется неравенство $\mu(\alpha) \leq 2$, поэтому для любой алгебраической иррациональности α имеем $\mu(\alpha) = 2$. Из цепной дроби Эйлера для константы e следует равенство $\mu(e) = 2$. К сожалению, точная величина показателя иррациональности известна для немногих чисел. Для ряда чисел известны только оценки сверху для $\mu(\alpha)$. Например, для числа π лучшая из известных оценок

$$\mu(\pi) \leq 7.606308 \dots$$

доказана в 2008 г. Салиховым [1].

Исследования арифметических свойств логарифмов рациональных чисел составляют классический раздел теории диофантовых приближений. Число $\ln 2$ является естественной моделью для сравнения различных методов, разработанных для оценки показателя иррациональности логарифмов рациональных чисел. В 1964 г. Бейкер [2] доказал неравенство, из которого следует, что $\mu(\ln 2) \leq 12.5$. Эта оценка

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00743).

неоднократно улучшалась в работах Данилова [3], Аллады и Робинсона [4], Чудновского [5], [6] и Рина [7]. В 1987 г. появилась работа Рухадзе [8], где были внесены существенные изменения в метод построения рациональных приближений к $\ln 2$ и доказана оценка $\mu(\ln 2) \leq 3.893$. Более детальные вычисления позволили Хате [9], уточнить этот результат, заменив его неравенством $\mu(\ln 2) \leq 3.891399 \dots$. Последний рекорд продержался до 2009 г., когда была опубликована статья Марковеккио [10], где доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо неравенство*

$$\mu(\ln 2) \leq 3.57455390 \dots \quad (1)$$

В [10] предлагается новый способ построения рациональных приближений к $\ln 2$, основанный на использовании двукратных несобственных комплексных интегралов. Точная оценка величины знаменателей приближений опирается на групповой метод Рина–Виолы, разработанный в связи с оценками показателя иррациональности значений дзета-функции Римана $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$ (см. [11], [12]).

В настоящей статье мы предлагаем иной способ вывода оценки (1), следующий в основном методу доказательства иррациональности числа $\zeta(3)$, предложенному в работе [13]. Доказательство намного проще, чем у Марковеккио. Оно не использует групповой метод. Кроме того мы применяем однократные комплексные интегралы – так называемые G-функции Мейера (см. [14]), что позволяет использовать метод перевала в существенно более простой ситуации.

1. Вычисление интеграла. Пусть n – натуральное число и целозначный многочлен $A(x)$ определен равенством

$$\begin{aligned} A(x) &= \binom{x+5n}{3n} \binom{x+6n}{5n} \binom{x+7n}{7n} \\ &= \frac{(x+2n+1) \cdots (x+5n)}{(3n)!} \cdot \frac{(x+n+1) \cdots (x+6n)}{(5n)!} \cdot \frac{(x+1) \cdots (x+7n)}{(7n)!}. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L A(\zeta) \left(\frac{\pi}{\sin \pi \zeta} \right)^2 z^{-\zeta} d\zeta, \quad (2)$$

где $z \neq 0$, а вертикальная прямая L проходит снизу вверх и задается равенством $\operatorname{Re} \zeta = cn$, c – фиксированная константа, $-5 < c < -2$, которая будет определена позднее. Мы полагаем также $z^{-\zeta} = e^{-\zeta \ln z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *При любом $z \in \mathbb{C}$ с условием $0 < |z| < 1$ выполняется*

$$I(z) = U(z) \ln z - V(z), \quad (3)$$

где рациональные функции $U(z)$ и $V(z)$ определяются равенствами

$$U(z) = \sum_{j=7n}^{15n} a_j \left(\frac{z}{z-1} \right)^{j+1}, \quad V(z) = \sum_{k=1}^n A'(-k) z^k + \sum_{j=0}^{15n-1} b_j \left(\frac{z}{z-1} \right)^{j+1}, \quad (4)$$

$$a_j = \sum_{k=7n+1}^{j+1} (-1)^{k-1} A(-k) \binom{j}{k-1}, \quad b_j = \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k-1} A'(-k) \binom{j}{k-1}.$$

Ветвь логарифма $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ в обеих частях равенства (3) выбирается так, что $|\arg z| < 2\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Psi(\zeta)$ обозначает подынтегральную функцию в (2). Так как

$$|A(\zeta)| < (|\zeta| + 7n)^{15n}, \quad |z^{-\zeta}| = e^{-\sigma \log |z| + t \arg z}, \quad \left| \frac{1}{\sin \zeta} \right| \leq 3e^{-|t|} \quad (5)$$

где $\zeta = \sigma + it$ и $|t| \geq 1$ в последнем неравенстве, мы находим

$$|\Psi(\zeta)| \leq \gamma_1 (|\zeta| + 7n)^{15n} e^{-|t|(2\pi - |\arg z|)}.$$

Буква γ_1 обозначает положительную постоянную, зависящую только от n и z . Из этого неравенства следует абсолютная сходимость интеграла (2) при любом $z \neq 0$.

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ с вершинами

$$A = \left(-N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2}\right), \quad B = \left(-N - \frac{1}{2}, -N - \frac{1}{2}\right), \\ C = \left(c, -N - \frac{1}{2}\right), \quad D = \left(c, N + \frac{1}{2}\right).$$

Интеграл от функции $\Psi(\zeta)$ по контуру $ABCD$ равен сумме вычетов функции $\Psi(\zeta)$ в целых точках $\zeta = -k$, $k = 6n + 1, \dots, N$. Докажем, что интегралы от функции $\Psi(\zeta)$ по отрезкам AB , BC , DA стремятся к нулю с ростом N .

На отрезке AB имеем $\sigma = -N - 1/2$ и из оценок (5) следует, что при достаточно большом N на AB выполняется неравенство

$$|\Psi(\zeta)| \leq (2N)^{15n} |z|^{N+1/2} e^{-|t|(2\pi - |\arg z|)}.$$

На отрезках BC и AD имеем $|t| = N + 1/2$, так что согласно (5) при достаточно большом N имеем

$$|\Psi(\zeta)| \leq (2N)^{15n} e^{-(N+1/2)(2\pi - |\arg z|)} e^{-\sigma \ln |z|}.$$

Интегрируя эти неравенства по соответствующим отрезкам, получаем нужное утверждение о стремлении интегралов к нулю.

Устремляя N к бесконечности, получаем

$$I(z) = \sum_{k=6n+1}^{\infty} \operatorname{Res}_{\zeta=-k} \left(A(\zeta) \left(\frac{\pi}{\sin \pi \zeta} \right)^2 z^{-\zeta} \right).$$

В окрестности точки $-k$ справедливы асимптотические представления

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi \zeta} \right)^2 = \frac{1}{(\zeta + k)^2} + O(1), \quad A(\zeta) = A(-k) + A'(-k)(\zeta + k) + O((\zeta + k)^2), \\ z^{-\zeta} = z^k (1 - (\zeta + k) \ln z + O((\zeta + k)^2)).$$

Поэтому

$$A(\zeta) \left(\frac{\pi}{\sin \pi \zeta} \right)^2 z^{-\zeta} = \frac{A(-k)z^k}{(\zeta + k)^2} + \frac{(A'(-k) - A(-k) \ln z)z^k}{\zeta + k} + O(1),$$

$$I(z) = \sum_{k=6n+1}^{\infty} (A'(-k) - A(-k) \ln z)z^k = - \left(\sum_{k=7n+1}^{\infty} A(-k)z^k \right) \ln z + \sum_{k=6n+1}^{\infty} A'(-k)z^k.$$

Далее будет доказано, что

$$- \sum_{k=7n+1}^{\infty} A(-k)z^k = U(z), \quad - \sum_{k=6n+1}^{\infty} A'(-k)z^k = V(z). \quad (6)$$

Для каждого многочлена $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ сумма ряда $\sum_{k=0}^{\infty} P(-k)z^k$ есть рациональная функция от z . Точное выражение этой суммы дает следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ — многочлен степени d . Тогда для каждого z , $|z| < 1$, выполняется равенство

$$- \sum_{k=1}^{\infty} P(-k)z^k = \sum_{j=0}^d c_j \left(\frac{z}{z-1} \right)^{j+1}, \quad (7)$$

где

$$c_j = \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k-1} P(-k) \binom{j}{k-1}, \quad j \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что определенные в формулировке леммы коэффициенты c_j удовлетворяют равенствам

$$c_j = 0 \quad \text{при} \quad j > d.$$

Пусть $j > d$ и C — замкнутый контур, содержащий внутри все точки $-1, -2, \dots, -j-1$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{j!}{2\pi i} \int_C \frac{P(z) dz}{(z+1) \cdots (z+j)(z+j+1)} &= j! \sum_{k=1}^{j+1} \operatorname{Res}_{z=-k} \frac{P(z)}{(z+1) \cdots (z+j+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k-1} P(-k) \frac{j!}{(k-1)!(j+1-k)!} = c_j. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что при $j > d$ вычет подынтегральной функции в точке ∞ равен нулю. Поэтому $c_j = 0$ при $j > d$.

При любом z с условиями $|z| < 1$ и $|z| < |z-1|$ имеем

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^{\infty} P(-k)z^k &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} P(-k) \left(\frac{z}{z-1} \right)^k \left(1 - \frac{z}{z-1} \right)^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} P(-k) \left(\frac{z}{z-1} \right)^k \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{\ell+k-1}{k-1} \left(\frac{z}{z-1} \right)^{\ell} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left(\frac{z}{z-1} \right)^{j+1} = \sum_{j=0}^d c_j \left(\frac{z}{z-1} \right)^{j+1}. \end{aligned}$$

Равенство (7) доказано в области $|z| < 1$ и $|z| < |z - 1|$. В силу единственности аналитического продолжения оно выполняется во всем круге $|z| < 1$.

Согласно определению выполняются равенства $A(-k) = 0$, $k = 1, \dots, 7n$, поэтому с помощью леммы 1 находим

$$-\sum_{k=7n+1}^{\infty} A(-k)z^k = -\sum_{k=1}^{\infty} A(-k)z^k = \sum_{j=0}^{15n} a_j \left(\frac{z}{z-1} \right)^{j+1},$$

где

$$a_j = \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k-1} A(-k) \binom{j}{k-1}. \quad (9)$$

Кроме того, имеем $a_0 = \dots = a_{7n-1} = 0$, так что

$$-\sum_{k=7n+1}^{\infty} A(-k)z^k = \sum_{j=7n}^{15n} a_j \left(\frac{z}{z-1} \right)^{j+1}, \quad \text{где} \quad a_j = \sum_{k=7n+1}^{j+1} (-1)^{k-1} A(-k) \binom{j}{k-1}.$$

Это доказывает первое равенство (6).

Точно так же для многочлена $A'(x)$ имеем

$$\begin{aligned} -\sum_{k=6n+1}^{\infty} A'(-k)z^k &= \sum_{k=1}^n A'(-k)z^k - \sum_{k=1}^{\infty} A'(-k)z^k \\ &= \sum_{k=1}^n A'(-k)z^k + \sum_{j=0}^{15n-1} b_j \left(\frac{z}{z-1} \right)^{j+1}, \end{aligned}$$

где

$$b_j = \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k-1} A'(-k) \binom{j}{k-1}.$$

Второе равенство (6) доказано.

2. Оценка знаменателей. Справедливы равенства $A(-k) = 0$ при $1 \leq k \leq 7n$ и

$$A(-k) = (-1)^n \binom{k-2n-1}{3n} \binom{k-n-1}{5n} \binom{k-1}{7n} \quad \text{при} \quad k \geq 7n+1.$$

Из них и из (9) следует, что $a_j \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 2. Множество Ω чисел y , $0 \leq y < 1$, с условием, что для каждого x выполняется неравенство

$$[x-2y] + [x-y] + [x] - [x-5y] - [3y] - [x-6y] - [5y] - [x-7y] - [7y] \geq 1 \quad (10)$$

имеет вид

$$\Omega = \left[\frac{1}{6}, \frac{3}{7} \right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{7} \right) \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{6}{7} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма доказывается прямым вычислением. Левую часть неравенства (10) обозначим символом $\mu(x, y)$. Из справедливого при всех действительных α, β неравенства $[\alpha + \beta] \geq [\alpha] + [\beta]$ следует $\mu(x, y) \geq 0$. Поэтому равенство $\mu(x, y) = 0$ равносильно системе равенств

$$\begin{aligned} [x - 2y] - [x - 5y] - [3y] &= 0, \\ [x - y] - [x - 6y] - [5y] &= 0, \\ [x] - [x - 7y] - [7y] &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

а дополнение к множеству Ω в множестве $[0, 1)$ состоит из всех чисел y , $0 \leq y < 1$, для которых система (11) разрешима относительно переменной x . Более того, поскольку левые части уравнений системы имеют период 1 по переменной x , можно дополнительно предполагать, что решение x должно удовлетворять условию $0 \leq x < 1$. Систему уравнений (11) можно заменить несколькими системами линейных неравенств. Например, первое уравнение равносильно совокупности систем неравенств

$$u \leq x - 2y < u + 1, \quad v \leq 3y < v + 1, \quad u - v \leq x - 5y < u - v + 1, \quad (12)$$

где u, v пробегает все целые числа. Ограничения на x, y показывают, что первое уравнение системы (11) равносильно конечной совокупности систем неравенств вида (12). Заменяя систему (11) конечным набором систем линейных неравенств, и решая эти неравенства, можно найти, что дополнение к множеству Ω состоит из промежутков

$$\left[0, \frac{1}{6}\right), \quad \left[\frac{3}{7}, \frac{1}{2}\right), \quad \left[\frac{5}{7}, \frac{3}{4}\right), \quad \left[\frac{6}{7}, 1\right),$$

откуда и следует утверждение леммы. Естественно, мы выполняли все вычисления с помощью компьютера.

СЛЕДСТВИЕ 1. Обозначим буквой Δ произведение всех простых чисел $p > \sqrt{15n}$, удовлетворяющих какому-нибудь из неравенств

$$\frac{1}{6} \leq \left\{\frac{n}{p}\right\} < \frac{3}{7}, \quad \frac{1}{2} \leq \left\{\frac{n}{p}\right\} < \frac{5}{7}, \quad \frac{3}{4} \leq \left\{\frac{n}{p}\right\} < \frac{6}{7}, \quad (13)$$

где $\{t\}$ обозначает дробную часть действительного числа t . Тогда для любого целого $k \geq 1$ значение $A(-k)$ делится на Δ .

Ясно, что для каждого простого числа p , делящего Δ , выполняется неравенство $p \leq 6n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p > \sqrt{15n}$ – простое число, удовлетворяющее какому-либо из двойных неравенств (13). Не уменьшая общности, можно предполагать, что $k \geq 7n + 1$. Обозначим

$$x = \frac{k-1}{p} \quad \text{и} \quad y = \left\{\frac{n}{p}\right\}.$$

Из равенства

$$A(-k) = \frac{(k-2n-1)!}{(k-5n-1)!(3n)!} \cdot \frac{(k-n-1)!}{(k-6n-1)!(5n)!} \cdot \frac{(k-1)!}{(k-7n-1)!(7n)!} \cdot (-1)^n$$

следует, что

$$\begin{aligned} \nu_p(A(-k)) &\geq \left\lfloor \frac{k-1-2n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k-1-n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k-1}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k-5n-1}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3n}{p} \right\rfloor \\ &\quad - \left\lfloor \frac{k-1-6n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k-1-7n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{7n}{p} \right\rfloor \\ &= \mu(x, y). \end{aligned}$$

Неравенства (13) означают, что y принадлежит одному из промежутков, составляющих множество Ω из леммы 2. Согласно лемме 2 можно утверждать, что $\mu(x, y) \geq 1$ и, следовательно, $p \mid A(-k)$. Но тогда $\Delta \mid A(-k)$.

Введем обозначение d_n для наименьшего общего кратного целых чисел $1, 2, \dots, n$, положим также $D = d_{7n}/\Delta$. Обозначим $H_0(z) = 1$.

ЛЕММА 3. Пусть $v \geq 1$ – целое число и

$$H_v(z) = \frac{(z+1) \cdots (z+v)}{v!}.$$

Тогда для любого целого k выполняется включение

$$d_v H'_v(k) \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что любой целозначный многочлен может быть представлен в виде суммы многочленов $H_m(z)$, $m \geq 0$, с целыми коэффициентами. В частности, целозначный многочлен $H_v(z+k)$ есть линейная комбинация с целыми коэффициентами многочленов $H_m(z)$, $0 \leq m \leq v$. Учитывая, что $H'_0(0) = 0$ и

$$H'_m(0) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{j}, \quad 1 \leq m \leq v,$$

получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 4. Для любого целого k , $1 \leq k \leq 15n$, справедливо включение $DA'(-k) \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления

$$A(x) = H_{3n}(x+2n) \cdot H_{5n}(x+n) \cdot H_{7n}(x)$$

и леммы 3 находим, что при любом целом k имеет место включение $d_{7n}A'(-k) \in \mathbb{Z}$. В частности, это означает, что в знаменатель рационального числа $A'(-k)$ могут входить лишь простые числа $p \leq 7n$.

Рассмотрим сначала случай $k \geq 7n+1$. Справедливо равенство

$$A'(-k) = A(-k) \left(\sum_{j=2n+1}^{5n} \frac{1}{j-k} + \sum_{j=n+1}^{6n} \frac{1}{j-k} + \sum_{j=1}^{7n} \frac{1}{j-k} \right). \quad (14)$$

Если простое число $p > \sqrt{15n}$ удовлетворяет какому-нибудь из неравенств (13) и входит в знаменатель выражения в скобках правой части равенства (14) во второй или большей степени, то с некоторым j имеем $p^2 \leq |j-k| < 15n$, что невозможно. Следовательно, простые числа, делящие Δ , могут входить в знаменатель числа

в скобках не более чем в первой степени. Учитывая, что $\Delta \mid A(-k)$, согласно лемме 2 заключаем, что знаменатель $A'(-k)$ не содержит простых, входящих в Δ , а потому $DA'(-k)$ есть целое число.

Для чисел k из промежутка $n+1 \leq k \leq 6n$ имеем $A'(-k) = 0$, так что утверждение имеет место и в этом случае.

Если число k удовлетворяет неравенствам $1 \leq k \leq n$, то

$$A'(-k) = \frac{(5n-k)!}{(3n)!(2n-k)!} \cdot \frac{(6n-k)!}{(5n)!(n-k)!} \cdot \frac{(k-1)!(7n-k)!}{(7n)!} \cdot (-1)^{k-1},$$

и для каждого простого числа p , делящего Δ , имеем

$$\begin{aligned} \nu_p(A'(-k)) \geq & \left[\frac{5n-k}{p} \right] - \left[\frac{3n}{p} \right] - \left[\frac{2n-k}{p} \right] + \left[\frac{6n-k}{p} \right] - \left[\frac{5n}{p} \right] \\ & - \left[\frac{n-k}{p} \right] + \left[\frac{k-1}{p} \right] + \left[\frac{7n-k}{p} \right] - \left[\frac{7n}{p} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Для любого целого числа u , как легко проверить, выполняется равенство

$$\left[\frac{u}{p} \right] = -1 - \left[-\frac{u+1}{p} \right].$$

Применяя его к числам u , равным $5n-k$, $2n-k$, $6n-k$, $n-k$ и $7n-k$, мы можем переписать неравенство (15) в виде $\nu_p(A'(-k)) \geq \mu(x, y) - 1$, где, как и ранее, $x = (k-1)/p$ и $y = \{n/p\}$. Пользуясь теперь леммой 2, получаем неравенство $\nu_p(A'(-k)) \geq 0$. Нужное утверждение выполняется и в этом случае.

Наконец, в последнем случае $6n+1 \leq k \leq 7n$ утверждение выполняется в силу соотношения $A'(-1-7n-x) = (-1)^{n-1}A'(x)$ и доказанного ранее утверждения леммы для чисел k , $1 \leq k \leq n$.

3. Асимптотики. В этом пункте мы установим некоторые результаты об асимптотическом поведении чисел $U(1/2)$ и $I(1/2)$ при n , стремящемся к бесконечности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеет место равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| U\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \ln \left(\frac{(\xi-5)^5(\xi-6)^6(\xi-7)^7}{3^3 5^5 7^7 (\xi-1)(\xi-2)^2} \right) = 18.6839 \dots,$$

где $\xi = 25.2677 \dots$ есть единственный действительный корень уравнения

$$x^3 - 33x^2 + 212x - 420 = 0. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (6) имеем

$$U\left(\frac{1}{2}\right) = - \sum_{k=7n+1}^{\infty} A(-k) 2^{-k},$$

где все члены последовательности $A(-k)$ суть числа одного знака. Положим

$$\tilde{A}(k) = k^2 A(-k) 2^{-k}.$$

Тогда

$$U\left(\frac{1}{2}\right) = - \sum_{k=7n+1}^{\infty} \frac{\tilde{A}(k)}{k^2}. \quad (17)$$

Оценим сверху величину $|\tilde{A}(k)|$.

Из равенства

$$\frac{\tilde{A}(k+1)}{\tilde{A}(k)} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \frac{k(k-n)(k-2n)}{2(k-5n)(k-6n)(k-7n)},$$

учитывая, что функция

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{2(x-5)(x-6)(x-7)} \quad (18)$$

принимает в точке $x = 26$ значение $130/133 < 1$ и при $x > 26$ остается меньшей этого значения, заключаем, что при $k > 26n$ и достаточно большом n последовательность $|\tilde{A}(k)|$ убывает. Поэтому

$$\max_{k > 7n} |\tilde{A}(k)| = \max_{7n < k \leq 26n} |\tilde{A}(k)|.$$

Пользуясь формулой

$$\left| \log \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x + x - \frac{1}{2} \log 2\pi \right| < \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

для логарифма гамма-функции (см. [15; 12.31]), и обозначив $\lambda = k/n$, находим при $7 < \lambda \leq 26$ равенства

$$\begin{aligned} \ln \binom{k-2n-1}{3n} &= n[(\lambda-2) \ln(\lambda-2) - (\lambda-5) \ln(\lambda-5) - 3 \ln 3] + O(\log n), \\ \ln \binom{k-n-1}{5n} &= n[(\lambda-1) \ln(\lambda-1) - (\lambda-6) \ln(\lambda-6) - 5 \ln 5] + O(\log n), \\ \ln \binom{k-1}{7n} &= n[\lambda \ln \lambda - (\lambda-7) \ln(\lambda-7) - 7 \ln 7] + O(\log n), \end{aligned}$$

из которых следует

$$\ln |\tilde{A}(k)| = n(f(\lambda) - \lambda \ln 2) + O(\ln n), \quad (19)$$

где функция $f(x)$ определена равенством

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^x (x-1)^{x-1} (x-2)^{x-2}}{(x-5)^{x-5} (x-6)^{x-6} (x-7)^{x-7} 3^3 5^5 7^7} \right).$$

Приравнявая производную функции $f(x) - x \ln 2$ к нулю, получаем уравнение

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{(x-5)(x-6)(x-7)} = 2,$$

которое имеет единственный действительный корень ξ , указанный в формулировке леммы и являющийся точкой максимума функции $f(x) - x \ln 2$.

Отсюда после простых преобразований находим

$$\ln \max_{k > 7n} |\tilde{A}(k)| = \ln \max_{7n < k \leq 26n} |\tilde{A}(k)| \leq n \ln \left(\frac{(\xi - 5)^5 (\xi - 6)^6 (\xi - 7)^7}{3^3 5^5 7^7 (\xi - 1)(\xi - 2)^2} \right) + O(\ln n). \quad (20)$$

Для того чтобы оценить этот максимум снизу, обозначим $r = [\xi n]$. Тогда $|\xi - r/n| < 1/n$. Учитывая, что производная функции $f(x)$ ограничена на множестве $8 \leq x \leq 26$ получаем, что

$$f\left(\frac{r}{n}\right) - \frac{r}{n} \ln 2 = f(\xi) - \xi \ln 2 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Но тогда согласно (19) имеем

$$\ln |\tilde{A}(r)| = n(f(\xi) - \lambda \xi) + O(\ln n).$$

Это равенство и (20) дают для $M = \max_{k > 7n} |\tilde{A}(k)|$ формулу

$$\ln M = n \ln \left(\frac{(\xi - 5)^5 (\xi - 6)^6 (\xi - 7)^7}{3^3 5^5 7^7 (\xi - 1)(\xi - 2)^2} \right) + O(\ln n).$$

Из представления (17), поскольку все числа $\tilde{A}(k)$ имеют одинаковые знаки, находим

$$(26n)^{-2} M \leq \left| U\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq M \sum_{k=7n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < M.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| U\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln M = \ln \left(\frac{(\xi - 5)^5 (\xi - 6)^6 (\xi - 7)^7}{3^3 5^5 7^7 (\xi - 1)(\xi - 2)^2} \right).$$

Это завершает доказательство предложения 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При $n \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| I\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq -11.003176 \dots = \ln \frac{|z_0 + 5|^5 |z_0 + 6|^6 |z_0 + 7|^7}{3^3 5^5 7^7 |z_0 + 1| |z_0 + 2|^2},$$

где z_0 – комплексный корень многочлена $x^3 + 33x^2 + 212x + 420$ с условием $\operatorname{Im} z_0 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многочлен $x^3 + 33x^2 + 212x + 420$ имеет один действительный корень $-\xi$ и два комплексно сопряженных.

Имеем $z_0 = -3.86616 \dots + i \cdot 1.29414 \dots$. Константу c в определении контура L , по которому вычисляется интеграл $I(1/2)$ (см. (2)), зададим равенством $c = \operatorname{Re} z_0$. Интеграл от той же функции по части контура L , расположенной в верхней комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$, обозначим буквой J . Учитывая, что подынтегральная функция $\Phi(\zeta)$ в интеграле $I(1/2)$ удовлетворяет условию $\overline{\Phi(\zeta)} = \Phi(\bar{\zeta})$, заключаем, что

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = J + \bar{J} = 2 \operatorname{Re} J.$$

Далее мы оценим сверху величину интеграла J .

Имеет место тождество

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta) &= A(\zeta) \left(\frac{\pi}{\sin \pi \zeta} \right)^2 2^\zeta \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(\zeta + 5n + 1) \Gamma(-\zeta - 2n)}{(3n)!} \cdot \frac{\Gamma(\zeta + 6n + 1) \Gamma(-\zeta - n)}{(5n)!} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\zeta + 7n + 1) \Gamma(-\zeta)}{(7n)!} \cdot \frac{\sin \pi \zeta}{\pi} \cdot 2^\zeta.\end{aligned}\quad (21)$$

Воспользуемся далее формулой

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2} \right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + r(z), \quad |r(z)| \leq \frac{K}{\operatorname{Re} z},$$

где K – некоторая положительная постоянная, а ветви логарифмов выбираются так, что они действительны на положительной части вещественной оси (см. [15; § 12.31]). Так как на контуре L величины $\operatorname{Re}(\zeta + 5n + 1)$, $\operatorname{Re}(\zeta + 6n + 1)$, $\operatorname{Re}(\zeta + 7n + 1)$, $\operatorname{Re}(-\zeta - 2n)$, $\operatorname{Re}(-\zeta - n)$, $\operatorname{Re}(-\zeta)$ эквивалентны положительным константам, умноженным на n , то с помощью равенства (21) находим представление

$$\Phi(\zeta) = h(z) \cdot e^{nf(z)} \cdot \frac{e^{2\pi i n z} - 1}{2\pi i} \cdot (1 + O(n^{-1})).$$

Здесь $\zeta = nz$ и

$$\begin{aligned}f(z) &= (z + 5) \ln(z + 5) + (z + 6) \ln(z + 6) + (z + 7) \ln(z + 7) - (z + 2) \ln(-z - 2) \\ &\quad - (z + 1) \ln(-z - 1) - z \ln(-z) + z \ln 2 - z\pi i - \ln(3^3 5^5 7^7), \\ h(z) &= (-1)^{n+1} \left(\frac{(2\pi)^3 (z + 5)(z + 6)(z + 7)}{105n^3(-z - 2)(-z - 1)(-z)} \right)^{1/2},\end{aligned}$$

а константа в $O(n^{-1})$ не зависит от z . Сделаем в интеграле J замену переменной $\zeta = n(c + iu)$. Тогда получится

$$J = \frac{n}{2\pi} \int_0^\infty \Psi(u) du, \quad \text{где } \Psi(u) = e^{nf(c+iu)} h(c+iu) \frac{e^{2\pi i n(c+iu)} - 1}{2\pi i} \cdot (1 + O(n^{-1})).$$

Обозначим $g(u) = \operatorname{Re} f(c + iu)$. При $z = c + iu$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}g'(u) &= -\operatorname{Im} f'(c + iu) \\ &= -\operatorname{Im} [\ln(z + 5) + \ln(z + 6) + \ln(z + 7) \\ &\quad - \ln(-z - 2) - \ln(-z - 1) - \ln(-z) + \ln 2 - \pi i] \\ &= -\arg(z + 5) - \arg(z + 6) - \arg(z + 7) \\ &\quad + \arg(-z - 2) + \arg(-z - 1) + \arg(-z) + \pi.\end{aligned}$$

Функции $-\arg(b + iu)$ и $\arg(b - iu)$ при любом фиксированном $b > 0$ убывают на множестве $u \geq 0$. Так что $g'(u)$ есть убывающая функция на этом множестве.

Обозначим $z_0 = c + i\eta$. Поскольку z_0 есть корень многочлена $x^3 + 33x^2 + 212x + 420$, находим

$$e^{f'(z_0)} = \frac{2(z_0 + 5)(z_0 + 6)(z_0 + 7)}{z_0(z_0 + 1)(z_0 + 2)} = 1.$$

Следовательно, $f'(z_0) = 2\pi ki$ при некотором целом k . Из приведенных выше формул следует также

$$-\pi < \arg f'(z_0) < 6 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi = 2\pi.$$

Но тогда $f'(z_0) = 0$ и, значит, $g'(\eta) = 0$. Это доказывает, что функция $g(u)$ имеет единственную точку максимума η на множестве $u \geq 0$.

Ранее доказано, что

$$0 = f'(z_0) = \ln(z_0+5) + \ln(z_0+6) + \ln(z_0+7) - \ln(-z_0-2) - \ln(-z_0-1) - \ln(-z_0) + \ln 2 - \pi i,$$

поэтому

$$\begin{aligned} g(\eta) &= \operatorname{Re} f(z_0) \\ &= 5 \ln |z_0 + 5| + 6 \ln |z_0 + 6| + 7 \ln |z_0 + 7| - 2 \ln |-z_0 - 2| - \ln |-z_0 - 1| \\ &\quad - \ln(3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7) \\ &= \ln \frac{|z_0 + 5|^5 |z_0 + 6|^6 |z_0 + 7|^7}{3^3 5^5 7^7 |z_0 + 1| |z_0 + 2|^2} = -11.003176 \dots \end{aligned}$$

Легко проверить, что $g(1/3) < -12$, $g(5/2) < -12$ и $g'(5/2) = -1.76 \dots < -1$. Из этих неравенств для любого $u \geq 5/2$ и $\theta \geq 5/2$, зависящем от u , находим

$$g(u) - g\left(\frac{5}{2}\right) = g'(\theta) \left(u - \frac{5}{2}\right) < -\left(u - \frac{5}{2}\right).$$

Учитывая теперь неравенства $|e^{2\pi i n z} - 1| \leq 2$ и $|h(z)| \leq \gamma n^{-3/2}$, справедливые при $u \geq 0$ и с некоторой абсолютной постоянной $\gamma > 0$, заключаем, что при всех достаточно больших n выполняются оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{2\pi} \int_0^{1/3} \Psi(u) du \right| &\leq e^{-12n}, \\ \left| \frac{n}{2\pi} \int_{5/2}^{+\infty} \Psi(u) du \right| &\leq e^{ng(5/2)} \int_{5/2}^{+\infty} e^{-n(u-5/2)} du \leq e^{-12n}. \end{aligned} \quad (22)$$

Точно так же находим

$$\left| \frac{n}{2\pi} \int_{1/3}^{5/2} \Psi(u) du \right| \leq e^{n \operatorname{Re} f(z_0)}, \quad (23)$$

если n достаточно велико. Складывая интегралы (22) и (23), находим

$$|J| \leq 2e^{n \operatorname{Re} f(z_0)}. \quad (24)$$

Следовательно,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| I\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \operatorname{Re} f(z_0).$$

Это завершает доказательство предложения 3.

4. Доказательство теоремы. Определим целые числа p_n, q_n равенствами (см. предложение 1 и лемму 4),

$$\begin{aligned} q_n &= 2^n D \sum_{j=7n}^{15n} a_j (-1)^j = 2^n DU \left(\frac{1}{2} \right), \\ p_n &= 2^n D \left(\sum_{k=1}^n A'(-k) 2^{-k} + \sum_{j=0}^{15n-1} b_j (-1)^{j+1} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

В соответствии с равенством (3) находим

$$2^n D \cdot I \left(\frac{1}{2} \right) = q_n \ln 2 - p_n.$$

Следующее утверждение было доказано Хатой в 1993 г. (см. [16; лемма 2.1]).

ЛЕММА 5. Пусть α – действительное иррациональное число и последовательность пар целых чисел q_n, p_n удовлетворяет условиям

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |q_n| = \sigma > 0, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |q_n \alpha - p_n| \leq -\tau, \quad \tau > 0.$$

Тогда показатель иррациональности числа α удовлетворяет неравенству

$$\mu(\alpha) \leq 1 + \frac{\sigma}{\tau}.$$

Для доказательства теоремы нам осталось только вычислить σ и τ для $\alpha = \ln 2$ и последовательности пар целых чисел q_n, p_n , определенной равенствами (25).

Из асимптотического закона распределения простых чисел следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln d_{7n} = 7.$$

ЛЕММА 6. Пусть u, v – действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < u < v < 1$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{u \leq \{n/p\} < v} \ln p = \psi(v) - \psi(u), \quad (26)$$

где $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ – логарифмическая производная гамма-функции, а суммирование ведется по всем простым числам p с условием, что дробная часть $\{n/p\}$ удовлетворяет неравенствам, указанным под знаком суммы.

Это утверждение по существу доказано Хатой и в настоящее время считается классическим. Тем не менее, трудно указать одну какую-нибудь работу, где бы присутствовали его формулировка и доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простые числа, входящие в сумму (26), удовлетворяют неравенствам

$$\frac{n}{v+i} < p \leq \frac{n}{u+i}.$$

с каким-нибудь целым числом $i \geq 0$. Поэтому

$$\sum_{u \leq \{n/p\} < v} \ln p = \sum_{i \geq 0} \sum_{n/(u+i) < p \leq n/(v+i)} \ln p = \sum_{i \geq 0} \left(\theta\left(\frac{n}{u+i}\right) - \theta\left(\frac{n}{v+i}\right) \right), \quad (27)$$

где $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$ — функция Чебышева. Последняя сумма в (27) конечна. Из (27) следует, что при любом натуральном m выполняются неравенства

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m \left(\theta\left(\frac{n}{u+i}\right) - \theta\left(\frac{n}{v+i}\right) \right) \\ & \leq \sum_{u \leq \{n/p\} < v} \ln p \leq \sum_{i=0}^m \left(\theta\left(\frac{n}{u+i}\right) - \theta\left(\frac{n}{v+i}\right) \right) + \theta\left(\frac{n}{u+m+1}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

Как известно, $\theta(x)/x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$. Поэтому разделив неравенства (28) на n и устремляя n к бесконечности, находим

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \left(\frac{1}{u+i} - \frac{1}{v+i} \right) & \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{u \leq \{n/p\} < v} \ln p \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{u \leq \{n/p\} < v} \ln p \\ & \leq \sum_{i=0}^m \left(\frac{1}{u+i} - \frac{1}{v+i} \right) + \frac{1}{u+m+1}. \end{aligned} \quad (29)$$

Но тогда

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{u \leq \{n/p\} < v} \ln p - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{u \leq \{n/p\} < v} \ln p \leq \frac{1}{u+m+1}.$$

Неравенства имеют место при любом натуральном m , поэтому можно утверждать, что предел в равенстве (26) существует. Обозначим его буквой L . Из (29) следует

$$0 \leq L - \sum_{i=0}^m \left(\frac{1}{u+i} - \frac{1}{v+i} \right) \leq \frac{1}{u+m+1}.$$

Устремляя теперь m к бесконечности, получаем

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{u+i} - \frac{1}{v+i} \right) = \psi(v) - \psi(u)$$

(см. [15; § 12.16]). Лемма доказана.

Поскольку $\sum_{p \leq \sqrt{15n}} \ln p = O(\sqrt{n})$, то из доказанной леммы следует, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \Delta \\ & = \kappa = \psi\left(\frac{6}{7}\right) - \psi\left(\frac{3}{4}\right) + \psi\left(\frac{5}{7}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \psi\left(\frac{3}{7}\right) - \psi\left(\frac{1}{6}\right) = 4.995102335 \dots \end{aligned}$$

Теперь находим

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln q_n = 7 + \ln 2 - \kappa + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln U\left(\frac{1}{2}\right) = 21.3820086208 \dots$$

Точно так же

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |q_n \ln 2 - p_n| \leq -\tau = 7 + \ln 2 - \kappa + \ln \frac{|z_0 + 5|^5 |z_0 + 6|^6 |z_0 + 7|^7}{3^3 5^5 7^7 |z_0 + 1| |z_0 + 2|^2} = -8.3051314637 \dots,$$

и согласно лемме 5 находим

$$\mu(\ln 2) \leq 1 + \frac{\sigma}{\tau} = 3.5745539025 \dots$$

Теорема доказана.

5. Замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из тождества

$$\begin{aligned} A(\zeta) \left(\frac{\pi}{\sin \pi \zeta} \right)^2 z^{-\zeta} \\ = \frac{(-1)^n}{(3n)!(5n)!(7n)!} \frac{\Gamma(\zeta + 5n + 1) \Gamma(\zeta + 6n + 1) \Gamma(\zeta + 7n + 1) \Gamma(-\zeta) \Gamma(-\zeta - n)}{\Gamma(\zeta + 2n + 1)} \cdot z^{-\zeta} \end{aligned}$$

следует, что интеграл $I(z)$ лишь постоянным множителем отличается от G-функции Мейера (см. [14]). А именно,

$$I(z) = \frac{(-1)^n}{(3n)!(5n)!(7n)!} \cdot G_{3,3}^{2,3} \left(\frac{1}{z} \middle| \begin{matrix} -5n, -6n, -7n \\ 0, -n, -2n \end{matrix} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Выбрав многочлен $A(x)$ в виде

$$A(x) = \frac{(x+1) \cdots (x+8n)}{(8n)!} \cdot \frac{(x+n+1) \cdots (x+7n)}{(6n)!}$$

и действуя точно так же, как описано выше, можно получить результат Рухадзе–Хаты $\mu(\ln 2) \leq 3,891399 \dots$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Рассматривая интеграл $I(a/b)$ при целых a, b , можно таким же способом получить оценку показателя иррациональности для числа $\ln(a/b)$.

Часть результатов этой статьи была получена во время моего пребывания в Пизанском университете в октябре 2009 г. Я весьма благодарен профессору Карло Виоле за прекрасные условия для работы, многочисленные дискуссии, а также творческую атмосферу.

Я благодарен также В. Х. Салихову и моему студенту А. А. Полянскому за ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Х. Салихов, “О мере иррациональности числа π ”, *УМН*, **63**:3 (2008), 163–164.
- [2] А. Baker, “Approximations to the logarithms of the certain rational numbers”, *Acta Arithm.*, **10** (1964), 315–323.

- [3] Л. В. Данилов, “Рациональные приближения некоторых функций в рациональных точках”, *Матем. заметки*, **24**:4 (1978), 449–458.
- [4] K. Alladi, M. Robinson, “On certain irrational values of the logarithm”, *Number theory, Carbondale 1979*, Lecture Notes in Math., **751**, Springer-Verlag, Berlin, 1979, 1–9.
- [5] G. V. Choodnovsky, “Approximations rationnelles des logarithmes de nombres rationnels”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **288**:12 (1979), 607–609.
- [6] G. V. Chudnovsky, “Number theoretic applications of polynomials with rational coefficients defined by extremality conditions”, *Arithmetic and Geometry*. v.I, Progr. Math., **35**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, 61–105.
- [7] G. Rhin, “Approximants de Padé et mesures effectives d’irrationalité”, *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1985/86*, Progr. Math., **71**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987, 155–164.
- [8] Е. А. Рухадзе, “Оценка снизу для приближения $\ln 2$ рациональными числами”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1987, № 6, 25–29.
- [9] M. Hata, “Legendre type polynomials and irrationality measures”, *J. Reine Angew. Math.*, **407** (1990), 99–125.
- [10] R. Marcovecchio, “The Rhin–Viola method for $\log 2$ ”, *Acta Arith.*, **139**:2 (2009), 147–184.
- [11] G. Rhin, C. Viola, “On a permutation group related to $\zeta(2)$ ”, *Acta Arith.*, **77**:1 (1996), 23–56.
- [12] G. Rhin, C. Viola, “The group structure for $\zeta(3)$ ”, *Acta Arith.*, **97**:3 (2001), 269–293.
- [13] Ю. В. Нестеренко, “Некоторые замечания о $\zeta(3)$ ”, *Матем. заметки*, **59**:6 (1996), 865–880.
- [14] Ю. Люк, *Специальные математические функции и их аппроксимации*, Мир, М., 1980.
- [15] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции*, Физматгиз, М., 1963.
- [16] M. Hata, “Rational approximations to π and some other numbers”, *Acta Arith.*, **63**:4 (1993), 335–349.

Ю. В. Нестеренко

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: nester@orc.ru

Поступило

03.01.2010

Исправленный вариант

15.02.2010